Konstruktionen gleichschenkliger Dreiecke mit Hilfe von Kurven höherer Ordnung

Autor(en): **Krebs, A.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern**

Band (Jahr): **- (1902)**

Heft 1519-1550

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-319122

A. Krebs.

Konstruktionen gleichschenkliger Dreiecke mit Hilfe von Kurven höherer Ordnung.

EINLEITUNG.

§ 1. Ein gleichschenkliges Dreieck ist durch zwei Stücke bestimmt. Als Bestimmungsstücke sollen in Betracht fallen (Fig. 1):

1. Die Basis $OA = b$.
2. Der Schenkel $OB = AB = s$.
3. Die Basishöhe $BC = h_b$.
4. Die Schenkelhöhe $AD = h_s$.
5. Die durch die Schenkelhöhe erzeugten Schenkelabschnitte $OD = m$ und $DB = n$.

Im ganzen haben wir also sechs Bestimmungsstücke. In allen Konstruktionsaufgaben, die wir lösen werden, soll die Basis b das erste gegebene Stück sein. Als Zweites fügen wir die Summe oder Differenz aus je zweien der übrigen fünf Bestimmungsgrössen hinzu.

Ein gleichschenkliges Dreieck hat für uns jetzt vier Fundamentalpunkte. Zwei davon sind stets durch die Basis gegeben. Ist von den andern zweien — es betrifft dies noch die Spitze B und den Fusspunkt D der Schenkelhöhe — der eine bestimmt, so ist das Problem gelöst. Jede Aufgabe gestattet daher eine doppelte Lösungsart. Die Bestimmung des dritten festen Punktes erfordert, wie wir bald sehen werden, die Konstruktion einer Kurve höherer Ordnung. Sollte eine solche Hilfskurve nicht näher bekannt sein, so erlauben wir uns, dieselbe nebenbei einer mehr oder weniger eingehenden Untersuchung zu unterwerfen.

I.

§ 2. *Erste Aufgabe: Ein gleichschenkliges Dreieck zu konstruieren, wenn die Basis b und die Summe oder Differenz aus der Basishöhe und dem an die Spitze grenzenden Schenkelabschnitt gegeben sind.*

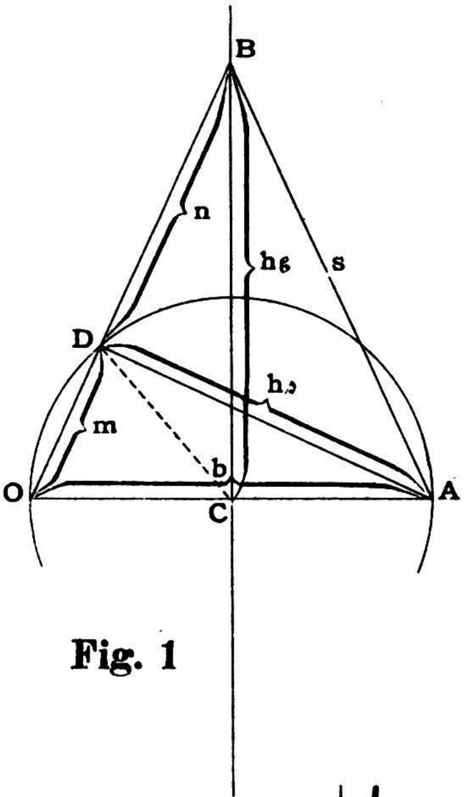


Fig. 1

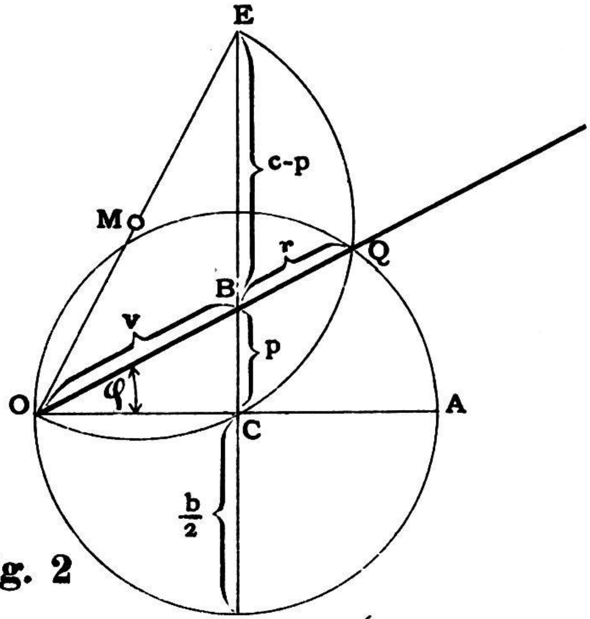


Fig. 2

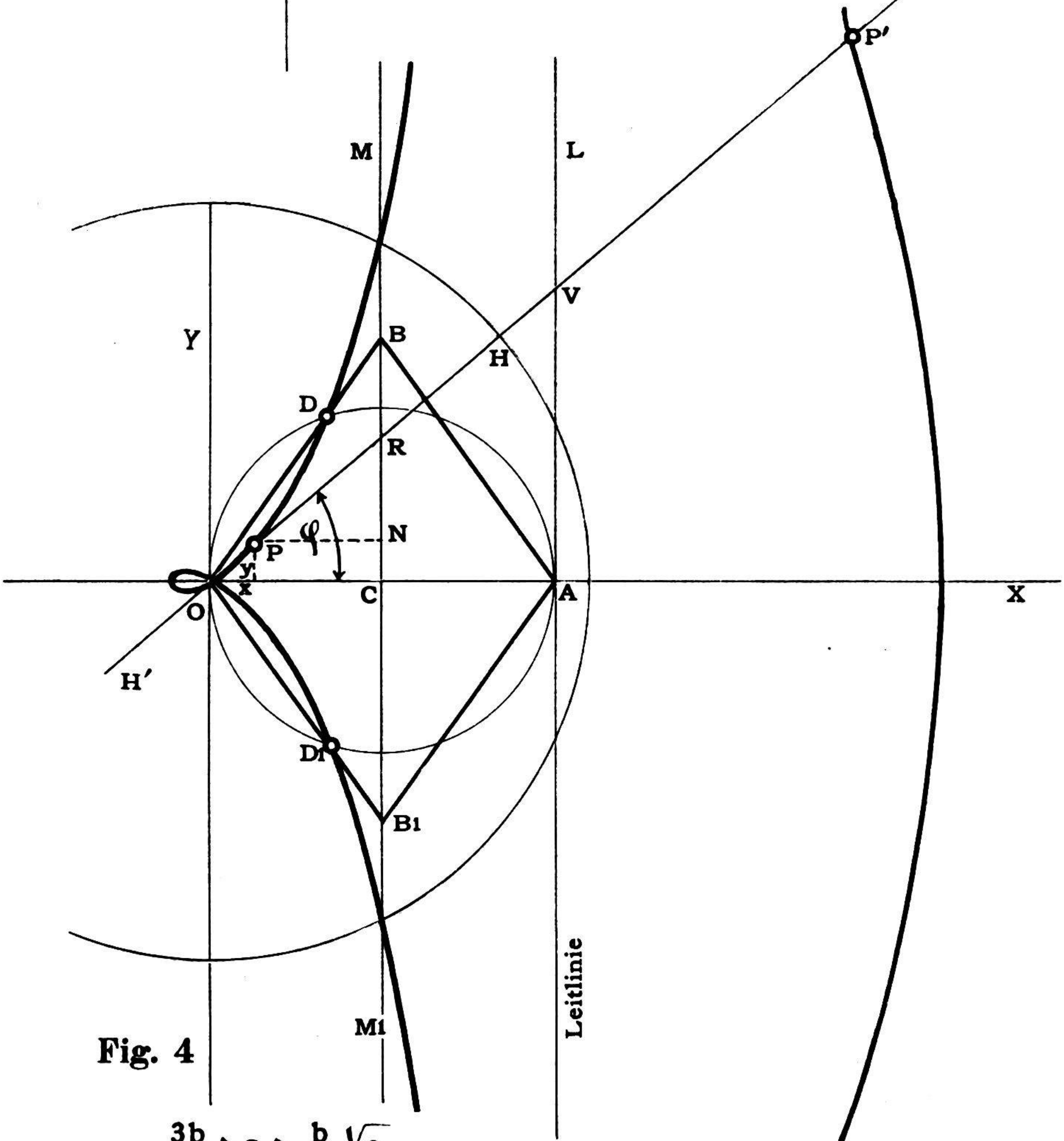


Fig. 4

$$\frac{3b}{2} > c > \frac{b}{2}\sqrt{2}$$

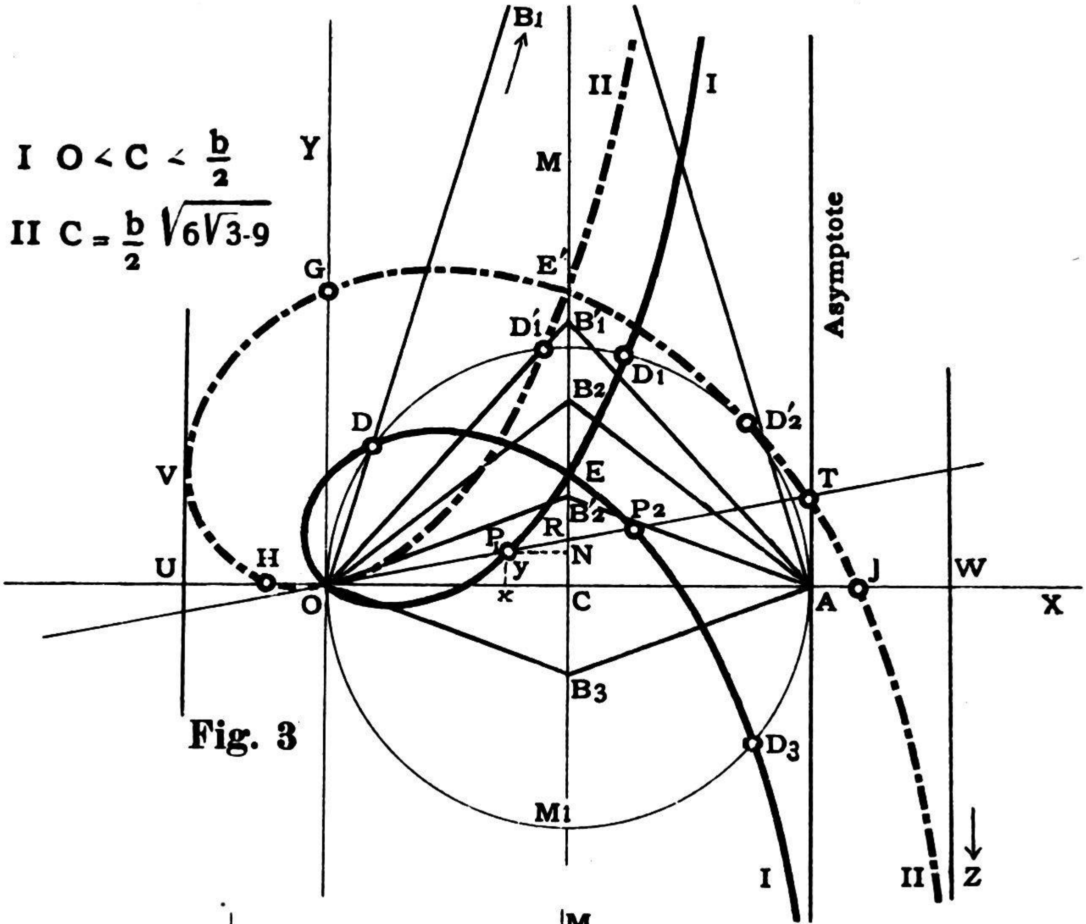

I O < C < b/2
II C = b/2 √(6√3-9)
Y
M
B1
II
I
Asymptote
G
E′
D1′
B1′
D1
B2
D2′
D
V
E
T
B2′
P2
R
P1
N
y
U
H
O
x
C
A
J
W
X
B3
D3
M1
I
II
Z

Fig. 3

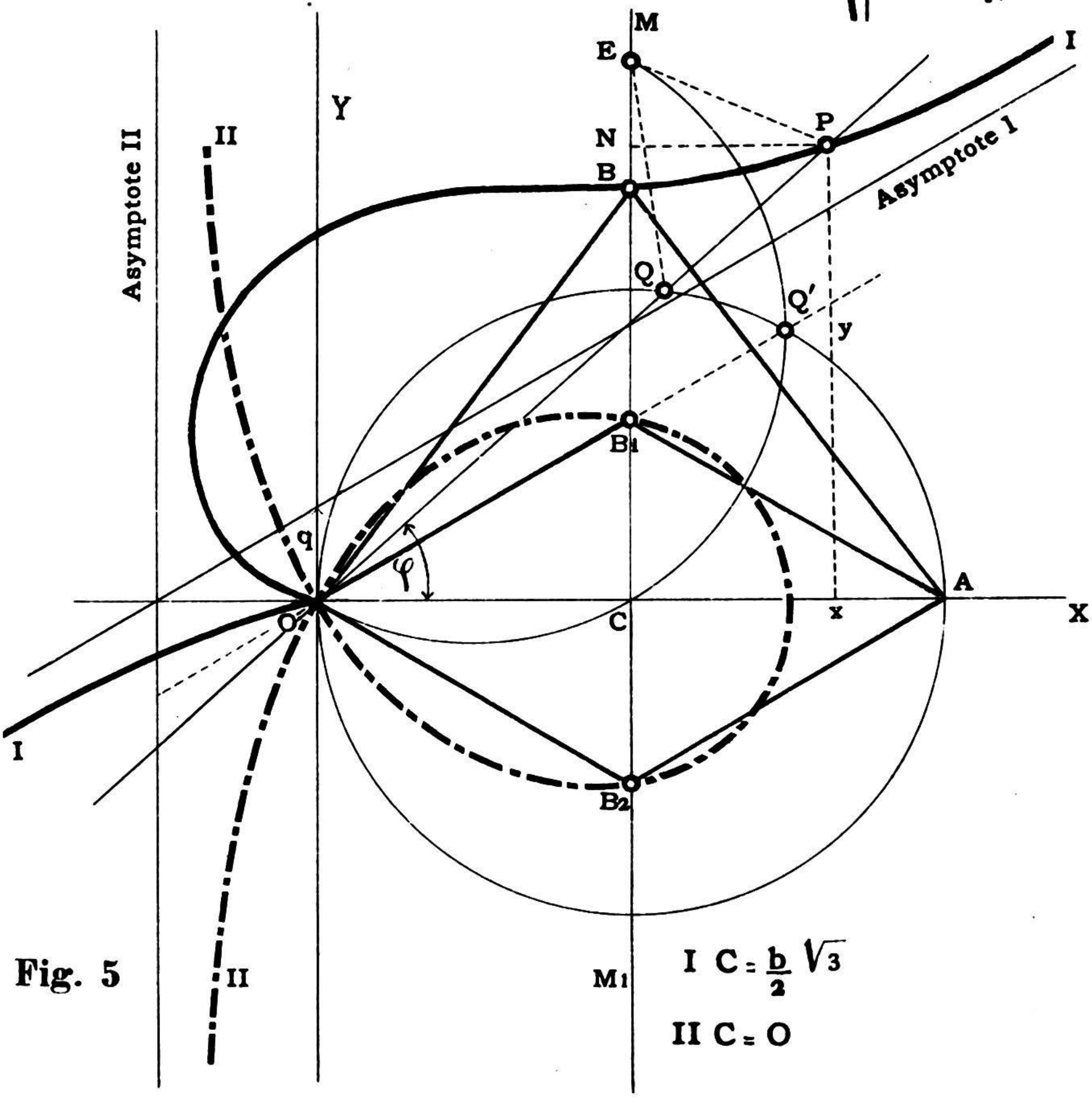
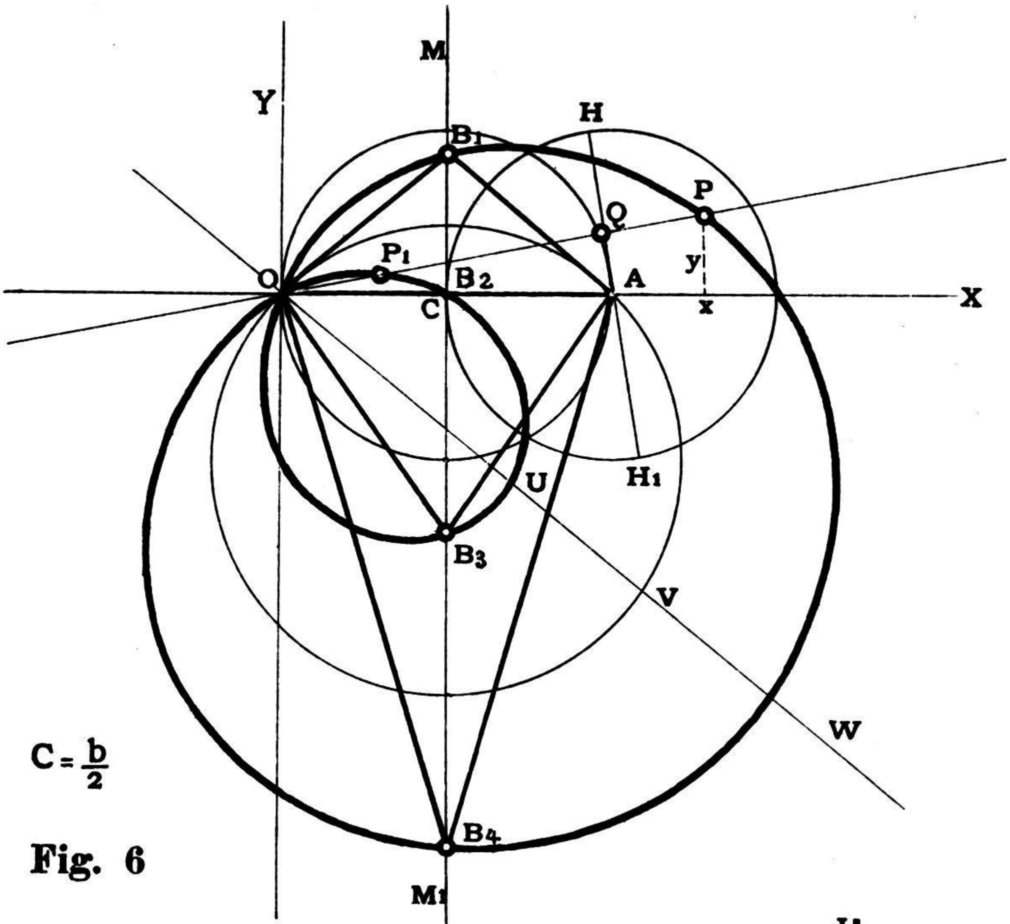

M
E
I
Y
II
Asymptote II
N
P
B
Asymptote I
Q
Q′
y
B1
q
φ
A
O
C
x
X
I
B2
M1
II
I C = b/2 √3
II C = O

Fig. 5



$C = \frac{b}{2}$

Fig. 6

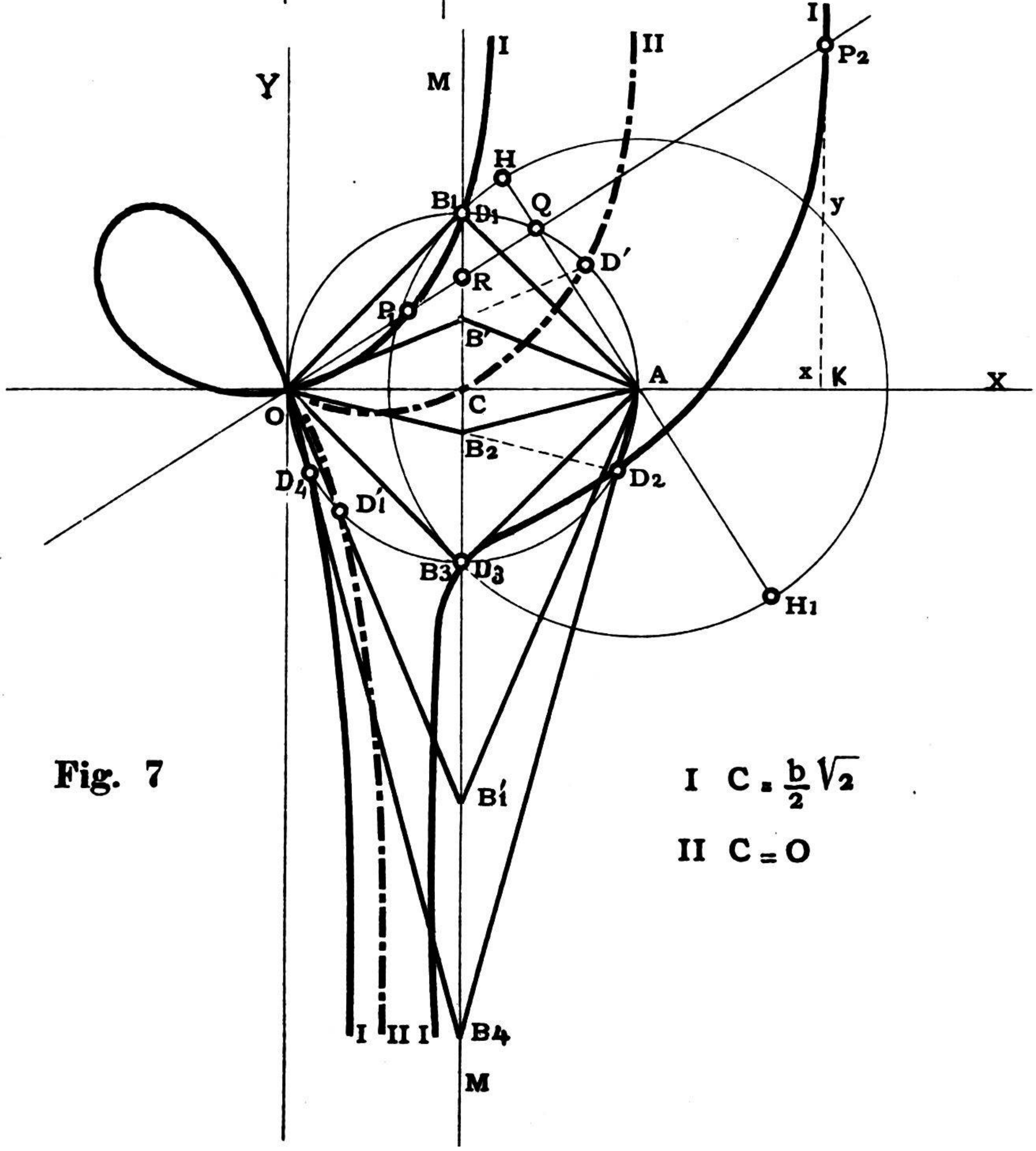


Fig. 7

I $C = \frac{b}{2}\sqrt{2}$

II $C = O$

$C = \frac{b}{2}$

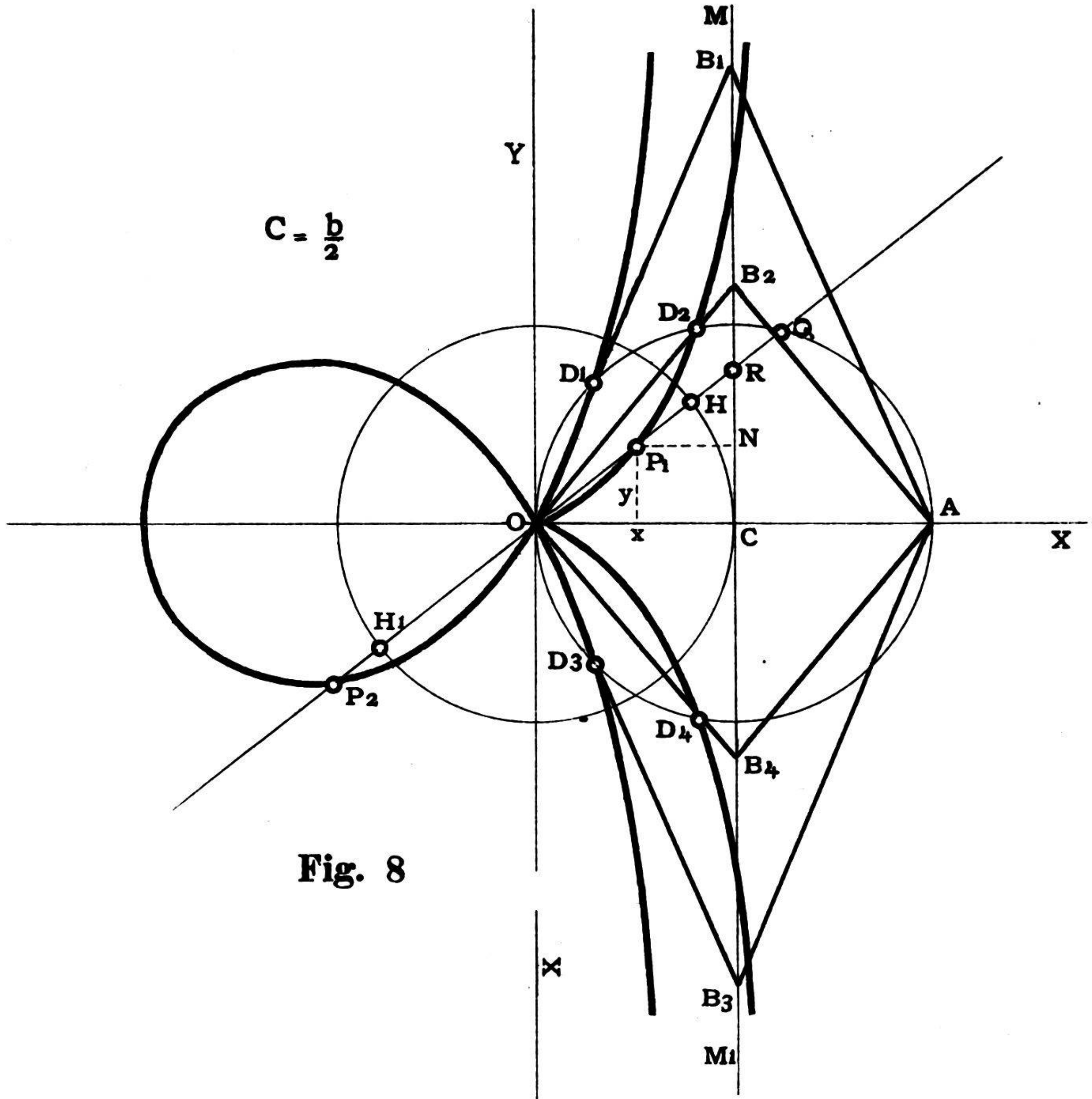


Fig. 8

$C = \frac{b}{2}(\sqrt{2} - 1)$

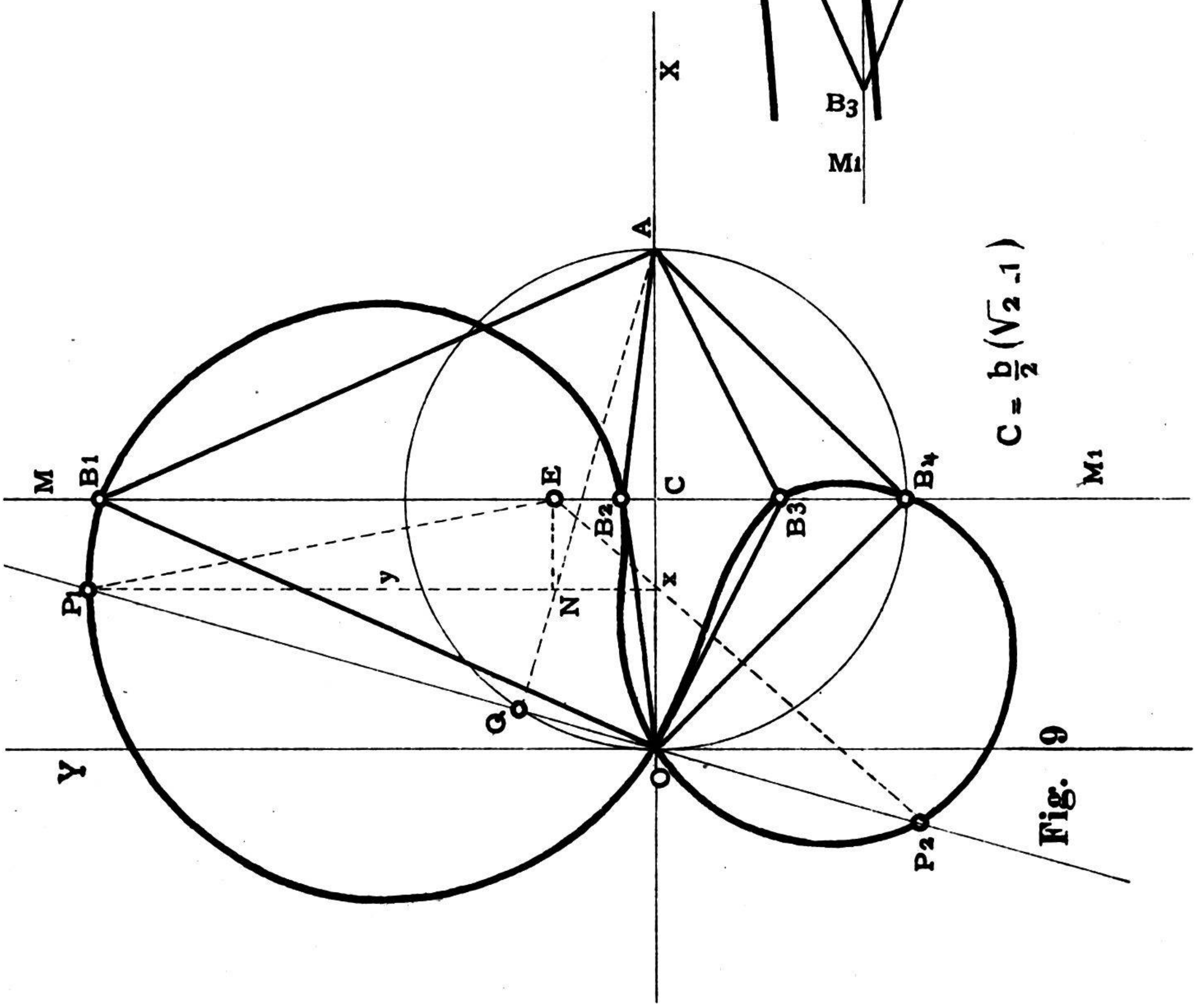


Fig. 9

Gegeben 1. b;

2. $h_b \pm n = \pm c =$ konstant.

Die Lösung ist möglich unter der Bedingung, dass

$$1. \quad h_b + n \geqq \frac{b}{2},$$

$$2. \quad \frac{b}{2} \geqq h_b - n \geqq -\frac{b}{2}.$$

Die Summe $h_b + n$ erreicht das Minimum $\frac{b}{2}$ bei einem unendlich kleinen und bei einem rechtwinkligen Dreieck. Die Differenz $h_b - n$ wird bei einem unendlich kleinen Dreieck zum Minimum $= -\frac{b}{2}$ und beim rechtwinkligen Dreieck zum Maximum $= \frac{b}{2}$. Bei jedem andern Dreieck wird $h_b - n$ abs. $< \frac{b}{2}$, was nach einem planimetrischen Satze sofort ersichtlich ist, wenn wir in Figur (1) D mit C verbinden.

§ 3. *Erste Lösung. Bestimmung des Fusspunktes D der Schenkelhöhe.*

a) Wir konstruieren zu diesem Zweck folgenderweise eine Hilfskurve. Es sei (siehe Fig. 3 I, Tafel I) $OA = b$ die gegebene Basis. Wir ziehen durch ihre Mitte C die Mittelsenkrechte MM_1. Auf derselben wählen wir den festen Punkt E so, dass $CE = c =$ der gegebenen Summe oder Differenz ist. Wir ziehen nun durch O einen Strahl, der die Mittelsenkrechte in R schneidet. Auf diesem Strahl tragen wir von R aus nach beiden Seiten die Strecke RE ab und bezeichnen die so gewonnenen Punkte mit P_1 und P_2. Wird nun der Strahl OR um O gedreht, so beschreiben die Punkte P_1 und P_2 die gesuchte Kurve. Dieselbe muss nach Konstruktion in E einen Doppelpunkt haben. Für die Kurvenpunkte P auf Strahlen, welche die Mittelsenkrechte zwischen Doppelpunkt E und der Basis OA schneiden, gilt die Relation:

$$P_1R + RC = P_2R + RC = CE = c.$$

Schneiden die Strahlen die Mittelsenkrechte oberhalb des Doppelpunktes E, so entsprechen die darauf liegenden Kurvenpunkte der Bedingung:

$$RC - RP_1 = RC - RP_2 = CE = c.$$

Kurvenpunkte endlich, deren Strahlen die Mittelsenkrechte unterhalb der Basis O A schneiden, genügen der Relation:

$$RP_1 - RC = RP_2 - RC = EC = c.$$

Die drei Relationen entsprechen den drei Bedingungen:

1. $h_b + n = c$;
2. $h_b - n = c$;
3. $n - h_b = c$.

Wir denken uns nun auf der Basis O A ein gleichschenkliges Dreieck konstruiert. Ist dasselbe das gesuchte, d. h. entspricht es den gestellten Bedingungen, so muss der Schnittpunkt des Schenkels O B mit der Kurve Fusspunkt der Schenkelhöhe sein. Nach Fig. 1 liegt der Fusspunkt D der Schenkelhöhe auf einem um O A als Durchmesser gezogenen Kreise. Um unsere Aufgabe mit Hilfe der konstruierten Kurve zu lösen, haben wir also noch um O A als Durchmesser den besagten Kreis zu ziehen, den wir fortan in allen unsern Konstruktionen den Grundkreis nennen wollen. Die Schnittpunkte des Grundkreises mit der Hilfskurve liefern die gesuchten Fusspunkte D der Schenkelhöhe.

b) Ableitung der Kurvengleichung.

Wir verwenden ein rechtwinkliges Koordinatensystem, wählen O zum Nullpunkt desselben und legen durch O A die positive x-Axe. Es seien x und y die Koordinaten des Punktes P_1. Ferner erinnern wir daran, dass $P_1R + RC = c$ und dass $OC = \frac{b}{2}$ ist.

Es ist nun $\overline{P_1R}^2 = \overline{P_1N}^2 + \overline{NR}^2$; $\qquad (\alpha)$

$P_1R = c - RC$ nach Konstruktion;

$P_1N = \frac{b}{2} - x$;

$NR = RC - y$.

Nun verhält sich $RC : y = \frac{b}{2} : x$, woraus folgt, dass

$$RC = \frac{by}{2x}.$$

Setzen wir die gefundenen Werte alle in (α) ein, so erhalten wir

$$\left(c - \frac{by}{2x}\right)^2 = \left(\frac{b}{2} - x\right)^2 + \left(\frac{by}{2x} - y\right)^2,$$

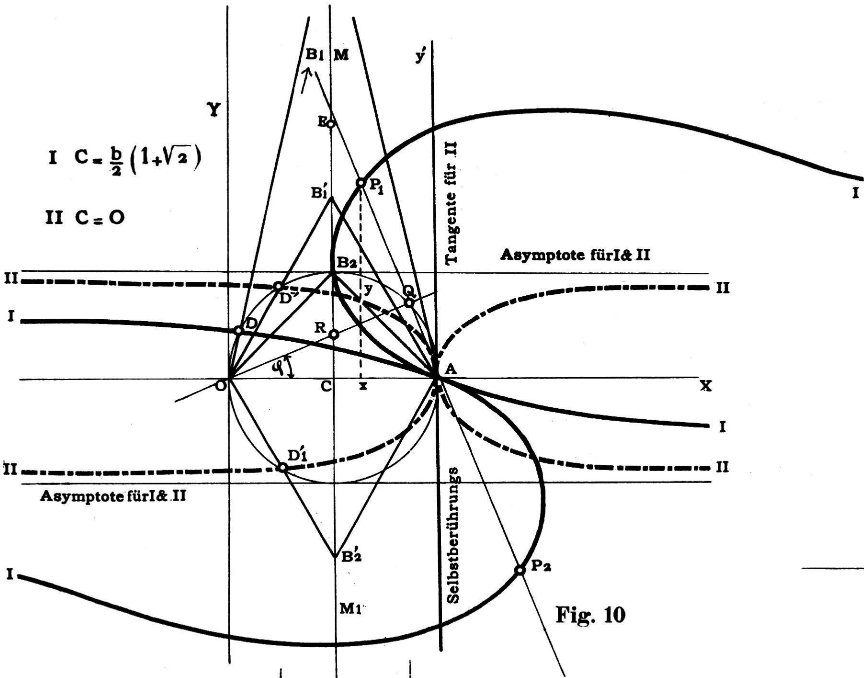


Fig. 10

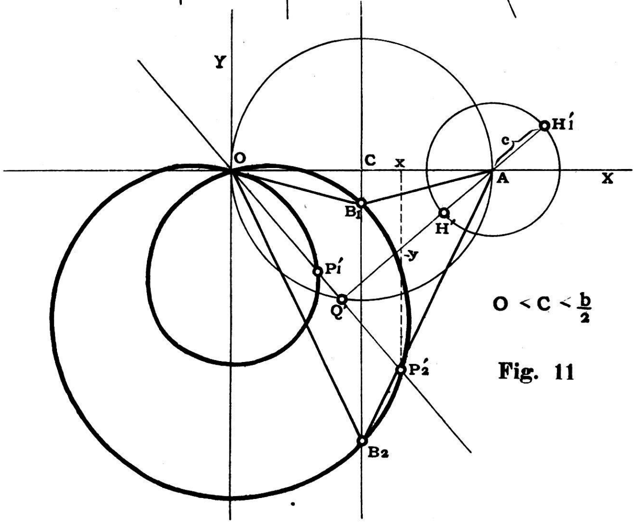


Fig. 11

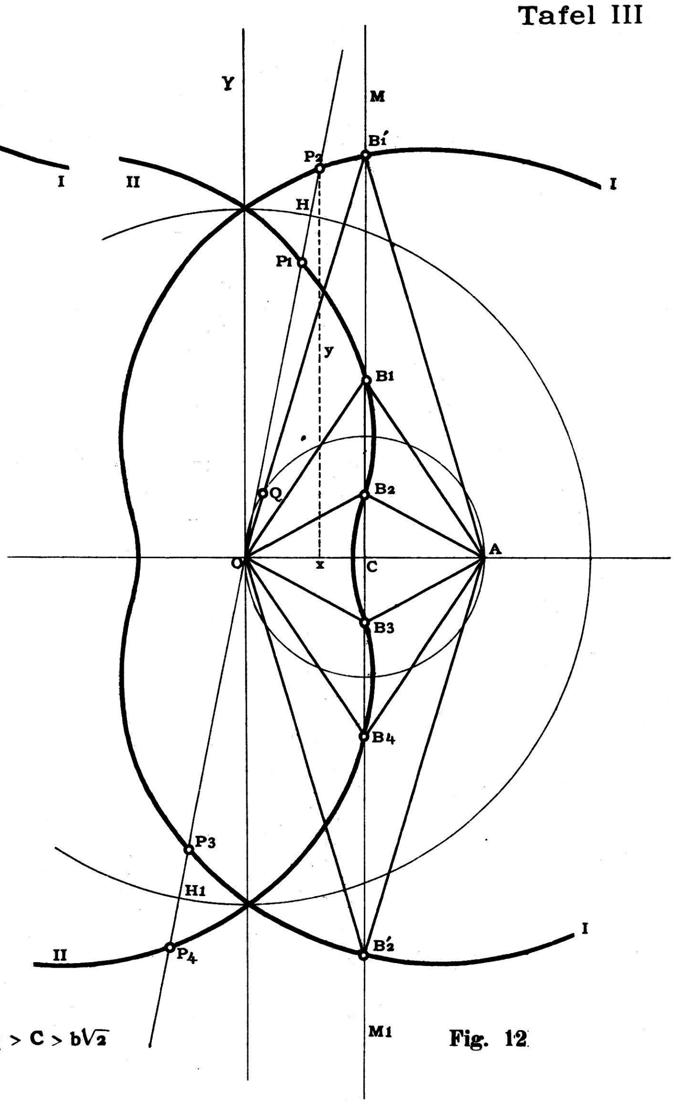
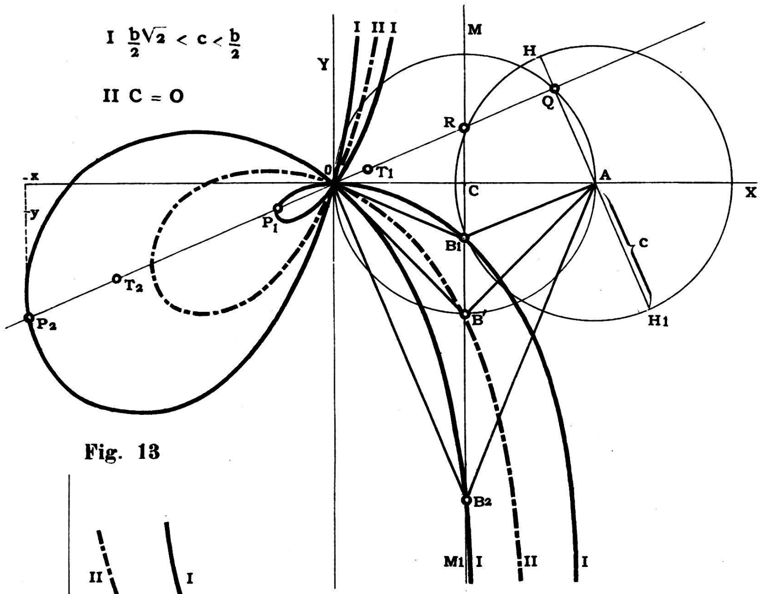


Fig. 12



I $\frac{b}{2}\sqrt{2} < c < \frac{b}{2}$

II $C = O$

Fig. 13

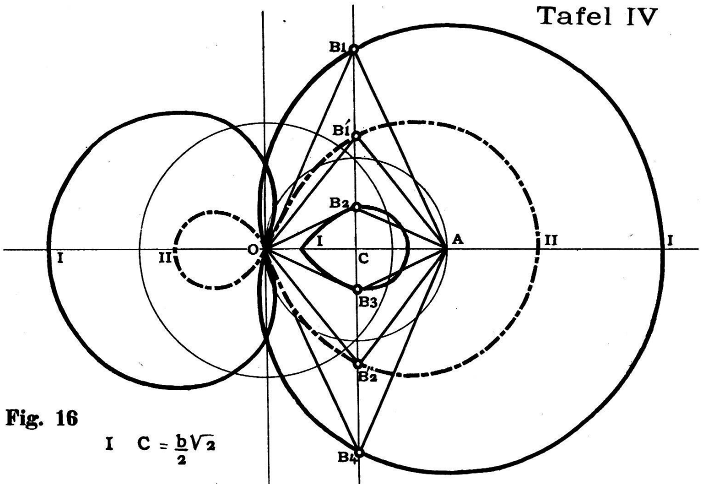


Fig. 16

I $C = \frac{b}{2}\sqrt{2}$

II $C = O$

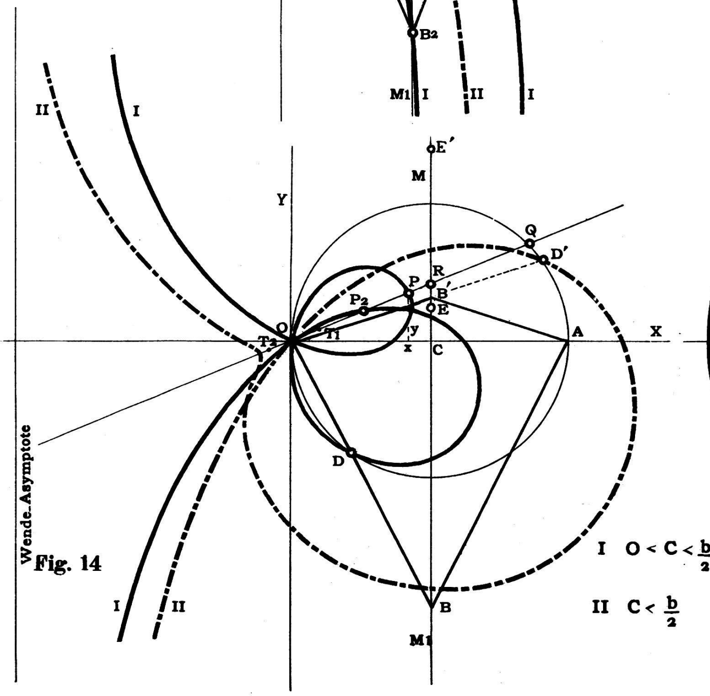


Fig. 14

I $O < C < \frac{b}{2}$

II $C < \frac{b}{2}$

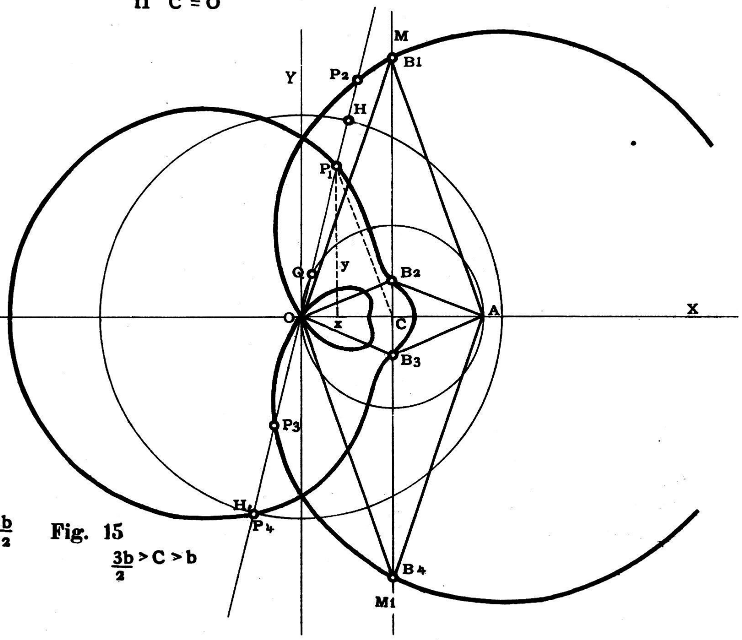


Fig. 15

$\frac{3b}{2} > C > b$

vereinfacht

$$(x^2 + y^2)(b - 2x)^2 - (2cx - by)^2 = 0. \tag{1}$$

Die Gleichung (1) stellt eine Kurve 4. Ordnung dar, die im Nullpunkt einen Doppelpunkt hat. Sie ist aber keine ächte Kurve 4. Ordnung; denn sie zerfällt in eine Kurve 3. Ordnung und in eine Gerade. Es lässt sich nämlich der Faktor x absondern und wegdividieren. Die y-Axe ist somit die Gerade.

Um den Faktor x wegdividieren zu können, bringen wir (1) auf die Form

$$(2cx - by)^2 - y^2(b - 2x)^2 = x^2(b - 2x)^2.$$

Wir zerlegen die linke Seite in zwei Faktoren, worauf wir ohne weiteres die Gleichung durch $4x$ dividieren können. Wir erhalten schliesslich für unsere Kurve 3. Ordnung die Gleichung

$$(x^2 + y^2)(x - b) - x\left(c^2 - \frac{b^2}{4}\right) + bcy = 0. \tag{2}$$

c) Die Eigenschaften der Kurve.

Die Kurve geht durch den Nullpunkt; denn die Gleichung beginnt mit Gliedern ersten Grades.

Setzen wir $U_1 = bcy - x\left(c^2 - \frac{b^2}{4}\right) = 0$, so erhalten wir

$$y = \frac{4c^2 - b^2}{4bc}\,x \text{ als Gleichung der} \tag{3}$$

Tangente im Nullpunkt.

Für $c = \frac{b}{2}$ wird $y = 0$; die Tangente fällt mit der x-Axe zusammen.

Für $c = 0$ wird $x = 0$; die Tangente fällt mit der y-Axe zusammen.

Um die Schnittpunkte der Kurve mit der x-Axe zu bekommen, setzen wir $y = 0$ und erhalten

$$x^3 - bx^2 - x\left(c^2 - \frac{b^2}{4}\right) = 0, \text{ woraus}$$

$x_1 = 0$, Punkt O (Kurve II);

$x_2 = \frac{b}{2} + c$, Punkt J;

$x_3 = \frac{b}{2} - c$, » H.

Die Punkte J und H sind gleich weit von C, dem Mittelpunkt der Basis, entfernt.

Setzen wir $x = 0$, so erhalten wir die Schnittpunkte der Kurve mit der y-Axe:

$$b y^2 - b c y = 0;$$

$$y_1 = 0, \text{ Punkt } O;$$

$$y_2 = c, \quad » \quad G.$$

Der 3. Schnittpunkt der Kurve mit der y-Axe liegt im Unendlichen; denn der Koeffizient des Gliedes y^3 ist $= 0$.

Um die Schnittpunkte der Kurve mit der unendlich fernen Geraden zu bestimmen, machen wir die Gleichung mit z homogen, setzen dann $z = 0$ und erhalten

$$U_3 = (x^2 + y^2)\, x = 0;$$

$$1. \quad x = 0;$$

$$2. \quad y = \pm i x.$$

Wir finden somit, dass die Kurve durch die unendlich fernen imaginären Kreispunkte der Ebene geht und dass sie in der Richtung der y-Axe eine reelle Asymptote hat. Die Gleichung dieser reellen Asymptote lautet, wie aus der Kurvengleichung leicht zu ersehen ist,

$$x = b; \tag{4}$$

denn bestimmen wir die Schnittpunkte der Geraden $x = b$ mit der Kurve, so erhalten wir in y nur eine Gleichung ersten Grades, nämlich

$$y = \frac{4c^2 - b^2}{4c}, \text{ Punkt } T;$$

folglich schneidet die Gerade $x = b$ im Endlichen die Kurve nur in einem Punkt. Die übrigen zwei Schnittpunkte müssen, da die Koeffizienten von y^2 und $y^3 = 0$ sind, im Unendlichen liegen.

Wir lösen die Gleichung nach y auf und erhalten

$$y = \frac{bc \pm \sqrt{c^2(2x-b)^2 + (b-x)\,[4x^2(x-b) + b^2 x]}}{2(b-x)},$$

vereinfacht

$$y = \frac{bc \pm (2x-b)\sqrt{c^2 + bx - x^2}}{2(b-x)}.$$

Aus diesem Ausdruck für y resultiert, dass die Kurve nicht symmetrisch zur x-Axe liegt. Die Kurve ist überhaupt, vom Spezialfall $c = 0$ abgesehen, keine symmetrische Kurve; sie kann durch keine Transformation symmetrisch gemacht werden.

So lange $c^2 + bx - x^2$ positiv ist, erhalten wir für y zwei reelle und verschiedene Werte. Für einen negativen Radikanden wird y imaginär. Für den Grenzfall verschwindet der Wurzelausdruck; die beiden Werte von y fallen zusammen, und die Ordinate wird zur Tangente an die Kurve, wenn

$$c^2 + bx - x^2 = 0, \text{ woraus}$$

$$x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + 4c^2}}{2};$$

für das positive Zeichen erhalten wir die Tangente WZ. Ordinate im Berührungspunkt Z:

$$y = -\frac{b(b + \sqrt{b^2 + 4c^2})}{4c} = \text{neg.}$$

Für das neg. Zeichen im Ausdruck für x bekommen wir die Tangente UV. Ordinate im Berührungspunkt V:

$$y = \frac{b(\sqrt{b^2 + 4c^2} - b)}{4c} = \text{pos.}$$

$$\left.\begin{array}{l} x > \dfrac{b + \sqrt{b^2 + 4c^2}}{2} \\ x < \dfrac{b - \sqrt{b^2 + 4c^2}}{2} \end{array}\right\}, \text{ so wird } y \text{ imaginär.}$$

Der absteigende Ast der Kurve, welcher die Asymptote $x = b$ im Punkt T schneidet, kehrt dieser die konkave Seite zu. Es muss daher die Kurve unterhalb des Berührungspunktes Z der äussersten Tangente W Z einen *Wendepunkt* besitzen, von dem aus sie der Asymptote wieder die konvexe Seite zuwendet.

Die Kurve hat in E einen Doppelpunkt, was nicht nur aus der Konstruktion folgt, sondern auch analytisch ersichtlich wird, wenn wir den Nullpunkt nach E verschieben vermittelst der Transformationsformeln

$$x = x' + \frac{b}{2}.$$

$$y = y' + c.$$

Die Gleichung der Kurve nach der Transformation lautet:

$$(x'^2 + y'^2)\,x' + \frac{b}{2}(x'^2 - y'^2) + 2cx'y' = 0. \tag{5}$$

Der Nullpunkt ist nun Doppelpunkt; denn die Gleichung beginnt mit Gliedern zweiten Grades.

Für die Tangenten im Doppelpunkt erhalten wir die Gleichung

$$y' = \frac{2c \pm \sqrt{b^2 + 4c^2}}{b} x'. \qquad (6)$$

Die beiden Tangenten stehen senkrecht aufeinander; denn es ist

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}.$$

Unsere Kurve ist eine *rationale* Kurve; denn sie besitzt einen Doppelpunkt, also das mögliche Maximum. Wir können daher die Koordinaten eines Punktes als rationale Funktionen eines Parameters λ darstellen. Wählen wir trigonometrische Funktionen als Parameter, so erhalten wir, wenn wir Gleichung (5) zu Grunde legen,

$$\left.\begin{aligned} x' &= -\left(c \sin 2\varphi + \frac{b}{2} \cos 2\varphi\right); \\ y' &= -\left(c \sin 2\varphi + \frac{b}{2} \cos 2\varphi\right) \operatorname{tg} \varphi. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

φ bedeutet den Winkel, den der Leitstrahl mit der positiven x-Axe bildet.

Wir wollen nun untersuchen, welche Modifikationen die Kurve erleidet, wenn wir c variieren lassen.

1. $c = \frac{b}{2}$.

Die Gleichung (2) bekommt die Form

$$(x^2 + y^2)(x - b) + \frac{b^2}{2} y = 0. \qquad (8)$$

Die Kurve schneidet sowohl die x-Axe als auch die Asymptote $x = b$ im Punkte $A(b, 0)$.

Die x-Axe ist, wie schon oben erwähnt, im Nullpunkt Tangente.

Die Gleichung nach y aufgelöst, ergiebt

$$y = \frac{b^2 \pm (2x - b)\sqrt{b^2 + 4bx - 4x^2}}{4(b - x)}.$$

y wird reell, wenn x zwischen $\frac{b}{2}(1 - \sqrt{2})$ und $\frac{b}{2}(1 + \sqrt{2})$ variiert.

$x = \frac{b}{2}(1 - \sqrt{2})$ ist Tangente im Punkt V,

und $x = \frac{b}{2}(1 + \sqrt{2})$ ist Tangente im Punkt Z.

Der Doppelpunkt E rückt in den Grundkreis. Wird E zum Nullpunkt des Koordinatensystems gewählt, so erhalten wir, wenn wir in (5) $c=\frac{b}{2}$ setzen, als Gleichung der Kurve:

$$(x'^2+y'^2)\,x'+\frac{b}{2}(x'^2+2x'y'-y'^2)=0. \tag{9}$$

Die Gleichung der Doppelpunktstangenten lautet

$$y'=(1\pm\sqrt{2})\,x'. \tag{10}$$

Gleichung (7) nimmt die Form an

$$\left.\begin{aligned} x'&=-\frac{b}{2}\sqrt{2}\cos\left(2\varphi-\frac{\pi}{4}\right);\\ y'&=-\frac{b}{2}\sqrt{2}\cos\left(2\varphi-\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{tg}\varphi. \end{aligned}\right| \tag{11}$$

2. $c=0$.

Die Gleichung der Kurve lautet

$$(x^2+y^2)(x-b)+\frac{b^2x}{4}=0. \tag{12}$$

Wir verlegen den Koordinatenursprung in den Doppelpunkt E und erhalten als Kurvengleichung, wenn wir in (5) $c=0$ setzen

$$(x'^2+y'^2)\,x'+\frac{b}{2}(x'^2-y'^2)=0. \tag{13}$$

Dies ist die Gleichung der *Strophoide*. Es ist der einzige Spezialfall, in welchem die Kurve, wie schon angedeutet, symmetrisch wird. Der Wendepunkt rückt ins Unendliche hinaus und fällt in die Asymptote. Letztere ist ja wie bekannt eine Wendetangente.

3. $c=\infty$.

Der Doppelpunkt liegt im Unendlichen in der Richtung der y-Axe. Die Kurve selber besteht aus der y-Axe und der doppelt gelegten unendlich fernen Geraden.

4. $c=$ negativ.

Setzen wir für c negative Werte ein, so erhalten wir der Reihe nach dieselben Kurven wie für positive c; nur sind dieselben immer Spiegelbilder der erstern in Bezug auf die x-Axe. Die Kurven für positive und negative c liegen daher paarweise symmetrisch zur x-Axe. Alle besitzen die gemeinschaftliche Asymptote $x=b$.

d. Die Lösungen der Konstruktionsaufgabe.

Wir suchen die Punkte D, die Fusspunkte der Schenkelhöhe. Dieselben sind, wie wir schon gezeigt haben, die Schnittpunkte des Grundkreises mit der Kurve. Ein Kreis schneidet eine Kurve dritter Ordnung in 6 Punkten. Da nun beide Kurven durch den Nullpunkt und durch die imaginären Kreispunkte der Ebene gehen, so fallen von vorneherein 3 Schnittpunkte ausser Betracht. Es bleiben also noch 3 Schnittpunkte zu bestimmen übrig. Als Gleichung der Kurve haben wir

$$(x^2+y^2)(x-b)-x\left(c^2-\frac{b^2}{4}\right)+bcy=0 \qquad (\alpha)$$

und als Gleichung des Kreises

$$x^2-bx+y^2=0. \qquad (\beta)$$

Wir lösen Gleichung (β) nach y auf und erhalten

$$y=\sqrt{bx-x^2}.$$

Diesen Wert setzen wir in (α) ein; es giebt

$$bx(x-b)-x\left(c^2-\frac{b^2}{4}\right)=-bc\sqrt{bx-x^2}.$$

Quadriert, auf Null gebracht und den Faktor x wegdividiert

$$x^3-\frac{3b^2+4c^2}{2b}x^2+\frac{9b^4+40b^2c^2+16c^4}{16b^2}x-bc^2=0.$$

Die Wurzeln dieser kubischen Gleichung sind die Abscissen der Schnittpunkte D. Als Diskriminante der Gleichung erhalten wir den Ausdruck:

$$\Delta=\frac{c^2}{108\cdot 64\,b^4}(-27\,b^8+288\,b^6c^2-992\,b^4c^4+1024\,b^2c^6+256\,c^8).$$

Δ = positiv; die Gleichung besitzt eine reelle und zwei imaginäre Wurzeln.

$\Delta = 0$; alle drei Wurzeln sind reell und zwei fallen zusammen.

Δ = negativ; drei reelle und unter sich verschiedene Wurzeln.

Wir behandeln zuerst den mittlern Fall und untersuchen, für welche Werte von c die Diskriminante verschwindet. Wir setzen:

$4c^2=\xi$ und $b^2=\eta$ und führen diese Werte im Ausdruck für Δ ein. Bestimmen wir hierauf die Wurzeln der Gleichung $\Delta=0$, so finden wir, dass sich die Diskriminante folgendermassen in Faktoren zerlegen lässt:

$$\Delta = \frac{c^2}{108 \cdot 64 b^4} (4c^2 - b^2)^2 (16c^4 + 72 b^2 c^2 - 27 b^4).$$

Es wird somit $\Delta = 0$, wenn

1. $c = 0$;
2. $c = \frac{b}{2}$;
3. $c = \frac{b}{2} \sqrt{6\sqrt{3} - 9}$.

In Bezug auf die Löungen unserer Aufgabe können wir folgende drei Hauptfälle unterscheiden:

$$\text{A.} \quad c > \frac{b}{2}.$$

Für sämtliche Dreiecke, die sich als Lösung ergeben, gilt die Relation

$$h_b + n = c.$$

$$\text{B.} \quad c = \frac{b}{2}.$$

Die Dreiecke entsprechen der Bedingung

$$h_b \pm n = \pm c = \pm \frac{b}{2}.$$

Von den beiden Grössen h_b und n ist die eine $= 0$.

$$\text{C.} \quad c < \frac{b}{2}.$$

Für die Dreiecke gilt $h_b - n = \pm c$.

$$\text{A.} \quad c > \frac{b}{2}.$$

$$1. \quad c > \frac{b}{2} \sqrt{6\sqrt{3} - 9}.$$

Die Diskriminante ist positiv; wir erhalten nur eine reelle Wurzel als Abscisse, d. h. der Grundkreis schneidet die Kurve nur in einem reellen Punkt. Dieser Schnittpunkt liefert ein *spitzwinkliges Dreieck.*

$$2. \quad c = \frac{b}{2} \sqrt{6\sqrt{3} - 9}. \qquad \text{Taf. I, Fig. 3.}$$

Die Diskriminante verschwindet. Es giebt 3 reelle Wurzeln, wovon 2 zusammenfallen. Grundkreis und Kurve schneiden sich in D_1' und berühren sich in D_2'. Es ist nun

$$Q = \frac{27\,b^6 - 324\,b^4\,c^2 + 720\,b^2\,c^4 + 64\,c^6}{864\,b^3};$$

Für x_1 bekommen wir demnach den Ausdruck

$$x_1 = \frac{3\,b^2 + 4\,c^2}{6\,b} + 2\sqrt[3]{-\frac{Q}{2}} \quad \text{oder}$$

$$x_1 = \frac{3\,b^2 + b^2(6\sqrt{3} - 9)}{6\,b} - b\,(2 - \sqrt{3}) = (2\sqrt{3} - 3)\,b,$$

wenn wir für c obigen Wert einsetzen.

$$x_2 = x_3 = \frac{3\,b^2 + b^2(6\sqrt{3} - 9)}{6\,b} + \frac{b}{2}(2 - \sqrt{3}) = \frac{b}{2}\sqrt{3}.$$

Setzen wir diese Werte in der Kreisgleichung ein, so erhalten wir

$$y_1 = b\sqrt{14\sqrt{3} - 24};$$

$$y_2 = y_3 = \frac{b}{2}\sqrt{2\sqrt{3} - 3}.$$

Dem Schnittpunkt $D_1'(x_1 y_1)$ entspricht das *spitzwinklige Dreieck* OAB_1' und dem Berührungspunkt $D_2'(x_2 y_2)$ das doppelt gelegte *stumpfwinklige Dreieck* OAB_2'.

Um zu untersuchen, ob letzteres Dreieck eine besondere Eigenschaft besitze, wie zu vermuten ist, berechnen wir zunächst seine Basishöhe.

Wir können die Proportion aufstellen:

$$h_b : \frac{b}{2}\sqrt{2\sqrt{3} - 3} = \frac{b}{2} : \frac{b}{2}\sqrt{3};$$

$$h_b = \frac{b}{6}\sqrt{6\sqrt{3} - 9}.$$

Nun ist $h_b + n = c = \frac{b}{2}\sqrt{6\sqrt{3} - 9}$; folglich ist

$$h_b = \frac{c}{3} = \frac{n}{2}.$$

Das Dreieck besitzt also die Eigentümlichkeit, dass der äussere Schenkelabschnitt n das Doppelte der Basishöhe beträgt. Für seine Fläche erhalten wir den Ausdruck

$$F_{OAB_2'} = \frac{b}{12}\sqrt{6\sqrt{3} - 9}. \tag{14}$$

Die Basishöhe des spitzwinkligen Dreiecks $OAB_1{}'$ lässt sich aus der Proportion berechnen

$$h_b : b\sqrt{14\sqrt{3}-24} = \frac{b}{2} : (2\sqrt{3}-3)\,b,$$

woraus

$$h_b = \frac{b}{3}\sqrt{42\sqrt{3}-72} + \frac{b}{2}\sqrt{14\sqrt{3}-24} = 0{,}53728\cdots b.$$

Es wird demnach

$$F_{OAB_1{}'} = 0{,}26864\cdots b^2. \tag{15}$$

3. $\frac{b}{2}\sqrt{6\sqrt{3}-9} > c > \frac{b}{2}$.

Die Diskriminante ist negativ. Wir erhalten 3 reelle und unter sich verschiedene Wurzeln, daher auch 3 reelle Schnittpunkte D und 3 reelle Lösungen. Der Schnittpunkt des aufsteigenden Kurvenastes erzeugt *ein spitzwinkliges Dreieck*, in welchem $h_b + n = c$. Die zwei Schnittpunkte des absteigenden Astes liefern *zwei stumpfwinklige Dreiecke*.

Im ersten ist $h_b > n$, $c =$ pos.
Im zweiten ist $h_b < n$, $c =$ neg.

B. $c = \frac{b}{2}$.

Der Grundkreis schneidet die Kurve im Doppelpunkt $E\left(\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right)$ und im Punkt $A(b, 0)$. In E fallen 2 Schnittpunkte zusammen, was der Fall sein muss, da die Diskriminante $\Delta = 0$ wird. Dieser Spezialfall liefert 3 reelle Lösungen:

1. Ein *doppelt gelegtes rechtwinkliges Dreieck*, für welches $n = 0$ wird und $h_b = \frac{b}{2}$.
2. Ein *unendlich kleines, auf die Basis reduziertes Dreieck* OCA, weil der Fusspunkt der Schenkelhöhe auf A, also in die Basis fällt, wodurch die Höhe $h_b = 0$ werden muss.

C. $c < \frac{b}{2}$; Taf. I, Fig. 3.

Die Lösungen sind dieselben wie in Fall A_3 mit dem Unterschied, dass das zweite stumpfwinklige Dreieck seine Spitze nach unten kehrt.

Ist speziell $c = 0$, so verschwindet die Diskriminante. Die Kurve ist die Strophoide. Wir bekommen 3 Schnittpunkte, von denen zwei D_1 und D_2 symmetrisch zur x-Axe liegen. Der Schnittpunkt D_3 und damit der Fusspunkt der Schenkelhöhe des bedingten Dreiecks fällt in den Nullpunkt. Der Schenkel muss somit senkrecht auf der Basis stehen. Wir erhalten *ein unendlich grosses Dreieck,* in welchem $h_b = n = \infty$ ist.

Die Schnittpunkte $D_1\left(\frac{3b}{4}, \frac{b}{4}\sqrt{3}\right)$ und $D_2\left(\frac{3b}{4}, -\frac{b}{4}\sqrt{3}\right)$ erzeugen *2 kongruente,* symmetrisch zur x-Axe gelegene *stumpfwinklige Dreiecke* OAB. Im $\triangle\, OAB$ ist $h_b = n = \frac{s}{2}$; somit ist

$$\sin\alpha = \frac{1}{2}$$
$$\alpha = 30^{0}.$$

Der Basiswinkel misst also 30^0.

Aus der Proportion

$$h_b : \frac{b}{4}\sqrt{3} = \frac{b}{2} : \frac{3b}{4}$$

finden wir

$$h_b = \frac{b}{6}\sqrt{3};$$

somit wird

$$F_{OAB} = F_{OAB_1} = \frac{b^2}{12}\sqrt{3}. \tag{16}$$

Für negative c gewinnen wir keine neuen Lösungen. Die Dreiecke werden einfach in Bezug auf die x-Axe Spiegelbilder derjenigen, die wir für positive c erhalten haben.

§ 4. *Zweites Lösungsverfahren. Bestimmung der Spitze B des gleichschenkligen Dreiecks.*

Es gelten natürlich auch hier die Voraussetzungen des § 2.

a) Konstruktion der Hilfskurve.

Es sei (siehe Figur 5, Taf. I) $OA = b$ die gegebene Basis. Wir ziehen durch C die Mittelsenkrechte MM_1 dazu und tragen auf derselben von C aus $h_b \pm n = c$ ab und erhalten den festen Punkt E. Über OA schlagen wir ferner den Grundkreis. Nun ziehen wir durch O Strahlen, die den Grundkreis in Q schneiden. Für jeden Strahl bestimmen wir nach den Gesetzen des gleichschenkligen Dreiecks einen Punkt P so, dass

$$PQ = PE.$$

Die Verbindungslinie aller Punkte P ist die gesuchte Kurve. Sie ist also der geometrische Ort eines Strahlpunktes, der vom Schnittpunkt Q des Strahls mit dem Grundkreis und einem festen Punkt E der Mittelsenkrechten gleichen Abstand hat. Die Schnittpunkte der Kurve mit der Mittelsenkrechten, also mit der Geraden $x = \frac{b}{2}$ sind die gesuchten Dreiecksspitzen B; denn

$$EB = BQ = n \quad \text{nach Konstruktion;}$$
$$BC = h_b; \text{ also}$$
$$h_b + n = BC + BE = CE = c \text{ nach Voraussetzung.}$$

Liegt der Schnittpunkt B der Kurve mit der Mittelsenkrechten zwischen C und E, so gilt beim Dreieck die Relation

$$h_b + n = c.$$

Fällt B auf E, so haben wir

$$h_b \pm n = c.$$

Liegt endlich B ausserhalb E, so gilt

$$h_b - n = c.$$

b) Ableitung der Kurvengleichuug.

Zu diesem Zweck legen wir das rechtwinklige Koordinatensystem so, dass der Punkt O zum Nullpunkt und die Basis OA samt deren Verlängerung zur positiven x-Axe wird. Die Koordinaten des Punktes P seien x und y. Es ist nun

$$OQ + QP = \sqrt{x^2 + y^2}; \qquad (\alpha)$$

$$\left.\begin{aligned} OQ &= b\cos\varphi; \\ QP = PE &= \sqrt{\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + (c-y)^2}; \end{aligned}\right\} \text{sub. in } (\alpha);$$

wir erhalten

$$b\cos\varphi + \sqrt{\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + (c-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$\frac{bx}{\sqrt{x^2+y^2}} + \sqrt{\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + (c-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2};$$

quadriert man noch und bringt auf Null, so ist das Resultat

$$(x^2 + y^2)(bx - 2cy) + \left(c^2 - \frac{3b^2}{4}\right)x^2 + \left(c^2 + \frac{b^2}{4}\right)y^2 = 0. \quad (17)$$

c) Diskussion der Kurve.

Die Kurve hat im Nullpunkt einen Doppelpunkt; denn die Gleichung beginnt mit Gliedern 2. Grades. Als *Gleichung der Tangenten im Nullpunkt* erhalten wir

$$y = \pm x \sqrt{\frac{3 b^2 - 4 c^2}{b^2 + 4 c^2}}. \tag{18}$$

Spezialwerte: 1. Für $c = 0$ wird

$$y = \pm x \sqrt{3}.$$

Die Doppelpunktstangenten bilden mit der x-Axe Winkel von $\pm 60^0$.

2. Für $c = \frac{b}{2}$ wird

$$y = \pm x.$$

Die beiden Tangenten bilden mit der x-Axe Winkel von $\pm 45^0$.

3. Für $c = \frac{b}{2} \sqrt{3}$ wird

$y = 0$, d. h. die beiden Doppelpunktstangenten fallen zusammen; die x-Axe wird Rückkehrtangente und der Nullpunkt Spitze.

4. Für $c > \frac{b}{2} \sqrt{3}$ wird $y =$ imaginär, d. h. der Doppelpunkt wird zum isolierten Punkt.

Wir setzen $y = 0$ und erhalten die Schnittpunkte der Kurve mit der x-Axe

$$b x^3 + \left(c^2 - \frac{3 b^2}{4}\right) x^2 = 0;$$

$$x_1 = x_2 = 0;$$

$$x_3 = \frac{3 b^2 - 4 c^2}{4 b}.$$

Die 3. Abscisse bleibt positiv, so lange $c \lesseqgtr \frac{b}{2} \sqrt{3}$. Sie wird also negativ, wenn der Doppelpunkt isolierter Punkt wird.

$x = 0$ gesetzt, ergiebt die Schnittpunkte mit der y-Axe:

$$- 2 c y^3 + \left(c^2 + \frac{b^2}{4}\right) y^2 = 0;$$

$$y_1 = y_2 = 0;$$

$$y_3 = \frac{b^2 + 4 c^2}{8 c}.$$

Die dritte Ordinate hat das Vorzeichen von c.

Wir machen die Gleichung mit z homogen, setzen dann $z = 0$ und erhalten

$$U_n = U_3 = (x^2 + y^2)(bx - 2cy) = 0;$$

daraus folgt:

$$1.\quad y = \frac{bx}{2c};$$

$$2.\quad y = \pm ix.$$

Wir erhalten somit eine reelle und 2 imaginäre Asymptotenrichtungen. Die Kurve geht durch die imaginären Kreispunkte der Ebene.

Die reelle Asymptotenrichtung lässt sich konstruktiv leicht bestimmen. Wir errichten über O E als Durchmesser einen Kreis, welcher durch C gehen muss und den Grundkreis in Q schneidet. Die Verbindungsgerade O Q ist die gesuchte Asymptotenrichtung. Ist φ der Richtungswinkel derselben, so ist zu beweisen, dass

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{p}{b/2} = \frac{b}{2c}; \text{ siehe Fig. 2.} \qquad (\alpha)$$

Nach dem Sehnensatz ist im Kreis über O E:

$$p(c - p) = rv$$

und im Grundkreis:

$$\left(\frac{b}{2} + p\right)\left(\frac{b}{2} - p\right) = rv; \text{ folglich}$$

$$cp - p^2 = \frac{b^2}{4} - p^2, \text{ woraus}$$

$$p = \frac{b^2}{4c}.$$

Setzen wir diesen Wert in (α) ein, so wird

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b^2}{4c} : \frac{b}{2} = \frac{b}{2c}.$$

Die reelle Asymptotenrichtung ist identisch mit dem Strahl, für welchen der Punkt P ins Unendliche fällt; dies geschieht, wenn

$$EQ \perp \text{Strahl } OQ.$$

Die Gleichung der Asymptote selbst wird

$$bx - 2cy + \frac{(b^2 - 4c^2)^2}{4(b^2 + 4c^2)} = 0;$$

$$y = \frac{b}{2c}x + \frac{(b^2 - 4c^2)^2}{8c(b^2 + 4c^2)}. \qquad (19)$$

Die Asymptote schneidet die y-Axe bei positivem c auf der positiven, bei negativem c auf der negativen Seite. Um sie zu konstruieren, bestimmen wir zuerst den Abschnitt auf der y-Axe. Ist der Schnittpunkt mit der y-Axe gefunden, so zieht man durch denselben eine Parallele zu OQ' (siehe Fig. 5, Taf. I). Der Abschnitt auf der y-Axe ist konstruktiv leicht zu gewinnen, wenn wir dem konstanten Glied in der Asymptotengleichung die Form geben:

$$\frac{(b^2-4c^2)^2}{8c(b^2+4c^2)} = \frac{1}{8c}\cdot\left(\frac{b^2-4c^2}{\sqrt{b^2+4c^2}}\right)^2.$$

Spezialwerte: 1. Für $c = 0$ nimmt die Gleichung der Asymptote die Form an

$$x = -\frac{b}{4}.$$

Die Asymptote steht senkrecht auf der x-Axe.

2. $c = \frac{b}{2}$;

Asymptote: $y = x$.

Sie geht in diesem Spezialfall durch den Nullpunkt und bildet mit der x-Axe einen Winkel von 45°.

3. $c = \frac{b}{2}\sqrt{3}$;

Asymptote: $y = \frac{1}{3}x\sqrt{3} + \frac{b}{12}\sqrt{3}.$

Die Asymptote bildet mit der x-Axe einen Winkel von 30°.

4. $c = \infty$; dann wird auch $y = \infty$, d. h. die Asymptote verläuft parallel der x-Axe im Unendlichen.

Durchläuft c alle Werte von 0 bis ∞, so dreht sich die Asymptote um 90° von der Richtung der y-Axe zur Richtung der x-Axe.

So lange der Nullpunkt Doppelpunkt oder Rückkehrpunkt ist, besitzt die Kurve *einen reellen Wendepunkt.* Sie hat deren *drei,* wenn der Nullpunkt isolierter Punkt wird.

Wir weisen noch darauf hin, dass die Kurve ebenfalls *rational* ist.

Wir betrachten nun noch die verschiedenen Kurven, die einem veränderlichen c entsprechen; ihre Doppelpunktstangenten haben wir bereits untersucht.

Ist $c > \frac{b}{2}\sqrt{3}$, so wird der Nullpunkt isolierter Punkt.

Ist $c < \frac{b}{2}\sqrt{3}$, » » » » Doppelpunkt.

Ist $c = \frac{b}{2}\sqrt{3}$, » » » » Rückkehrpunkt.

Im letztern Fall wird die Gleichung der Kurve:

$$(x^2+y^2)(x-\sqrt{3}\,y)+b\,y^2=0 \tag{20}$$

$y=0$ ist, wie wir schon gesehen haben, Rückkehrtangente.

Wenn $c = \frac{b}{2}$, so lautet die Kurvengleichung:

$$(x^2+y^2)(x-y)-\frac{b}{2}(x^2-y^2)=0$$

oder

$$\left[x^2+y^2-\frac{b}{2}(x+y)\right](x-y)=0; \tag{21}$$

daraus folgt:

1. $y=x$;
2. $x^2+y^2-\frac{b}{2}x-\frac{b}{2}y=0$.

Die Kurve zerfällt also in einen Kreis und in eine Gerade, welche diametral den Kreis schneidet. Die Gerade ist zugleich noch Asymptote der Kurve.

Die Kreisgleichung in der Normalform lautet:

$$\left(x-\frac{b}{4}\right)^2+\left(y-\frac{b}{4}\right)^2=\frac{b^2}{8}.$$

Die Koordinaten des Kreismittelpunktes G sind somit $\left(\frac{b}{4}, \frac{b}{4}\right)$. Der Punkt G fällt also in die Gerade $y=x$ und liegt in der Mitte zwischen O und E. Der Radius des Kreises ist $r=\frac{b}{4}\sqrt{2}$.

Wenn $c=0$, so heisst die Gleichung der Kurve:

$$(x^2+y^2)x-\frac{b}{4}(3x^2-y^2)=0. \tag{22}$$

Die Kurve gleicht der Strophoide. Ihre Asymptote $x = -\frac{b}{4}$ ist ebenfalls Wendetangente. Von der eigentlichen Strophoide weicht sie darin ab, dass ihre Doppelpunktstangenten nicht senkrecht aufeinander stehen; siehe Fig. 5.

Für negative c bekommen wir die gleichen Kurven wie für positive c. Nur sind sie wieder Spiegelbilder der letztern in Bezug auf die x-Axe. Durchläuft daher C alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$, so liegen die entstehenden Kurven paarweise symmetrisch zur x-Axe. Die Grenzkurve, für welche $c = 0$, steht zwischen den Paaren.

Kurven-Schema:

1. $c = \infty$.	Die Kurve besteht aus dem Nullpunkt O und der zur x-Axe parallelen unendlich fernen Geraden.
2. $c > \frac{b}{2}\sqrt{3}$.	Der Nullpunkt ist solierter Punkt, 3 reelle Wendepunkte, Asymptotenrichtungswinkel $< 30^0$.
3. $c = \frac{b}{2}\sqrt{3}$.	Nullpunkt ist Spitze, ein reeller Wendepunkt, Asymptotenrichtungswinkel $= 30^0$; siehe Fig. 5.
4. $c < \frac{b}{2}\sqrt{3}$.	Nullpunkt ist Doppelpunkt, ein reeller Wendepunkt, Asymptotenrichtungswinkel $> 30^0$.
aa) $c > \frac{b}{2}\sqrt{6\sqrt{3}-9}$.	Schleife reicht nicht bis an die Mittelsenkrechte.
bb) $c = \frac{b}{2}\sqrt{6\sqrt{3}-9}$.	Schleife berührt die Mittelsenkrechte.
cc) $\frac{b}{2}\sqrt{6\sqrt{3}-9} > c > \frac{b}{2}$.	Schleife schneidet die Mittelsenkrechte. Beide Schnittpunkte liegen oberhalb der Basis OA.
dd) $c = \frac{b}{2}$.	Kurve zerfällt in einen Kreis und in eine Gerade, welche mit der Asymptote zusammenfällt. Die Asymptote bildet mit der x-Axe einen Winkel von 45^0.

ee) $\frac{b}{2} > c > 0.$ Wie cc, nur liegt ein Schnittpunkt unterhalb der Basis. Asymptotenrichtungswinkel zwischen 45° und 90°.

ff) $c = 0.$ Kurve eine Art von Strophoide, liegt symmetrisch zur x-Axe. Asymptotenrichtungswinkel=90°.

d) Die Lösungen der Konstruktionsaufgabe.

Wir haben die Schnittpunkte B der Mittelsenkrechten mit der Kurve zu bestimmen. Wir bekommen im Maximum 3 Schnittpunkte, also auch 3 Lösungen. Führen wir den Wert für x aus der Gleichung der Mittelsenkrechten $x = \frac{b}{2}$ in der Kurvengleichung (17) ein, so erhalten wir

$$\left(\frac{b^2}{4} + y^2\right)\left(\frac{b^2}{2} - 2cy\right) + \left(c^2 - \frac{3b^2}{4}\right)\frac{b^2}{4} + \left(c^2 + \frac{b^2}{4}\right)y^2 = 0,$$

reduziert:

$$y^3 - \frac{3b^2 + 4c^2}{8c}y^2 + \frac{b^2}{4}y + \frac{b^4 - 4b^2c^2}{32c} = 0. \qquad (23)$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind die Ordinaten der Schnittpunkte B.

Die Diskriminante Δ dieser kubischen Gleichung lautet

$$\Delta = \frac{b^2}{27 \cdot 64^2 c^4}(-27b^8 + 288b^6c^2 - 992b^4c^4 + 1024b^2c^6 + 256c^8).$$

$$= \frac{b^2}{27 \cdot 64^2 c^4}(4c^2 - b^2)^2(16c^4 + 72b^2c^2 - 27b^4).$$

Die Diskriminante verschwindet somit, wenn

1. $b = 0,$
2. $c = \frac{b}{2}$ und
3. $c = \frac{b}{2}\sqrt{6\sqrt{3} - 9}.$

Fall (1) $b = 0$ fällt ausser Betracht, da b nicht variieren soll. Die Diskriminante wird demnach für 2 Spezialwerte von c zu Null. Wir stossen somit auf das ganz gleiche Resultat wie beim ersten Lösungsverfahren. Nach beiden Verfahren bekommen wir zusammenfallende Schnittpunkte und Lösungen für die Werte $c = \frac{b}{2}$ und $c = \frac{b}{2}\sqrt{6\sqrt{3}-9}$. Allerdings verschwand die Diskriminante im ersten Fall auch für den Wert $c=0$ (siehe pag. 89); allein dort fielen bloss die Abscissen zweier Schnittpunkte zusammen, die Ordinaten nicht; diese differierten im Vorzeichen; daher gab es keinen Berührungspunkt. Im vorliegenden Fall, wo wir die Ordinaten der Schnittpunkte B der Kurve mit der Mittelsenkrechten suchen, kann daher für $c = 0$ Δ nicht $= 0$ werden.

Für $b = 0$ zerfällt überdies die Kurve in die reelle Gerade

$$y = \frac{c}{2}$$

und in die Geraden absoluter Richtung.

Was nun die Lösungen betrifft, so haben wir die nämlichen Hauptfälle mit denselben Unterfällen wie beim ersten Verfahren.

Ist $\Delta > 0$, wobei $c > \frac{b}{2}\sqrt{6\sqrt{3}-9}$ sein muss, so erhalten wir eine reelle Lösung.

Ist $\Delta < 0$, so giebt es 3 reelle und unter sich verschiedene Lösungen.

Wenn $\Delta = 0$ ist, was zweimal eintrifft, so fallen 2 von den 3 reellen Lösungen zusammen.

Wir verzichten auf eine ausführliche Darstellung der Lösungen. Wir wollen nur noch an einigen Spezialfällen zeigen, dass die beiden Verfahren in ihren Ergebnissen übereinstimmen.

$$A_2 \quad c = \frac{b}{2}\sqrt{6\sqrt{3}-9}.$$

Berechnen wir den zugehörigen Wert von y, so erhalten wir:

$$y_1 = \frac{3b^2 + b^2(6\sqrt{3}-9) + (2-\sqrt{3})\,12b^2}{12b\sqrt{6\sqrt{3}-9}}$$

$$= b\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)\sqrt{2\sqrt{3}+3} = 0{,}53728\cdots b$$

$$y_2 = y_3 = \frac{3b^2 + b^2(6\sqrt{3} - 9) + (2 - \sqrt{3})6b^2}{12b\sqrt{6\sqrt{3} - 9}}$$

$$= b\left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2}\right)\sqrt{2\sqrt{3} + 3}.$$

Nun ist $y_2 = y_3 = \frac{c}{3}$; denn

$$b\left(\sqrt{3} - \frac{3}{2}\right)\sqrt{2\sqrt{3} + 3} = \frac{b}{2}\sqrt{6\sqrt{3} - 9}.$$

Das spitzwinklige Dreieck hat also die Basishöhe $h_b = 0{,}53728\cdots b$ und das doppelt gelegte stumpfwinklige Dreieck die Basishöhe $h_b = \frac{c}{3}$; somit herrscht Übereinstimmung mit den Resultaten nach den ersten Verfahren (vergl. pag. 13)

B. $c = \frac{b}{2}$.

Wir bekommen als Ordinaten der Schnittpunkte B, d. h. als Basishöhe der entsprechenden Dreiecke, folgende Werte:

1. y_1 im $\triangle$ OAC $= \frac{4b^2}{12b} - \frac{b}{3} = 0$;

2. $y_2 = y_3$ für das doppelt gelegte rechtwinklige $\triangle$ OAE $=$ EC $= \frac{4b^2}{12b} + \frac{b}{6} = \frac{b}{2}$ (vergl. damit pag. 91).

C₂. $c = 0$; Taf. I, Fig. 5.

Wir gehen aus von der Gleichung (23), multiplizieren c im Nenner weg, setzen hierauf $c = 0$ und erhalten

$$-y^2 \cdot \frac{3b^2}{8} + \frac{b^4}{32} = 0$$

$$y = \pm \frac{b}{6}\sqrt{3}.$$

Der dritte Wert von y ist unendlich gross, da der Koeffizient von $y^3 = 0$ geworden ist. Wir bekommen daher auch hier für das unendlich grosse Dreieck die Basishöhe $h_b = \infty$ und für die 2 stumpfwinkligen Dreiecke OAB_1 und OAB_2 die Basishöhe $h_b = \pm \frac{b}{6}\sqrt{3}$ wie beim ersten Verfahren (siehe pag. 92).

II.

§ 5. *Zweite Aufgabe: Ein gleichschenkliges Dreieck zu konstruieren, wenn die Basis und die Summe oder Differenz aus Schenkel und dem an die Spitze angrenzenden Schenkelabschnitt gegeben sind.*

Gegeben: 1. b,

2. $s \pm n = \pm c =$ konstant.

Bedingungen:

1. $s + n \geqq \frac{b}{2}\sqrt{2}$,

2. $s - n \leqq \frac{b}{2}\sqrt{2} =$ pos.

Im rechtwinkligen Dreieck ist $n = 0$ und $s = \frac{b}{2}\sqrt{2}$. Wird das Dreieck spitzwinklig, so wachsen sowohl s als auch n; also muss $s + n > \frac{b}{2}\sqrt{2}$ sein. Für ein stumpfwinkliges Dreieck ziehen wir den Grundkreis und finden, dass $s + n > \frac{b}{2}\sqrt{2}$ wird nach dem Satz: In einem Kreise gehört zu einem grössern Bogen auch die grössere Sehne. $\frac{b}{2}\sqrt{2}$ ist somit das Minimum, das der Wert der Summe $s + n$ annehmen kann.

Was die 2. Bedingung betrifft, so erreicht die Differenz $s - n$ einen maximalen Wert beim rechtwinkligen Dreieck, wo

$$s - n = s - 0 = \frac{b}{2}\sqrt{2} \text{ ist.}$$

Bei einem spitzwinkligen Dreieck ist nämlich $s - n < \frac{b}{2}\sqrt{2}$ nach dem oben erwähnten Sehnensatz, und bei einem stumpfwinkligen Dreieck ist $\frac{b}{2}\sqrt{2}$ schon $>$ als s allein, umsomehr also $\frac{b}{2}\sqrt{2} > s - n$.

§ 6. *Erstes Lösungsverfahren. Bestimmung des Punktes D.*

a) Konstruktion der Hilfskurve. Taf. I, Fig. 4.

Mache OA gleich der gegebenen Basis b. Ziehe die Mittelsenkrechte MM_1. Schlage um O einen Hilfskreis, dessen Radius

$r = OH$ gleich der gegebenen Konstanten c ist. Ziehe durch O einen Strahl, welcher die Mittelsenkrechte in R und den Hilfskreis in H und H′ schneidet. Mache $RP = RH$

und $RP' = RH'$.

Dreht sich nun der Strahl OR um O, so beschreiben die Punkte P und P′ die Kurve. Die Schnittpunkte dieser Kurve mit dem Grundkreis liefern die gesuchten Fusspunkte D der Schenkelhöhe. Es ist nämlich $c = OH = OR + RH$. OR entspricht dem s; folglich muss $RH = RP$ den Schenkelabschnitt n bedeuten. Dieser Schenkelabschnitt erstreckt sich in Wirklichkeit nur von der Mittelsenkrechten bis zum Grundkreis. Wenn also der Kurvenpunkt P auf den Grundkreis fällt, so ist $RP = n$, $OR = s$, und wir haben eine Lösung der Aufgabe.

Schneidet der Strahl eines Kurvenpunktes P die Mittelsenkrechte innerhalb des Hilfskreises O, so genügt P der Bedingung $$OR + RP = s + n = OH = c.$$

Für Kurvenpunkte P, deren entsprechende Strahlen die Mittelsenkrechte ausserhalb des Hilfskreises O schneiden, gilt die Relation: $$OR - RP = s - n = OH = c.$$

Für alle Strahlen haben wir endlich noch Kurvenpunkte P′, welche der Relation entsprechen:
$$RP' - OR = n - s = OH' = c.$$

Weil in einem gleichschenkligen Dreieck der an die Spitze grenzende Schenkelabschnitt n niemals grösser, höchstens gleich s werden kann, so kommt natürlich der Fall $n - s = c$ für die Lösung unserer Aufgabe nicht in Betracht. Der Kurvenzweig, auf dem die Punkte P′ liegen, liefert daher keine Lösungen unserer Aufgabe.

b) Ableitung der Kurvengleichung.

Wir wählen wieder O zum Nullpunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystems und legen durch OA die positive x-Axe. Es seien x und y die Koordinaten eines Kurvenpunktes P, dessen Strahl den Richtungswinkel φ habe. Dann ist

$$y = OP \cdot \sin\varphi; \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (\alpha)$$

$$OP = OH - 2RP = c - 2RP;$$

somit $$y = (c - 2RP) \sin\varphi \cdots\cdots\cdots \quad (\beta)$$

Ziehe $PN \perp MM_1$, so ist

$$PN = \frac{b}{2} - x.$$

$$RP = \frac{PN}{\cos\varphi} = \frac{\frac{b}{2} - x}{\cos\varphi}, \text{ sub. in } (\beta);$$

wir erhalten $$y = \left(c - \frac{(\frac{b}{2} - x)2}{\cos\varphi}\right)\sin\varphi;$$

$$y = (c\cos\varphi - b + 2x)\frac{y}{x};$$

$$\frac{cx}{\sqrt{x^2 + y^2}} = b - x;$$

$$(x^2 + y^2)(b - x)^2 - c^2x^2 = 0 \quad \cdot \tag{1}$$

In Polarkoordinaten: $$r = \frac{b}{\cos\varphi} \mp c. \tag{1a}$$

Unsere Kurve ist somit die Konchoide des Nikomedes.

Die x-Axe ist Symmetrieaxe und die Asymptote $x = b = LA$ die Leitlinie.

$c > b$; der Nullpunkt ist Doppelpunkt;
$c = b$; » » » Spitze;
$c < b$; » » » isolierter Punkt.

Es bleibt nur noch nachzuweisen, dass nach der gewöhnlichen Definition der Nikomedischen Konchoide

$$PV = VP' = c \text{ ist.}$$

Nach Konstruktion ist

$$RP' - OR = c.$$

Nun ist $$OR = RV,$$

also $$RP' - RV = VP' = c. \tag{γ}$$

Ferner ist nach Konstruktion

$$OR + PR = c;$$

für OR kann man RV setzen; also ist

$$RV + RP = PV = c. \tag{δ}$$

Aus (γ) und (δ) folgt, dass

$$PV = P'V = c \text{ ist.}$$

Wir haben also die Nikomedische Konchoide nicht mit Hilfe der Leitlinie, sondern mit Hilfe der zwischen dem festen Punkt O und der Leitlinie gelegenen Mittelparallelen MM_1 und einem

Kreis konstruiert. Die Basis b des zu konstruierenden gleichschenkligen Dreieckes ist der Abstand des festen Punktes O von der Leitlinie AL.

c) Die Lösungen unserer Aufgabe.

Wir haben die Schnittpunkte D der Kurve mit dem Grundkreis zu bestimmen. Die Koordinaten der Punkte D sind die Wurzeln des Gleichungssystems:

1. $(x^2+y^2)(x-b)^2-c^2x^2=0$; Gleichung der Kurve.
2. $x^2-bx+y^2 \quad =0$; » des Grundkreises.

Aus (2) folgt $y=\sqrt{x(b-x)}$, sub. in (1); wir erhalten

$$bx(x-b)^2-c^2x^2=0,$$

oder

$$b(x-b)^2-c^2x=0. \tag{2}$$

Die Wurzeln dieser quadratischen Gleichung sind die Abscissen der Schnittpunkte D. Wir erhalten statt 8 Schnittpunkte nur zwei, weil beide Kurven durch die unendlich fernen imaginären Kreispunkte der Ebene gehen, weil ferner zwei Schnittpunkte in den Nullpunkt fallen und weil endlich y nur in der 2. Potenz vorkommt.

Gleichung (2) nach x aufgelöst giebt

$$x=\frac{2b^2+c^2\pm c\sqrt{4b^2+c^2}}{2b}.$$

Nun ist $y=\sqrt{x(b-x)}$;

x darf also höchstens $=b$ werden; sonst werden die Schnittpunkte imaginär. Dies folgt übrigens schon aus der Konstruktion. Wir können daher im Ausdruck für x, den Spezialfall $c=0$ ausgenommen, nur das negative Zeichen der Wurzel brauchen. Es wird somit der Ausdruck für die Abscisse von D

$$x=\frac{2b^2+c^2-c\sqrt{4b^2+c^2}}{2b}; \text{ dann wird} \tag{3}$$

$$y=\pm\frac{1}{2b}\sqrt{2c\left\{(b^2+c^2)\sqrt{4b^2+c^2}-(3b^2c+c^3)\right\}}. \tag{4}$$

Weil das Wurzelzeichen unter der Wurzel nur eindeutig genommen werden darf, so erhalten wir für y 2 Werte, die sich nur im Vorzeichen unterscheiden. Wir erhalten somit 2 reelle Schnittpunkte D, welche symmetrisch zur x-Axe liegen. Dies bedingt ferner als Lösungen 2 gleichschenklige Dreiecke, welche kongruent sind und eine symmetrische Lage zur gemeinsamen Basis b haben.

Bei variablem c erhalten wir folgende Hauptfälle unter den Lösungen:

$$\text{A.}\quad c > \frac{b}{2}\sqrt{2}.$$

Die Abscisse der Schnittpunkte D und D_1 ist $< \frac{b}{2}$. Die entstehenden Dreiecke sind somit spitzwinklig und genügen der Bedingung:

$$s + n = c.$$

1. Unterfall $c > \frac{3b}{2}$.

Der Dreieckswinkel an der Spitze bei B ist $< 60^0$. Ist speziell $c = \infty$, so fallen die Punkte D und D_1 zusammen in den Nullpunkt. Es entstehen 2 unendlich grosse Dreiecke.

2. Unterfall $c = \frac{3b}{2}$.

Es wird $x = \frac{b}{4}$ und $y = \pm \frac{b}{2}\sqrt{3}$.

Die Dreiecke sind gleichseitig.

3. Unterfall $\frac{3b}{2} > c > \frac{b}{2}\sqrt{2}$. Taf. I, Fig. 4.

Spitzwinklige Dreiecke, deren Winkel an der Spitze zwischen 60^0 und 90^0 liegt.

$$\text{B.}\quad c = \frac{b}{2}\sqrt{2} = \text{Grenzfall.}$$

Es wird $x = \frac{b}{2}$ und $y = \pm \frac{b}{2}$.

Die Dreiecke sind rechtwinklig und erfüllen die Bedingung:

$$s \pm n = c; \quad n = 0.$$

$$\text{C.}\quad c < \frac{b}{2}\sqrt{2}.$$

Es wird $x > \frac{b}{2}$; dies hat zur Folge, dass die Dreiecke stumpfwinklig werden. Für dieselben gilt die Relation:

$$s - n = c.$$

Wird speziell $c = 0$, so fallen die Schnittpunkte D und D^1 zusammen auf A (b, 0), und da jeder doppelt zu nehmen ist, so erhalten wir als Lösungen 4 unendlich kleine Dreiecke, die sich auf die Basis reduzieren.

§ 7. *Zweites Lösungsverfahren. Bestimmung der Punkte B.*

Es gelten die Voraussetzungen des § 5.

a) Konstruktion der Hilfskurve. (Ohne Figur.) Mache $OA =$ der gegeben Basis b. Ziehe den Grundkreis. Schlage ferner einen Hilfskreis um O, dessen Radius $r = OH = c$, der gegebenen Konstanten. Lege nun durch O einen Strahl, welcher den Grundkreis in Q und den Hilfskreis in H und H_1 schneidet. Halbiere die Strecken HQ und H_1Q in den Punkten P und P_1. Lassen wir den Strahl OQ um O sich drehen, so erzeugen die Punkte P und P_1 die gesuchte Kurve.

Es entspricht nun die Strecke OP, resp. OP_1 dem Schenkel s; folglich muss die Strecke PQ, resp. P_1Q dem Schenkelabschnitt n entsprechen, da n gleich dem Abstand des Schenkelendpunktes vom Grundkreis ist, gemessen auf dem zugehörigen Strahl.

Die Kurve ist der geometrische Ort eines Strahlpunktes, dessen Summe oder Differenz der Abstände vom Ursprung O und dem Grundkreis eine Konstante ist.

Da OP dem Schenkel s und P dem Endpunkt desselben entspricht, so haben wir in den Schnittpunkten der Kurve mit der Mittelsenkrechten die gesuchten Punkte B. Die innere Schleife liefert nur im Spezialfall $c = 0$ Schnittpunkte.

b) Abteilung der Kurvengleichung.

Wir erhalten, indem wir analog wie früher vorgehen, die

Gleichung: $$\left(x^2 + y^2 - \frac{b}{2}x\right)^2 - \frac{c^2}{4}(x^2 + y^2) = 0. \qquad (5)$$

Dies ist die Gleichung einer Kreiskonchoide.

$\frac{b}{2}$ ist der Durchmesser des erzeugenden festen Kreises und $\frac{c}{2}$ der konstante Abstand der Kurvenpunkte vom Grundkreis, gemessen auf den zugehörigen Strahlen. Die x-Axe ist Symmetrieaxe.

$c < b$; Nullpunkt ist Doppelpunkt,
$c = b$; » » Spitze,
die positive x-Axe ist Rückkehrtangente.

$c > b$; Nullpunkt ist isolierter Punkt.

In Polarkoordinaten lautet die Gleichung der Kurve:

$$r = \frac{b}{2} \cos \varphi \pm \frac{c}{2}. \tag{6}$$

c) Die Lösungen der Aufgabe.

Wir ziehen die Mittelsenkrechte, da es sich um deren Schnittpunkte B mit der Kurve handelt. Die Abscisse aller dieser Punkte ist $x = \frac{b}{2}$. Führt man diesen Wert für x in der Kurvengleichung (5) ein, so erhält man eine Gleichung in y, deren Wurzeln die Ordinaten der Schnittpunkte B, der Spitzen der gesuchten gleichschenkligen Dreiecke sind. Diese Gleichung lautet:

$$y^4 - \frac{c^2 y^2}{4} - \frac{b^2 c^2}{16} = 0.$$

Die Gleichung, zunächst nach y^2 aufgelöst, ergiebt

$$y^2 = \frac{c^2 \pm c\sqrt{4b^2 + c^2}}{8}.$$

Da y nicht imaginär werden darf, so ist nur das positive Zeichen der Wurzel zu gebrauchen mit Ausnahme des Spezialfalles $c = 0$; daraus folgt

$$y = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c^2 + c\sqrt{4b^2 + c^2}}{2}}. \tag{7}$$

Man erhält demnach 2 Schnittpunkte, welche symmetrisch zur x-Axe liegen. Dies bedingt als Lösungen im allgemeinen 2 kongruente symmetrisch zur Basis gelegene Dreiecke. Die Lösungen sind spitzwinklig, rechtwinklig oder stumpfwinklig, je nachdem

$$c \gtreqless \frac{b}{2}\sqrt{2} \text{ ist.}$$

Das zweite Lösungsverfahren führt zu denselben Ergebnissen wie das erste. (Vergleiche damit die Resultate auf pag. 106 und 107.) Wir verzichten darauf, die Übereinstimmung für Spezialfälle nachzuweisen. Wir erlauben uns nur noch, die allgemeine Formel für die Dreiecksfläche zu bringen. Es wird

$$F_{AOB} = \frac{b}{4} \sqrt{\frac{c^2 + c\sqrt{4b^2 + c^2}}{2}}. \qquad (8)$$

Speziell für $c = \frac{3b}{2}$ entsteht ein gleichseitiges Dreieck; es wird

$$F = \frac{b}{4} \sqrt{\frac{\frac{9b^2}{4} + \frac{3b}{2}\sqrt{4b^2 + \frac{9b^2}{4}}}{2}} = \frac{b^2}{4}\sqrt{3}.$$

III.

§ 8. *Dritte Aufgabe: Konstruktion eines gleichschenkligen Dreiecks, wenn die Basis und die Summe oder Differenz aus Schenkelhöhe und dem an die Spitze angrenzenden Schenkelabschnitt gegeben sind.*

Gegeben: 1. b;

2. $h_s \pm n = \pm c = \text{konstant}.$

Bedingungen: 1. $h_s + n \geqq \frac{b}{2}$;

2. $h_s - n \overline{\gtrless} + \frac{b}{2}\sqrt{2}.$

Die Summe $h_s + n$ wird ein Mimimum bei einem unendlich kleinen Dreieck; denn da ist $h_s = 0$ und $n = \frac{b}{2}$, also $h_s + n = \frac{b}{2}$.

Die Differenz $h_s - n$ erreicht das Maximum bei einem rechtwinkligen Dreieck, bei welchen $h_s = \frac{b}{2}\sqrt{2}$ und $n = 0$, also $h_s - n = \frac{b}{2}\sqrt{2}$.

§ 9. *Erstes Lösungsverfahren: Bestimmung der Spitze B des gleichschenkligen Dreiecks.*

a) Konstruktion der Hilfskurve.

Es sei (siehe Figur 6, Tafel II) OA die gegebene Basis b. Ziehe den Grundkreis. Schlage ferner um A einen Hilfskreis, dessen Radius $r = AH = c$ ist. Lege durch O einen Strahl, welcher den Grundkreis in Q schneidet. Fälle von A aus ein Lot auf diesen Strahl, das durch Q gehen muss und das den Hilfskreis in H und H_1 schneidet. Trage nun auf dem Strahl OQ von Q aus die Strecke QH nach der entgegengesetzten Seite von O, die Strecke QH_1 nach der gleichen Seite ab und erhalte so 2 Punkte P und P_1, so dass

$$AQ + QP = AQ + QH = AH = c$$
$$\text{und } QP_1 - QA = QH_1 - QA = AH_1 = c.$$

Lässt man den Strahl OQ um O sich drehen, so beschreiben die Punkte P und P_1 die gesuchte Kurve. Ziehen wir also in einem Kreise durch den einen Endpunkt O eines Durchmessers Strahlen, die den Kreis in Q schneiden, so ist unsere Kurve der geometrische Ort solcher Strahlpunkte, für die die Summe oder Differenz der Abstände des Punktes Q vom Kurvenpunkt P einerseits und andererseits vom andern Endpunkt A des Durchmessers eine Konstante ist.

Die Summe der Abstände entspricht der Relation:

$$h_s + n = c,$$

die Differenz dagegen der Bedingung:

$$h_s - n = \pm c.$$

Fällt ein Kurvenpunkt P auf die Mittelsenkrechte MM_1, so wird $QP = n$ und $QA = h_s$; folglich haben wir in den Schnittpunkten der Kurve mit der Mittelsenkrechten die gesuchten Punkte B, d. h. die Spitzen der gleichschenkligen Dreiecke.

b) Ableitung der Kurvengleichung.

Lage des rechtwinkligen Koordinatensystems wie früher. x und y seien die Koordinaten des Punktes P; dann ist

$$(OQ + QP)^2 = x^2 + y^2; \qquad (\alpha)$$

$$\left.\begin{aligned} OQ &= b\cos\varphi; \\ QP &= c - QA = c - b\sin\varphi, \end{aligned}\right\} \text{ sub. in } (\alpha);$$

wir erhalten

$$(b\cos\varphi + c - b\sin\varphi)^2 = x^2 + y^2;$$

$$\frac{bx}{\sqrt{x^2+y^2}} + c - \frac{by}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2};$$

$$[x^2 + y^2 + b(y - x)]^2 - c^2(x^2 + y^2) = 0. \qquad (1)$$

$$\text{Polargleichung: } r = b(\cos\varphi - \sin\varphi) \pm c. \qquad (2)$$

Gleichung (1) ist die Gleichung einer Kreiskonchoide, deren Symmetrieaxe mit der positiven x-Axe einen Winkel von -45^0 bildet.

$c < b\sqrt{2}$; der Nullpunkt ist Doppelpunkt;
$c = b\sqrt{2}$; » » » Spitze;
$c > b\sqrt{2}$; » » » isolierter Punkt.

Ist $c = 0$, so lautet die Kurvengleichung:

$$(x^2 + y^2 + by - bx)^2 = 0.$$

Die Kurve zerfällt in zwei aufeinanderfallende Kreise. Die Gleichung eines Kreises in Normalform heisst

$$\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{2}.$$

Die Mittelpunktskoordinaten sind $\left(\frac{b}{2}, -\frac{b}{2}\right)$, und der Radius des Kreises ist $r = \frac{b}{2}\sqrt{2}$.

Um die Gleichung der Kurve in normaler Form zu erhalten, führen wir eine negative Drehung der Axen um 45^0 aus. Es ergeben sich daher folgende Transformationsformeln:

1. $x = x' \cos\varphi + y' \sin\varphi$;
2. $y = - x' \sin\varphi + y' \cos\varphi$.

Weil $\sin\varphi = \cos\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, so erhalten wir

$$\left.\begin{array}{ll} 3. & y - x = - x'\sqrt{2}, \\ 4. & x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2, \end{array}\right\} \text{ sub in der Kurvengleichung (1);}$$

es resultiert:

$$(x'^2 + y'^2 - bx'\sqrt{2})^2 - c^2(x'^2 + y'^2) = 0. \qquad (4)$$

Der Durchmesser des erzeugenden festen Kreises ist also $b\sqrt{2}$. Ziehen wir durch O Strahlen, welche den festen Kreis in V schneiden, so liegen auf jedem Strahl zwei Kurvenpunkte U und W, welche von V den konstanten Abstand c haben.

c) Die Lösungen der Aufgabe.

Wir ziehen die Mittelsenkrechte $x = \frac{b}{2}$; denn ihre Schnittpunkte mit der Kurve liefern die Spitzen B der gesuchten gleichschenkligen Dreiecke. Alle diese Schnittpunkte haben die Abscisse $x = \frac{b}{2}$; es bleibt daher nur noch die Bestimmung der Ordinaten der Punkte B übrig. Zu diesem Zweck setzen wir den Wert für $x = \frac{b}{2}$ in der Kurvengleichung (1) ein und erhalten

$$\left(y^2 + by - \frac{b^2}{4}\right)^2 - c^2 y^2 - \frac{b^2 c^2}{4} = 0. \qquad (5)$$

Die Gleichung 4. Grades liefert 4 Wurzeln; somit erhalten wir 4 Schnittpunkte, was richtig ist, da eine Gerade eine Kurve 4. Ordnung in 4 Punkten schneiden kann.

Wir bringen (5) auf die Form

$$y^4 + 2by^3 + \frac{b^2 - 2c^2}{2} y^2 - \frac{b^3}{2} y + \frac{b^4 - 4b^2c^2}{16} = 0,$$

setzen $y = z - \frac{b}{2}$, setzen ein und erhalten

$$z^4 - (b^2 + c^2) z^2 + bc^2 z + \frac{b^4 - 2b^2c^2}{4} = 0. \qquad (\alpha)$$

Wir zerlegen die linke Seite in 2 Faktoren, wobei wir unbestimmte Koeffizienten anwenden, und setzen

$$(z^2 + pz + t)(z^2 - pz + u) = 0, \qquad (\beta)$$

führen die angedeutete Multiplikation aus, vergleichen die Koeffizienten von (α) und (β), leiten eine Gleichung in p ab, setzen $p^2 = v + \frac{2}{3}(b^2 + c^2)$ und erhalten schliesslich folgende kubische Hilfsgleichung:

$$v^3 - \frac{4b^4 - 4b^2c^2 + c^4}{3} v - \frac{16b^6 - 24b^4c^2 - 15b^2c^4 - 2c^6}{27} = 0. \qquad (6)$$

Die Diskriminante dieser Gleichung lautet:

$$\Delta = Q^2 - \frac{4P^3}{27} = \frac{b^2c^4}{27}(4c^6 + 3b^2c^4 + 48b^4c^2 - 32b^6).$$

Diese Diskriminante verschwindet für folgende Werte von c:

$$\left.\begin{aligned} &1.\quad c = 0 \\ &2.\quad c = \frac{b}{2}\sqrt{3\sqrt[3]{13 + 16\sqrt{2}} + 3\sqrt[3]{13 - 16\sqrt{2}} - 1} \\ &\qquad = 0{,}787996 \cdots\cdots b \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Demnach bekommen wir 3 Hauptfälle für unsere Lösungen:

A. $c > 0{,}787996 \cdots\cdots b$; $\Delta = \text{pos.}$

Die kubische Hilfsgleichung in v (6) besitzt eine reelle und zwei imaginäre Wurzeln; folglich werden bei der biquadratischen Gleichung (5) in y 2 Wurzeln reell und 2 Wurzeln imaginär. Wir erhalten zwei reelle, verschiedene Lösungen. Laut Konstruktion sind die Dreiecke spitzwinklig.

B. $c = 0{,}787996 \cdots\cdots b$; $\Delta = 0$.

Die kubische Hilfsgleichung hat 3 reelle Wurzeln, wovon 2 gleiche. In diesem Fall besitzt die biquadratische Gleichung 4 reelle Wurzeln, wovon auch 2 gleiche. Wir bekommen 4 reelle Lösungen, wovon 2 zusammenfallen. Die ungleichen Dreiecke sind laut Konstruktion spitzwinklig, die zwei gleichen stumpfwinklig.

C. $c < 0{,}787996 \cdots b$

$\varDelta =$ neg., wenn wir $c = 0$ ausschliessen.

Die Wurzeln der Gleichung (6) sind alle reell und positiv. Die Gleichung (5) hat folglich ebenfalls lauter reelle Wurzeln und damit unsere Aufgabe 4 wirkliche Lösungen.

Spezialfälle:

1. $c = \frac{b}{2}\sqrt{2}$.

Die Gleichung (6) bekommt die Form

$$v^3 - \frac{9}{12} b^4 v = 0; \text{ die Wurzeln sind}$$

$$v_1 = 0.$$

$$v_2 = \frac{b^2}{2}\sqrt{3}.$$

$$v_3 = -\frac{b^2}{2}\sqrt{3}.$$

Die Gleichung (β) lautet in diesem Fall

$$\left(z^2 + bz - \frac{b^2}{2}\right)(z^2 - bz + 0) = 0.$$

Subtrahieren wir von den Wurzeln dieser Gleichung $\frac{b}{2}$, so erhalten wir schliesslich folgende Werte für y:

1. $y_1 = \frac{b}{2}$, bedingt ein rechtwinkliges Dreieck.
2. $y_2 = -\frac{b}{2}$, » » » »
3. $y_3 = b\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} - 1\right)$, bedingt ein stumpfwinkliges Dreieck.
4. $y_4 = -b\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} + 1\right)$, » » spitzwinkliges »

2. $c = 0$; $\varDelta = 0$.

Gleichung (6) nimmt die Form an

$$v^3 - \frac{4b^4}{3}v - \frac{16b^6}{27} = 0.$$

Die Wurzeln sind:

$$v_1 = \frac{4}{3}b^2; \qquad v_2 = v_3 = -\frac{2}{3}b^2.$$

Gleichung (β) bekommt die Form

$$\left(z^2 + b\sqrt{2}\cdot z + \frac{b^2}{2}\right)\left(z^2 + b\sqrt{2}\cdot z + \frac{b^2}{2}\right) = 0.$$

Subtrahieren wir wieder von den Wurzeln dieser Gleichung $\frac{b}{2}$, so finden wir für y folgende Werte:

1. $y_1 = y_2 = \frac{b}{2}(\sqrt{2} - 1)$, bedingt ein doppeltgelegtes stumpfwinkliges Dreieck.

2. $y_3 = y_4 = -\frac{b}{2}(\sqrt{2} + 1)$, bedingt 2 zusammenfallende spitzwinklige Dreiecke.

Die Dreiecke, die wir für $c = 0$ erhalten haben, besitzen folgende zum teil schon aus der Konstruktion hervorgehende Eigenschaften:

1. In jedem der beiden Dreiecke ist die Schenkelhöhe h_s gleich dem äussern Schenkelabschnitt n.

2. Die Schenkelhöhe h_s des einen Dreiecks ist gleich dem innern Schenkelabschnitt m des andern und umgekehrt.

3. Die Basiswinkel dieser Dreiecke messen $22\,^1/_2{}^0$, resp. $67\,^1/_2{}^0$.

Satz (1) folgt aus der Konstruktion. Satz (2) soll analytisch bewiesen werden. Zu dem Zweck berechnen wir im spitzwinkligen Dreieck OAB die drei Grössen s, h_s und m. Wir finden:

1. $s = \frac{b}{2}\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$;

2. $h_s = \frac{b}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$;

3. $m = \frac{b}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}$.

Es muss nun im spitzwinkligen Dreieck das von den 3 Stücken b, h_s und m begrenzte Dreieck OAD_1 gleich dem stumpfwinkligen $\triangle$ OAB sein, vermehrt um das von den 3 Stücken s, h_s und n gebildete rechtwinklige $\triangle$ ABD; also $\triangle OAD_1 = \triangle OAB + \triangle ABD$, sofern Satz (2) bestehen soll. Wir schreiben für die Flächen dieser Dreiecke die halben Produkte aus Grundlinie und Höhe, multiplizieren das 2 im Nenner weg und erhalten:

$$\frac{b}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\cdot\frac{b}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}} = \frac{b^2}{2}(\sqrt{2}-1) + \left(\frac{b}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2$$

$$\frac{b^2}{4}\sqrt{2} = \frac{b^2}{4}\sqrt{2};$$ die Gleichung ist identisch richtig, somit unsere Behauptung bewiesen.

Die Wahrheit von Satz (3) kann trigonometrisch leicht dargethan werden.

Für die Flächeninhalte dieser zwei Dreiecke erhalten wir folgende Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} F_{OAB} &= \frac{b^2}{4}(\sqrt{2}-1) \\ F_{OAB_1} &= \frac{b^2}{4}(\sqrt{2}+1) \end{aligned}\right\}. \qquad (8)$$

3. $c = \frac{b}{2}$; siehe Figur 6, Tafel II.

Eine Lösung wird unendlich klein; denn die Gleichung (5) wird für $c = \frac{b}{2}$ und $y = 0$ erfüllt.

§ 10. *Zweites Lösungsverfahren. Bestimmung der Fusspunkte D der Schenkelhöhe.* Voraussetzungen wie in § 8.

a) Konstruktion der Hilfskurve.

Es sei (siehe Fig. 7, Taf. II) OA = b die gegebene Basis. Ziehe den Grundkreis und die Mittelsenkrechte MM_1. Schlage ferner um A einen Hilfskreis, dessen Radius r = AH = c ist. Ziehe nun durch O einen Strahl, welcher den Grundkreis in Q und die Mittelsenkrechte in R schneidet. Fälle von A aus ein Lot auf den Strahl, welches durch Q gehen muss und den Hilfskreis in H und H_1 schneidet. Jetzt trägt man auf dem Strahl OQ von R aus die Strecke QH nach der gleichen, die Strecke QH_1 nach der entgegengesetzten Seite von O ab, macht also

1. $RP_1 = QH$, so dass die Relation gilt
$RP_1 + AQ = QH + AQ = AH = c.$
2. $RP_2 = QH_1$, so dass die Bedingung erfüllt wird
$RP_2 - AQ = QH_1 - AQ = AH_1 = c.$

Der geometrische Ort aller Punkte P bei sich drehendem Strahl ist die Kurve. Die verschiedenen Punkte dieser Kurve genügen einer der Relationen $h_s \pm n = c$.

Fällt ein Kurvenpunkt P in den Grundkreis, so wird
$RP = BD = n$ und
$QA = DA = h_s$; wir haben eine Lösung der Aufgabe. Die Schnittpunkte der Kurve mit dem Grundkreis liefern die Fusspunkte D der Schenkelhöhe der gesuchten Dreiecke.

b) Ableitung der Kurvengleichung.

Es seien in Fig. 7, Taf. II x und y die rechtwinkligen Koordinaten des Kurvenpunktes P_2. Es besteht nun die Proportion:

$$OP_2 : OK = RP_2 : CK;$$

die bezüglichen Werte eingesetzt,

$$\sqrt{x^2+y^2} : x = RP_2 : \frac{2x-b}{2}; \tag{α}$$

$$RP_2 = c + AQ = c + b\sin\varphi, \text{ sub. in } (\alpha);$$

wir erhalten

$$\sqrt{x^2+y_2} : 2x = (c + b\sin\varphi) : (2x-b);$$

$$(x^2+y^2) : 2x = (c\sqrt{x^2+y^2} + by) : (2x-b);$$

$$[(x^2+y^2)(b-2x) + 2bxy]^2 - 4c^2x^2(x^2+y^2) = 0. \tag{9}$$

Polargleichung:

$$r = b\sin\varphi + \frac{b}{2\cos\varphi} \pm c. \tag{10}$$

c) Eigenschaften der Kurve.

Die Kurve ist von der 6. Ordnung. Sie besteht aus zwei unendlichen Ästen, von denen der eine eine Schleife mit Doppelpunkt in O besitzt. Der Nullpunkt ist 4facher Punkt; denn die Gleichung beginnt mit Gliedern 4. Grades.

Als *Gleichung der Tangenten im Nullpunkt* erhalten wir:

$$\frac{y^4}{x^4} + \frac{4y^3}{x^3} + \frac{6b^2-4c^2}{b^2} \cdot \frac{y^2}{x^2} + \frac{4y}{x} + \frac{b^2-4c^2}{b^2} = 0. \tag{11}$$

Wir können diese Gleichung nur für Spezialfälle auflösen.

1. $c = 0$.

Gleichung (11) bekommt die Form

$$\frac{y^4}{x^4} + \frac{4y^3}{x^3} + \frac{6y^2}{x^2} + \frac{4y}{x} + 1 = 0.$$

$$\left(\frac{y}{x} + 1\right)^4 = 0.$$

$y = -x$ ist 4fach gelegte Tangente im Nullpunkt.
Für $c = 0$ lautet nun die Kurvengleichung:

$$[(x^2 + y^2)(b - 2x) + 2bxy]^2 = 0. \qquad (12)$$

Die Kurve zerfällt somit in zwei zusammenfallende Kurven 3. Ordnung. Die Gleichung eines Astes lautet

$$(b - 2x)(x^2 + y^2) + 2bxy = 0. \qquad (12a)$$

Die Gerade $y = -x$ ist für jede der beiden Kurven 3. Ordnung Rückkehrtangente; denn setzen wir in Gleichung (12a) für y den Wert $-x$ ein, so erhalten wir:

$x^3 = 0$; der Nullpunkt ist also Spitze.

2. $c = \frac{b}{2}$.

Gleichung (11) nimmt die Form an

$$\frac{y^4}{x^4} + \frac{4y^3}{x^3} + \frac{5y^2}{x^2} + \frac{4y}{x} = 0. \qquad (\alpha)$$

$$\frac{y}{x} = 0;$$

die x-Axe ist Tangente.

Dividieren wir in (α) den Faktor $\frac{y}{x}$ weg, so bleibt

$$\frac{y^3}{x^3} + \frac{4y^2}{x^2} + \frac{5y}{x} + 4 = 0. \qquad (\beta)$$

Setze $\frac{y}{x} = w - \frac{4}{3}$.

Die transformierte Gleichung lautet:

$$w^3 - \frac{w}{3} + \frac{56}{27} = 0. \qquad (\gamma)$$

Die Diskriminante dieser Gleichung wird $\Delta =$ pos.; somit besitzt Gleichung (β) eine reelle und zwei imaginäre Wurzeln und Gleichung (α) im ganzen 2 reelle und 2 imaginäre Werte für $\frac{y}{x}$. Für $c = \frac{b}{2}$ sind also 2 Nullpunktstangenten der Kurve reell und 2 imaginär.

3. $c = b$.

Gleichung (11) erhält die Form

$$\frac{y^4}{x^4} + \frac{4y^3}{x^3} + \frac{2y^2}{x^2} + \frac{4y}{x} - 3 = 0. \tag{δ}$$

Die kubische Hilfsgleichung, die wir ableiten können, hat eine reelle und zwei imaginäre Wurzeln; folglich besitzt Gleichung (δ) 2 reelle und 2 imaginäre Wurzeln. Die Nullpunktstangenten sind wieder zur Hälfte reell und zur Hälfte imaginär.

Überhaupt hat die Kurve, wie schon die Konstruktion ergiebt, im Nullpunkt stets 2 reelle und 2 imaginäre Tangenten mit Ausnahme des Falles, da $c = 0$ ist.

Um die Schnittpunkte mit der y-Axe zu erhalten, setzen wir in der Kurvengleichung (9) $x = 0$ und erhalten

$$b^2 y^4 = 0;$$

somit schneidet die y-Axe die Kurve 4mal im Nullpunkt und, da die Koeffizienten von y^6 und $y^5 = 0$ sind, noch 2mal im Unendlichen.

Setzen wir $y = 0$, so bekommen wir die Abschnitte auf der x-Axe. Wir erhalten die Gleichung:

$$[x^2(b-2x)]^2 - 4c^2x^4 = 0.$$

1. $x^4 = 0$; $x = 0$ 4mal;

2. $(b - 2x)^2 = c^2$; $x = \frac{b}{2} \pm c$.

Die x-Axe schneidet die Kurve 6mal im Endlichen, worunter 4mal im Nullpunkt.

Zur Bestimmung der Asymptotenrichtungen machen wir die Kurvengleichung mit z homogen, setzen dann $z = 0$ und erhalten

$$4x^2(x^2 + y^2)^2 = 0;$$

1. $x = 0$ 2mal;

2. $y = \pm ix$ 2mal.

Die imaginären Kreispunkte der Ebene sind also Doppelpunkte der Kurve. Ferner haben wir in

$$x = \frac{b}{2} \tag{13}$$

2 zusammenfallende reelle Asymptoten. Um dies zu zeigen,

machen wir die Mittelsenkrechte $x = \frac{b}{2}$ zur y-Axe vermittelst der Transformationsformeln:

$$x = x' + \frac{b}{2},$$
$$y = y'.$$

Die Gleichung der Kurve wird:

$$\left[-2x'\left(x'^2 + bx' + \frac{b^2}{4} + y'^2\right) + 2by'\left(x' + \frac{b}{2}\right)\right]^2 - 4c^2\left(x'^2 + bx' + \frac{b^2}{4}\right)\left(x'^2 + bx' + \frac{b^2}{4} + y'^2\right) = 0. \quad (14)$$

Wir projizieren die unendlich fernen Punkte in der Richtung der y'-Axe auf die x'-Axe und setzen

$$y' = \frac{1}{y''}$$

und $$x' = \frac{x''}{y''}.$$

Wir erhalten, wenn wir noch die Gleichung mit y''^6 multiplizieren,

$$\left[-2x''\left(x''^2 + bx''y'' + \frac{b^2y''^2}{4} + 1\right) + 2by''\left(x'' + \frac{by''}{2}\right)\right]^2 - 4c^2y''^2\left(x''^2 + bx''y'' + \frac{b^2y''^2}{4}\right)\left(x''^2 + bx''y'' + \frac{b^2y''^2}{4} + 1\right) = 0. \quad (15)$$

Die Schnittpunkte mit der y''-Axe: Setze $x'' = 0$, erhalte

$$b^4y''^4 - b^2c^2y''^4\left(\frac{b^2}{4}y''^2 + 1\right) = 0,$$

woraus 1. $y''^4 = 0$; $y'' = 0$ 4mal.

2. $y'' = \pm\frac{2}{bc}\sqrt{b^2 - c^2}$. (ε)

Der Nullpunkt der projizierten Kurve ist Doppelpunkt, dessen Tangenten in $x'' = 0$ zusammenfallen, und da für $x'' = 0$ $y''^4 = 0$ wird, so ist derselbe und damit auch der unendlich ferne Punkt der Asymptote $x = \frac{b}{2}$ ein *Selbstberührungspunkt.* Die Kurve hat also im Unendlichen einen *Selbstberührungspunkt,* und die Mittelsenkrechte $x = \frac{b}{2}$ ist *Selbstberührungsasymptote.*

Aus (ε) folgt ferner, dass die Gerade $x = \frac{b}{2}$ die Kurve im Endlichen im allgemeinen in 2 Punkten schneidet, deren Ordinaten

$$y = \pm \frac{bc}{2}\sqrt{\frac{1}{b^2 - c^2}} \text{ sind.}$$

Die Schnittpunkte sind reell, wenn $c < b$,
imaginär, wenn $c > b$
und liegen im Unendlichen, wenn $c = b$.

Im letztern Fall ist der unendlich ferne Punkt der Kurve ein Selbstberührungspunkt, in welchem die Mittelsenkrechte als Asymptote die Kurve in 6 zusammenfallenden Punkten berührt, also Inflexionsknoten zugleich.

Unsere Kurve ist also rational; denn sie besitzt

einen 4fachen Punkt im Nullpunkt	=	6 Doppelpunkte,
einen Selbstberührungspunkt	=	2 »
2 Doppelpunkte in den imaginären Kreispunkten	=	2 »
also das Maximum von		10 Doppelpunkten.

Die Kurve hat, wie sich aus der Konstruktion ergiebt, *Wendepunkte* und zwar, wenn

1. $c \geqq b$ 2 WP im rechten Ast;
2. $b > c > 0$ 4 WP, nämlich 3 im rechten Ast und einen im obern linken Ast;
3. $c = 0$ 1 WP im aufsteigenden Ast der doppelt gelegten Kurve 3. Ordnung.

Für ein unendlich grosses c besteht die Kurve aus der doppelt gelegten y-Axe und der unendlich fernen Geraden (linker Ast) und aus der unendlich fernen Geraden samt dem Nullpunkt als isoliertem Punkt (rechter Ast), zusammen also aus der doppelt gelegten y-Axe, der doppelt gelegten unendlich fernen Geraden und dem Nullpunkt als isoliertem Punkt.

Negative c erzeugen die gleichen Kurven wie positive c, weil c quadratisch vorkommt.

d) Die Lösungen der Aufgabe.

Es handelt sich um die Schnittpunkte D der Kurve mit dem Grundkreis. Die Koordinaten dieser Punkte D sind die Wurzeln des Gleichungssystems:

$$\left.\begin{array}{ll} 1. & [(b-2x)(x^2+y^2)+2bxy]^2-4c^2x^2(x^2+y^2)=0, \text{ Kurve.} \\ 2. & x^2-bx+y^2=0, \text{ Grundkreis.} \end{array}\right\} (\alpha)$$

Da die Kurve von 6. Ordnung ist, so wird sie vom Kreis in 12 Punkten geschnitten. Von diesen Schnittpunkten absorbiert der Nullpunkt 4, da er ein 4facher Punkt der Kurve ist. Weitere 4 werden absorbiert durch die imaginären Kreispunkte der Ebene, welche der Kurve je doppelt angehören. Es bleiben somit 4 Schnittpunkte übrig; folglich kann unsere Aufgabe im Maximum 4 reelle Lösungen aufweisen. Wir erhalten mithin das gleiche Ergebnis wie beim ersten Lösungsverfahren. Wir wollen die Übereinstimmung in zwei Spezialfällen zeigen.

1. $c=0$, Taf. II, Fig. 7.

Das Gleichungssystem (α) heisst nun:

$$\left.\begin{array}{ll} 1. & (b-2x)(x^2+y^2)+2bxy=0 \\ 2. & x^2-bx+y^2=0 \end{array}\right\} (\beta)$$

Wir lösen (2) nach y auf, setzen den Wert in (1) ein und erhalten zur Bestimmung der Abscissen von D′ folgende Gleichung in x: $4b^2x^2(bx-x^2)=(b-2x)^2b^2x^2$, woraus

$$x=\frac{b}{4}(2\pm\sqrt{2}).$$

Für y erhalten wir den Ausdruck:

$$y=\pm\frac{b}{4}\sqrt{2}.$$

Da die Koordinaten doppelwertig auftreten, so müssen wir 2 Schnittpunkte haben. Den positiven Zeichen in den Wurzeln entspricht der eine, den negativen der andere. Die beiden Schnittpunkte sind somit

$$D'\left[\frac{b}{4}(2+\sqrt{2}), \frac{b}{4}\sqrt{2}\right] \text{ und } D_1'\left[\frac{b}{4}(2-\sqrt{2}), -\frac{b}{4}\sqrt{2}\right].$$

Jeder der beiden Schnittpunkte ist indes noch doppelt zu zählen, weil die Kurve 3. Ordnung doppelt gelegt ist.

Die Basishöhen der beiden Dreiecke werden aus der Proportion bestimmt:

$$\frac{b}{4}(2\pm\sqrt{2}) : \frac{b}{2} = \pm\frac{b}{4}\sqrt{2} : h_b;$$

$$h_{b1}=\frac{b}{2}(\sqrt{2}-1), \quad \triangle\ OAB^1;$$

$$h_{b2}=-\frac{b}{2}(\sqrt{2}+1), \quad \triangle\ OAB_1^1.$$

Diese Werte stimmen mit denjenigen auf pag. 114 vollständig überein.

2. $c = \frac{b}{2}\sqrt{2}$. Taf. II, Fig. 7.

Die Gleichung in x, deren Wurzeln die Abscissen der Schnittpunkte D sind, bekommt folgende Form

$$64x^4 - 128bx^3 + 84b^2x^2 - 20b^3x + b^4 = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind:

1. $x_1 = 0 + \frac{b}{2}$, 3. $x_3 = \frac{b}{4}\sqrt{3} + \frac{b}{2}$,

2. $x_2 = 0 + \frac{b}{2}$, 4. $x_4 = -\frac{b}{4}\sqrt{3} + \frac{b}{2}$;

dann wird

1. $y_1 = \frac{b}{2}$, 3. $y_3 = -\frac{b}{4}$,

2. $y_2 = -\frac{b}{2}$, 4. $y_4 = -\frac{b}{4}$.

Dies sind die Koordinaten der Schnittpunkte D.

Als Basishöhe für die 4 Lösungen erhalten wir:

1. $h_b = \frac{b}{2}$ für $\triangle$ OAB_1;

2. $h_b = -\frac{b}{2}$ » $\triangle$ OAB_3;

3. $h_b = b\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} - 1\right)$ für $\triangle$ OAB_2;

4. $h_b = -b\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} + 1\right)$ » $\triangle$ OAB_4.

Diese Werte stimmen vollständig überein mit denjenigen auf Seite 113.

IV.

§ 11. *Vierte Aufgabe: Konstruktion eines gleichschenkligen Dreieckes, wenn die Basis und die Summe oder Differenz der durch die Schenkelhöhe erzeugten Schenkelabschnitte gegeben sind.*

Gegeben: 1. b;

2. $m \pm n = \pm c =$ konstant.

Bedingungen: 1. $m+n \overline{\overline{>}} \frac{b}{2}\sqrt{2}$

2. $m-n \overline{\overline{<}} + \frac{b}{2}\sqrt{2}$.

Bei einem rechtwinkligen Dreieck wird $m+n=\frac{b}{2}\sqrt{2}$, und dies ist das Minimum. Wird das Dreieck spitzwinklig, so wird $m+n=s$ grösser als $\frac{b}{2}\sqrt{2}$, und wird es stumpfwinklig, so wird m allein schon grösser. Die Differenz $m-n$ erreicht in $\frac{b}{2}\sqrt{2}$ das Maximum beim rechtwinkligen Dreieck. Wird das Dreieck stumpfwinklig, so nimmt die Differenz $m-n$ an Wert ab bis zum Grenzwert $\frac{b}{2}$. Wird das Dreieck spitzwinklig, so nimmt die Differenz $m-n$ ab bis zu 0 (gleichseitiges Dreieck); dann wird sie negativ, resp. $n-m$ positiv bis zum Wert ∞.

§ 12. *Erstes Lösungsverfahren. Bestimmung der Punkte B.*

a) *Konstruktion der Hilfskurve* (ohne Figur).

Es sei $OA=b$ die gegebene Basis. Wir ziehen den Grundkreis und um O einen Hilfskreis mit der Konstanten c als Radius. Nun legen wir durch O einen Strahl, der den Grundkreis in Q und den Hilfskreis in H und H_1 schneidet. Die Strecken QH und QH_1 tragen wir von Q aus auf dem Strahl je nach der entgegengesetzten Seite hin ab und erhalten die 2 Punkte P_1 und P_2; für diese gilt:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ OQ+QP_1=OQ+QH=OH=c; \\ 2.\ QP_2-OQ=QH_1-OQ=OH_1=c. \end{array}\right\} \qquad (\alpha)$$

Der geometrische Ort aller Punkte P bei sich drehendem Strahl ist die gesuchte Kurve. Wir ziehen die Mittelsenkrechte MM_1. Fällt nun ein Kurvenpunkt in diese Gerade, so wird

$$QP=BD=n \quad \text{und} \quad QO=DO=m;$$

wir haben eine Lösung. Die Schnittpunkte der Kurve mit der Mittelsenkrechten sind somit die gesuchten Punkte B.

b) *Ableitung der Kurvengleichung.*

Addieren wir und subtrahieren wir die Gleichungen bei (α), so erhalten wir

$$1.\quad QP_1 + QP_2 = 2c;$$

oder

$$P_1P_2 = 2c; \tag{β}$$

$$2.\quad 2OQ + QP_1 - QP_2 = 0;$$

$$OQ = QP_2 - OQ - QP_1 = QP_2 - c;$$

$$2\,OQ = OP_2 - c. \tag{γ}$$

Ziehen wir nun um A einen Kreis mit dem Radius $r = b$, so wird dieser Kreis vom Strahl OP_2 in V so geschnitten, dass

$$OV = 2OQ = OP_2 - c.$$

Der Punkt V hat also von P_2 den Abstand c; da aber nach (β) $P_1P_2 = 2c$ ist, so muss V auch von P_1 den Abstand c haben. Es haben somit die Kurvenpunkte jedes Strahls gleichen und konstanten Abstand von einem festen Grundkreis. Unsere Kurve ist die *Kreiskonchoide.* Die Gleichung derselben lautet:

$$(x^2 + y^2 - 2bx)^2 - c^2(x^2 + y^2) = 0. \tag{1}$$

Die x-Axe ist Symmetrieaxe.

1. $c > 2b$; Nullpunkt ist isolierter Punkt;
2. $c = 2b$; » » Spitze, die positive x-Axe Rückkehrtangente;
3. $c < 2b$; » » Doppelpunkt.

Polargleichung:

$$r = 2b\cos\varphi \pm c. \tag{2}$$

c) Die Lösungen der Aufgabe.

Wir bestimmen die Schnittpunkte B. Die Abscisse derselben ist $x = \frac{b}{2}$. Diesen Wert setzen wir in der Kurvengleichung (1) ein und erhalten

$$\left(y^2 - \frac{3b^2}{4}\right)^2 - c^2\left(y^2 + \frac{b^2}{4}\right) = 0,$$

eine Gleichung in y, deren Wurzeln die Ordinaten der Schnittpunkte B und zugleich die Basishöhen der gesuchten Dreiecke sind. Diese Gleichung nach y aufgelöst, ergiebt

$$y = \pm\frac{1}{2}\sqrt{3b^2 + 2c^2 \pm 2c\sqrt{4b^2 + c^2}}. \tag{3}$$

Dieser Ausdruck liefert für y 4 reelle oder 2 reelle und 2 imaginäre Werte. Bei variablem c erhalten wir daher entweder 4 oder 2 reelle Lösungen, welche paarweise symmetrisch sind. Für den Grenzfall erhalten wir 4 reelle Wurzeln, wovon $2 = 0$ sind. Dieser Fall tritt ein, wenn

$$3b^2 + 2c^2 - 2c\sqrt{4b^2 + c^2} = 0, \text{ also}$$

$$c = \frac{3b}{2} \text{ ist.}$$

Die Inhaltsformel der Dreiecke lautet:

$$F = \frac{gh}{2} = \frac{b}{4}\sqrt{3b^2 + 2c^2 \pm 2c\sqrt{4b^2 + c^2}}. \qquad (4)$$

Gruppierung der Lösungen:

$$\text{A.} \quad c > \frac{3b}{2}.$$

Bei der innern Wurzel gilt nur das positive Zeichen. Wir erhalten daher nur 2 reelle Lösungen und zwar 2 spitzwinklige Dreiecke.

Für den Spezialfall $c = 2b$ wird die Basishöhe derselben

$$h_b = y = \pm \frac{b}{2}\sqrt{11 + 8\sqrt{2}}.$$

$$\text{B.} \quad c = \frac{3b}{2}.$$

Die Wurzeln von (3) sind:

$$y_1 = \frac{b}{2}\sqrt{15}; \quad y_2 = -\frac{b}{2}\sqrt{15}; \quad y_3 = y_4 = 0.$$

Wir erhalten:

1. 2 symmetrische, spitzwinklige Dreiecke, bei denen $s = 2b$, $m = \frac{b}{4}$, $n = \frac{7}{4}b$ und die also die Bedingung erfüllen: $n - m = c$;
2. 2 unendlich kleine, auf die Basis reduzierte Dreiecke, für welche $m = 2n$ und $m + n = c$ ist.

$$\text{C.} \quad c < \frac{3b}{2}.$$

$$1. \quad c = b.$$

Nach Gleichung (3) wird

$$y = \pm \frac{b}{2}\sqrt{5 \pm 2\sqrt{5}};$$

für das positive Zeichen unter der Wurzel giebt es 2 symmetrische spitzwinklige Dreiecke, für welche $s = \frac{b}{2}(1 + \sqrt{5})$ und der Basiswinkel $= 72^0$ ist. Für das negative Zeichen sind die Dreiecke stumpfwinklig; $s = \frac{b}{2}(\sqrt{5} - 1)$; der Basiswinkel misst 36^0.

$$2.\quad c = \frac{b}{2}\sqrt{2}.$$

Es wird $y = \pm \frac{b}{2}\sqrt{4 \pm 3}$.

Wir erhalten

1. 2 spitzwinklige Dreiecke mit den Grössen $s = 2c = b\sqrt{2}$, $m = \frac{b}{4}\sqrt{2}$ und $n = \frac{3b}{4}\sqrt{2}$;
2. 2 rechtwinklige Dreiecke.

$$3.\quad c = \frac{b}{2}.$$

Es wird $y = \pm \frac{b}{4}\sqrt{14 \pm 2\sqrt{17}}$;

4 spitzwinklige Dreiecke, paarweise symmetrisch.

Wird c noch kleiner als $\frac{b}{2}$, so nähern sich die ungleichen spitzwinkligen Dreiecke in der Grösse immer mehr und fallen endlich zusammen für

$$4.\quad c = 0;\quad y = \pm \frac{b}{2}\sqrt{3};$$

4 gleichseitige Dreiecke.

§ 13. *Zweites Lösungsverfahren. Bestimmung der Punkte D.*

a) Konstruktion der Hilfskurve. Taf. II. Fig. 8.

Es sei $OA = b$ die Basis des gleichschenkligen Dreieckes. Wir ziehen den Grundkreis, die Mittelsenkrechte MM_1 und endlich noch einen Hilfskreis um O mit dem Radius $r = c$. Durch O gehe nun ein Strahl, der den Grundkreis in Q, den Hilfskreis in H und H_1 und die Mittelsenkrechte in R schneidet. Auf diesem Strahl tragen wir nun von R aus die Strecken QH und QH_1 nach derselben Seite gegen O hin ab und erhalten die 2 Punkte P_1 und P_2. Der Punkt P_1 genügt der Relation $OQ - RP_1 = OQ - QH = OH = c$, und für P_2 gilt $RP_2 - OQ = QH_1 - OQ = OH_1 = c$. Der geometrische Ort aller Punkte P bei sich drehendem Strahl ist die Kurve. Ihre Schnittpunkte mit dem Grundkreis ergeben die gesuchten Fusspunkte D der Schenkelhöhe; denn fällt ein Kurvenpunkt P in den Grundkreis, so ist $QH = RP = BD = n$, und wir haben eine Lösung.

b) Ableitung der Kurvengleichung.

Es seien durch OA die Abscissenaxe und durch O die Ordinatenaxe gelegt. Sind x und y die rechtwinkligen Koordinaten eines Kurvenpunktes P_1, so kann man setzen, wenn $P_1 N \perp MM_1$ gezogen wird,

$$P_1 R = \sqrt{\overline{P_1 N}^2 + \overline{NR}^2}; \qquad (\alpha)$$

$$\left.\begin{aligned} P_1 R &= HQ = OQ - OH = b\cos\varphi - c, \\ P_1 N &= \frac{b}{2} - x, \\ NR &= RC - NC = \frac{by}{2x} - y. \end{aligned}\right\} \text{sub. in } (\alpha);$$

Es giebt

$$b\cos\varphi - c = \sqrt{\frac{(b-2x)^2}{4} + \frac{y^2(b-2x)^2}{4x^2}};$$

$$\left[(x^2+y^2)\left(\frac{b}{2} - x\right) - bx^2\right]^2 - c^2x^2(x^2+y^2) = 0. \qquad (5)$$

Polargleichung:

$$r = \frac{b}{2\cos\varphi} - b\cos\varphi \mp c. \qquad (6)$$

c) Diskussion der Kurvengleichung.

Die Kurve ist von der 6. Ordnung. Ihre Gleichung (5) beginnt mit Gliedern 4. Grades; folglich ist der Nullpunkt 4facher Punkt. Die Gleichung der *Nullpunktstangenten* lautet

$$y = \pm\frac{x}{b}\sqrt{\underbrace{b^2+2c^2}_{A} \pm \underbrace{2c\sqrt{2b^2+c^2}}_{B}}. \qquad (7)$$

Es ist nun

$$A^2 - B^2 = b^4 - 4b^2c^2 = b^2(b^2 - 4c^2).$$

So lange $b \gtreqless 2c$ ist, ist auch $A > B$, und wir erhalten 4 reelle Wurzeln für y, daher auch 4 reelle Tangenten. Ist $b < 2c$, so werden 2 Wurzeln und damit 2 Tangenten imaginär. Wir erhalten mithin 2 Hauptfälle für die Tangenten im Nullpunkt.

$$\text{A.} \quad c > \frac{b}{2}.$$

2 Tangenten sind reell, 2 imaginär. Der 4fache Punkt im Nullpunkt ist daher Doppelpunkt und konjugierter Punkt zugleich; folglich muss die Kurve 2 Äste haben, was die Konstruktion

auch bestätigt. Der eine Kurvenast geht durch den Nullpunkt, der andere nicht.

$$\text{B.}\quad c \leqq \frac{b}{2}.$$

4 reelle Tangenten; beide Kurvenzweige gehen durch den Nullpunkt.

$$1.\quad c = \frac{b}{2}, \text{ siehe Fig. 8, Taf. II.}$$

Nach Gleichung (7) wird

$$y_{1,2} = \pm x\sqrt{3};\ y_3 = y_4 = 0.$$

Die Tangenten des 1. Astes bilden mit der x-Axe Winkel von $\pm 60^0$; für den 2. Ast ist die x-Axe Rückkehrtangente und der Nullpunkt Spitze.

$$2.\quad \frac{b}{2} > c > 0.$$

4 reelle, unter sich verschiedene Tangenten; der Nullpunkt ist Doppelpunkt für beide Kurven-Äste.

$$3.\quad c = 0.$$

Wir erhalten $y = \pm x$ je 2mal.

Die beiden Äste fallen zusammen. Der Richtungswinkel der Tangenten $= \pm 45^0$. Die Kurve zerfällt in 2 zusammenfallende Kurven 3. Ordnung, deren Gleichung die Form besitzt:

$$(x^2 + y^2)\left(\frac{b}{2} - x\right) - b^2x^2 = 0$$

$$\text{oder}\qquad (x^2 + y^2)\,x - \frac{b}{2}(y^2 - x^2) = 0. \tag{8}$$

Diese Kurve ist die *Strophoide*. Die Achse ihrer Schleife ist gleich der halben Basis b.

Die Schnittpunkte mit der x-Axe: Setze $y = 0$, erhalte $[(b - 2x)x^2 - 2bx^2]^2 - 4c^2x^4 = 0;$

$$1.\quad x^4 = 0;\qquad 2.\quad x = -\frac{b}{2} \pm c.$$

Die Schnittpunkte mit der y-Axe: Setze $x = 0$, erhalte $y^4 = 0.$

4 Schnittpunkte fallen in den Nullpunkt, die andern 2 ins Unendliche; denn die Koeffizienten von y^5 und y^6 sind Null.

Da y nur im 2. und 4. Grad vorkommt, so erhalten wir, wenn wir die Gleichung nach y auflösen, einen Ausdruck von der Form

$$y = \pm \sqrt{A \pm \sqrt{B}},$$ d. h. jedem endlichen Wert von x entsprechen 4 Werte von y, die paarweise absolut gleich sind. Die Kurve liegt also symmetrisch zur x-Axe.

Um die Schnittpunkte der Kurve mit der unendlich fernen Geraden zu gewinnen, machen wir die Gleichung mit z homogen, setzen dann $z = 0$ und erhalten:

$$U_n = U_6 = 4x^2(x^4 + 2x^2y^2 + y^4) = 0;$$ daraus folgt

1. $x^2 = 0$,

2 reelle, mit der y-Axe zusammenfallende Asymptotenrichtungen.

2. $y = \pm ix$ je 2mal.

Die imaginären Kreispunkte der Ebene sind Doppelpunkte der Kurve.

$$\text{Die Gerade } x = \frac{b}{2} \tag{9}$$

ist *Selbstberührungsasymptote;* denn für $x = \frac{b}{2}$ werden 4 Werte von y unendlich gross. Transformieren wir die Gleichung vermittelst der Formeln

$$x = x' + \frac{b}{2} \text{ und } y = y',$$

projizieren nachher die unendlich ferne Gerade in der Richtung der y-Axe auf die x-Axe mit Hilfe der Formeln

$$x' = \frac{x''}{y''} \text{ und } y' = \frac{1}{y''},$$

so erhalten wir

$$\begin{aligned}\Bigg[-2x''\left(x''^2 + bx''y'' + \frac{b^2y''^2}{4} + 1\right) \\ -2b\left(x''^2y'' + bx''y''^2 + \frac{by''^3}{4}\right)\Bigg]^2 \\ -4c^2\left(x''^2y'' + bx''y''^2 + \frac{b^2y''^3}{4}\right)^2 \\ -4c^2\left(x''^2y'' + bx''y''^2 + \frac{b^2y''^3}{4}\right)y'' = 0. \quad (10)\end{aligned}$$

Der Nullpunkt der transformierten Kurve ist Doppelpunkt. Die Nullpunktstangenten, deren Gleichung

$$x''^2 = 0 \text{ ist,}$$

fallen zusammen, und da endlich für $x'' = 0$

$$y''^4 = 0 \text{ wird,}$$

so muss der Nullpunkt und damit auch der unendlich ferne Punkt der Kurve Selbstberührungspunkt und die Gerade $x = \frac{b}{2}$ Selbstberührungsasymptote sein. Im unendlich fernen Selbstberührungspunkt hangen die Kurvenäste zusammen.

Für $c = 0$ wird die Mittelsenkrechte doppelt gelegte Wendeasymptote.

Die Kurve ist *rational;* denn sie besitzt 10 Doppelpunkte, wovon 6 im Nullpunkt (4facher Punkt), 2 im Selbstberührungspunkt und 2 in den imaginären Kreispunkten der Ebene liegen.

Die Kurve hat im rechten Ast 4 *Wendepunkte*, so lange $c > \frac{b}{2}$ ist. Für $c \leqq \frac{b}{2}$ sinkt die Zahl derselben auf 2 herab. Für $c = 0$ speziell liegen die beiden vereinigt im Unendlichen. Dem rechten Kurvenast gehört jetzt nur noch einer an, da auch der linke Ast — wie der rechte zur Strophoide geworden — einen gewinnt.

Bei unendlich grossem c besteht die Kurve aus der doppelt gelegten y-Axe, der doppelt gelegten unendlich fernen Geraden und dem Nullpunkt als konjugiertem Punkt.

Negative c erzeugen dieselben Kurven wie positive, da c nur quadratisch vorkommt.

d) Die Lösungen der Aufgabe.

Wie schon erwähnt, handelt es sich um die Bestimmung der Schnittpunkte D. Die Koordinaten derselben sind die Wurzeln des Systems:

1. $[(b - 2x)(x^2 + y^2) - 2bx^2]^2 - 4c^2x^2(x^2 + y^2) = 0$, Kurve;
2. $x^2 - bx + y^2 = 0$, Grundkreis.

Wir lösen dieses System zunächst nach x auf und erhalten

$$x = \frac{2b^2 + c^2 \pm c\sqrt{4b^2 + c^2}}{8b} \tag{11}$$

als Ausdruck für die Abscisse des Punktes D.

Für die Ordinate finden wir

$$y = \pm \frac{\sqrt{2}}{8b} \sqrt{6b^4 - c^4 \pm (2b^2 - c^2)c\sqrt{4b^2 + c^2}}. \tag{12}$$

x und y sind die Koordinaten von D, d. h. vom Fusspunkt der Schenkelhöhe. Es besteht nun die Proportion:

$$h_b : y = \frac{b}{2} : x.$$

Quadrieren wir die Glieder dieser Proportion, setzen hierauf für x und y die Werte von (11) und (12) ein, reduzieren, so bekommen wir, wenn wir zum Schluss die Quadratwurzel ausziehen:

$$h_b = \pm \frac{1}{2} \sqrt{3b^2 + 2c^2 \pm 2c\sqrt{4b^2 + c^2}}. \tag{13}$$

Dieser Wert stimmt vollkommen mit dem überein, den wir nach dem ersten Verfahren gefunden haben (vergleiche Formel (3), pag. 142). Beide Verfahren führen somit zu den gleichen Resultaten. Es wird nicht mehr nötig sein, auf die Lösungen noch näher einzutreten. Wir erlauben uns noch folgende Bemerkungen:

Für jede Abscisse giebt es 2 symmetrische Ordinaten, daher auch 2 symmetrische Dreiecke. Für den Grenzfall $c = \frac{3b}{2}$ wird

1. $x_1 = b$, bedingt 2 unendlich kleine Dreiecke OAC.
2. $x_2 = \frac{b}{16}$, » 2 spitzwinklige Dreiecke.

Ist $c > \frac{3b}{2}$, so wird

1. $x_1 > b$, die entsprechenden Ordinaten werden imaginär, weil die Kurve den Kreis nicht mehr schneiden kann; also liefert dieser Wert von x keine reellen Lösungen mehr.
2. $x_2 < \frac{b}{16}$. Die entsprechenden Dreiecke werden umso spitzwinkliger, je kleiner x_2 ist.

Nimmt dagegen der Wert von c successive von $\frac{3b}{2}$ bis 0 ab, so nimmt x_1 ab im Werte von b bis $\frac{b}{4}$ und x_2 zu im Werte von $\frac{b}{16}$ bis $\frac{b}{4}$. Die dem x_1 entsprechenden Lösungen sind stumpfwinklig zunächst, werden für $c = \frac{b}{2}\sqrt{2}$ rechtwinklig und dann spitzwinklig. Die Dreiecke, die dem Wert von x_2 zugehören, werden immer weniger spitzwinklig. Für $c = 0$ ist $x_1 = x_2$ und die Dreiecke fallen als gleichseitige zusammen.

V.

§ 14. *Fünfte Aufgabe: Ein gleichschenkliges Dreieck zu konstruieren, von welchem die Basis und die Summe oder Differenz der beiden Dreieckshöhen gegeben sind.*

Gegeben: 1. b;

2. $h_b \pm h_s = \pm c =$ konstant.

Bedingung: $\infty \overline{\overline{>}} h_b + h_s \geqq 0$; $\infty \overline{\overline{>}} h_b - h_s \gtreqless 0$.

Für ein unendlich kleines Dreieck verschwinden beide Höhen, also Summe und Differenz $= 0$; für ein unendlich grosses Dreieck ist $h_b = \infty$ und $h_s = b$, somit Summe und Differenz $= \infty$. Die Differenz $h_b - h_s$ wird ein zweitesmal zu Null, wenn der Basiswinkel 60^0 misst. Ist er kleiner als 60^0, so ist $h_b - h_s$ = neg., ist er grösser als 60^0, so ist $h_b - h_s$ = pos.

§ 15. *Erstes Lösungsverfahren. Bestimmung der Punkte B.*

a) Konstruktion der Kurve. Taf. II, Fig. 9.

$OA = b$ sei die Basis des gleichschenkligen Dreiecks. Wir ziehen den Grundkreis und die Mittelsenkrechte MM_1. Auf MM_1 tragen wir c von C aus nach E ab. Es gehe durch O ein Strahl, der den Grundkreis in Q schneidet. Von E aus schlagen wir nun mit dem Radius $r = AQ$ einen Kreisbogen, der den Strahl OQ in P_1 und P_2 schneidet. Der geometrische Ort des Punktes P ist die Hilfskurve. Dieselbe kann daher folgendermassen definiert werden:

Zieht man durch O Strahlen, so ist die Kurve der geometrische Ort eines Strahlenpunktes, der von einem festen Punkt E der Mittelsenkrechten denselben Abstand hat wie der Strahl selber vom festen Punkt A. Fällt ein Kurvenpunkt in die Mittelsenkrechte, so ist

einerseits $EC \pm PE = h$;

andererseits ist $EC \pm PE = c \pm h_s$; folglich

$h_b = c \pm h_s$, d. h. wir haben eine Lösung vor uns. Die Schnittpunkte der Kurve mit der Mittelsenkrechten ergeben daher die gesuchten Punkte B.

b) Ableitung der Kurvengleichung.

Wir legen durch OA die x-Axe und durch O die y-Axe. x und y seien die rechtwinkligen Koordinaten eines Kurvenpunktes P_1. EN sei $\parallel$ AO gezogen; dann ist

$$EP_1 = \sqrt{\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + (y - c)^2}; \qquad (\alpha)$$

$EP_1 = AQ = b \sin\varphi$, in (α) eingesetzt, so giebt es

$$b \sin\varphi = \sqrt{\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + (y - c)^2}, \text{ umgeformt}$$

$$(x^2 + y^2)\left[\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + (y - c)^2\right] - b^2 y^2 = 0. \qquad (1)$$

c) Diskussion der Kurvengleichung.

Die Kurve ist von 4. Ordnung und hat im Nullpunkt einen Doppelpunkt. Die Gleichung der *Tangenten im Nullpunkt* lautet:

$$(x^2 + y^2)\left(\frac{b^2}{4} + c^2\right) - b^2 y^2 = 0;$$

$$y = \pm x \sqrt{\frac{b^2 + 4c^2}{3b^2 - 4c^2}}. \qquad (2)$$

Spezialfälle:

1. $c = 0$;

   $y = \pm \frac{x}{3}\sqrt{3}$; die Nullpunktstangenten bilden mit der x-Axe Winkel von $\pm\, 30^0$.

2. $c = \frac{b}{2}$;

   $y = \pm x$.

Richtungswinkel der Tangenten $= \pm\, 45^0$. Die Tangente $y = -x$ ist Wendetangente.

3. $c = \frac{b}{2}\sqrt{2}$;

   $y = \pm x\sqrt{3}$, Richtungswinkel $= \pm\, 60^0$.

4. $c = \frac{b}{2}\sqrt{3}$;

   $x = 0$ 2 mal.

Die y-Axe ist Rückkehrtangente und der Nullpunkt Spitze.

5. $c > \frac{b}{2}\sqrt{3}$.

Die Tangenten werden imaginär, und der Nullpunkt wird zum isolierten Punkt.

Schnittpunkte mit der y-Axe: Setze $x = 0$ und erhalte

$$1.\quad y_1 = y_2 = 0 \quad \text{und} \quad 2.\quad y_{3,4} = c \pm \frac{b}{2}\sqrt{3}.$$

Schnittpunkte mit der x-Axe: Setze $y = 0$ und finde

$$1.\quad x_1 = x_2 = 0 \quad \text{und} \quad 2.\quad x_{3,4} = \frac{b}{2} \pm ci.$$

So lange c von 0 verschieden ist, schneidet die Kurve die x-Axe nur im Doppelpunkt O. Ist $c = 0$, so werden auch die beiden andern Schnittpunkte reell und fallen in den Punkt C, welcher Doppelpunkt der Kurve wird.

Die imaginären Kreispunkte der Ebene sind Doppelpunkte der Kurve; denn es ist

$$U_n = (x^2 + y^2)^2.$$

Reelle Punkte hat die Kurve im Unendlichen nicht, daher auch keine Asymptoten.

Die Kurve ist *rational;* denn sie hat 3 Doppelpunkte. Für $c = 0$ besitzt sie 4 Doppelpunkte und zerfällt, wie wir noch sehen werden.

Für $c = 0$ nimmt Gleichung (1) die Form an:

$$(x^2 + y^2)\left[\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + y^2\right] - b^2 y^2 = 0;$$

das Gleichungspolynom lässt sich in 2 Faktoren zerlegen; wir erhalten:

$$\left(x^2 + y^2 - \frac{bx}{2} + \frac{by}{2}\sqrt{3}\right)\left(x^2 + y^2 - \frac{bx}{2} - \frac{by}{2}\sqrt{3}\right) = 0; \qquad (3)$$

daraus folgt

$$\left.\begin{aligned} &1.\quad x^2 + y^2 - \frac{bx}{2} - \frac{by}{2}\sqrt{3} = 0 \\ &\text{oder}\quad \left(x - \frac{b}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{4}\sqrt{3}\right)^2 = \frac{b^2}{4}, \qquad (\beta) \\ \text{und}\quad &2.\quad \left(x - \frac{b}{4}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{4}\sqrt{3}\right)^2 = \frac{b^2}{4}. \qquad (\gamma) \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Die Kurve zerfällt in 2 Kreise (β) und (γ), deren Mittelpunktskoordinaten: $\left(\frac{b}{4}, \frac{b}{4}\sqrt{3}\right)$ und $\left(\frac{b}{4}, -\frac{b}{4}\sqrt{3}\right)$ sind.

Beide Kreise haben den Radius $r = \frac{b}{2}$. Beide Kreise schneiden sich in O und C.

Für ein unendlich grosses c besteht die Kurve aus der doppelt gelegten unendlich fernen Geraden und dem Nullpunkt als isoliertem Punkt.

Negative c erzeugen die gleichen Kurven wie positive c; nur liegen die Gebilde symmetrisch zueinander.

d) Die Lösungen.

Wir suchen die Spitzen B der gleichschenkligen Dreiecke. Alle haben die Abscisse $x = \frac{b}{2}$. Setzen wir diesen Wert in der Kurvengleichung (1) ein, so erhalten wir

$$\left(y^2 + \frac{b^2}{4}\right)(y^2 - 2cy + c^2) - b^2y^2 = 0. \tag{5}$$

Die Wurzeln dieser Gleichung in y sind die Ordinaten der Schnittpunkte B. Lösen wir (5) auf, so finden wir zunächst folgende kubische Hilfsgleichung:

$$v^3 - \frac{9b^4 - 24b^2c^2 + 16c^4}{48} v + \frac{27b^6 - 972b^4c^2 + 144b^2c^4 - 64c^6}{864} = 0.$$

Die Diskriminante letzterer Gleichung lautet

$$\Delta = \frac{b^4c^2(64c^6 - 144b^2c^4 + 540b^4c^2 - 27b^6)}{432}.$$

Es ist nun $\Delta = 0$, wenn

$$\left.\begin{array}{ll} 1. & c = 0, \\ 2. & c = \pm \frac{b}{2}\sqrt{3(1 + \sqrt[3]{4} - 2\sqrt[3]{2})}. \end{array}\right\} \tag{6}$$

Wir bekommen daher folgende Hauptfälle:

$$\text{A.} \quad c > \frac{b}{2}\sqrt{3(1 + \sqrt[3]{4} - 2\sqrt[3]{2})}.$$

Die Diskriminante der kubischen Hilfsgleichung ist positiv; die biquadratische Gleichung (5) besitzt folglich 2 reelle Wurzeln, und wir erhalten 2 reelle Lösungen.

$$1. \quad c > \frac{b}{2}(1 + \sqrt{2}).$$

Beide Dreiecke sind nach Konstruktion spitzwinklig. Das kleinere davon ist gleichseitig, wenn speziell $c = b\sqrt{3}$.

$$2. \quad c = \frac{b}{2}(1 + \sqrt{2}).$$

Für diesen Wert von c wird Gleichung (5) erfüllt, wenn wir für y den Wert $\frac{b}{2}$ einsetzen. Folglich haben wir hier unter den beiden Dreiecken ein rechtwinkliges.

$$3. \quad c < \frac{b}{2}(1 + \sqrt{2}).$$

Ein Dreieck wird stumpfwinklig; das andere bleibt spitzwinklig.

$$\text{B.} \quad c = \frac{b}{2}\sqrt{3(1 + \sqrt[3]{4} - 2\sqrt[3]{2})}; \quad \Delta = 0.$$

4 reelle Lösungen, wovon 2 zusammenfallen. Die Kurve berührt die Mittelsenkrechte MM_1. Ein Dreieck ist spitzwinklig, die 3 andern stumpfwinklig, worunter 2 zusammenfallende.

$$\text{C.} \quad c < \frac{b}{2}\sqrt{3(1 + \sqrt[3]{4} - 2\sqrt[3]{2}}.$$

Die Diskriminante ist negativ; daher erhalten wir 4 reelle Lösungen. So lange c von 0 verschieden ist, sind sämtliche Dreiecke ungleich, und zwar sind 2 derselben stumpfwinklig, eines spitzwinklig und das vierte stumpfwinklig, rechtwinklig oder spitzwinklig, je nachdem $c \gtreqless \frac{b}{2}(\sqrt{2} - 1)$ ist. Taf. II, Fig. 9.

Für $c = 0$ werden die 2 stumpfwinkligen Dreiecke unendlich klein, d. h. sie reduzieren sich auf die Basis. Die 2 spitzwinkligen werden gleichseitig.

§ 16. *Zweites Lösungsverfahren. Bestimmung der Fusspunkte D der Schenkelhöhen.* Die Voraussetzungen sind dieselben wie in § 14.

a) Konstruktion der Kurve. Taf. III, Fig. 10.

Es sei $OA = b$ die Basis des Dreiecks. Wir ziehen den Grundkreis und die Mittelsenkrechte und machen auf der letztern $CE = c =$ konstant. Nun ziehen wir durch O einen Strahl, welcher den Grundkreis in Q und die Mittelsenkrechte in R schneidet. Wir verbinden A mit Q und tragen auf dieser Verbindungslinie die Strecke RE von A aus nach beiden Seiten ab, so dass $AP_1 = AP_2 = RE$ ist.

Der geometrische Ort aller Punkte P ist die Kurve. Fällt ein Kurvenpunkt in den Grundkreis, so ist

$$1.\quad RE = AP = AQ = h_s,$$
$$2.\quad RE = c \mp h_b; \text{ folglich}$$

$c \mp h_b = h_s$ oder $c = h_s \pm h_b$; wir haben also eine Lösung vor uns. Die Schnittpunkte der Kurve mit dem Grundkreis müssen daher die Fusspunkte D der Schenkelhöhen der gesuchten Dreiecke sein.

b) Ableitung der Kurvengleichung.

Wir legen das rechtwinklige Koordinatensystem in gewohnter Weise. Sind x und y die Koordinaten eines Kurvenpunktes P_1, so gilt

$$AP_1 = \sqrt{(b-x)^2 + y^2}. \qquad (\alpha)$$

Nun ist $AP_1 = c - CR.$ $\qquad (\beta)$

$$\text{Ferner ist } \operatorname{tg}\varphi = \frac{RC}{OC} = \operatorname{cotg}(90^0 - \varphi) = \frac{b-x}{y}, \text{ somit}$$

$$RC = \frac{(b-x)b}{2y}, \text{ eingesetzt in } (\beta) \text{ ergiebt}$$

$$AP_1 = \frac{2cy - (b-x)b}{2y}, \text{ eingesetzt in } (\alpha) \text{ führt}$$

zur Kurvengleichung:

$$4y^2[(b-x)^2 + y^2] - [2cy - (b-x)b]^2 = 0. \qquad (7)$$

c) Diskussion der Kurvengleichung.

Die Kurve ist von der 4. Ordnung. Verlegen wir den Koordinatenanfangspunkt nach A durch Parallelverschiebung der Axen, indem wir setzen

$$x = x' + b \quad \text{und} \quad y = y',$$

so erhalten wir nach der Transformation und nach Weglassung der Indizes folgende einfachere Kurvengleichung:

$$4y^2(x^2 + y^2) - (2cy + bx)^2 = 0. \qquad (8)$$

A ist Doppelpunkt der Kurve; denn die Gleichung beginnt mit Gliedern 2. Grades. Die Doppelpunktstangenten fallen zusammen und bilden, da die Glieder 3. Grades fehlen, eine *Selbstberührungstangente*. Der *Nullpunkt ist also Selbstberührungspunkt.*

Die Gleichung der Selbstberührungstangente lautet:

$$y = -\frac{b}{2c}x. \tag{9}$$

Spezialfälle:

1. $c = 0;\qquad x = 0.$ Fig. 10.
2. $c = \frac{b}{2};\quad y = -x.$
3. $c = \infty;\quad y = 0.$

Wächst also c von 0 bis ∞, so dreht sich die Selbstberührungstangente um 90^0 aus der Richtung der y'-Axe in die Richtung der x'-Axe.

Die x'-Axe schneidet die Kurve nur im Selbstberührungspunkt A; die andern 2 Schnittpunkte fallen ins Unendliche, da die Potenzen x^3 und x^4 nicht vorhanden sind.

Die Schnittpunkte der y'-Axe mit der Kurve liegen für endliche Werte von c alle im Endlichen; es ist

$$y_{1,2} = 0 \qquad \text{und} \qquad y_{3,4} = \pm c.$$

Die Gleichung nach x aufgelöst, ergiebt

$$x = \frac{2bcy \pm 2y^2\sqrt{b^2 + 4c^2 - 4y^2}}{4y^2 - b^2}. \tag{10}$$

Jedem Wert von y entsprechen 2 verschiedene Werte von x. Nur für $y = 0$ fallen die Wurzeln zusammen. In diesem einzigen Fall liegt die Kurve symmetrisch und zwar zu beiden Axen. Jede Parallele zur x-Axe schneidet die Kurve im Endlichen in 2 Punkten, den Fall ausgenommen, da der Nenner Null wird. Die 2 Parallelen

$$y = \pm\frac{b}{2} \tag{11}$$

müssen daher *Asymptoten* der Kurve sein. Der Maximalwert, den y annehmen kann, ist

$$y = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + 4c^2}.$$

Um die Schnittpunkte der Kurve mit der unendlich fernen Geraden zu gewinnen, setzen wir nach bekanntem Verfahren

$$U_n = 4y^2(x^2 + y^2) = 0; \text{ daraus folgt}$$

$$1.\ \ y = 0 \text{ 2mal} \qquad \text{und} \qquad 2.\ \ y = \pm ix.$$

Wir haben somit 2 reelle, zur x-Axe parallele Asymptotenrichtungen und 2 imaginäre. Die Kurve schneidet also die imaginären Kreispunkte der Ebene. Da nun $y=0$ auch ein Faktor von U_3 ist, so muss der unendlich ferne Punkt der x-Axe ein Doppelpunkt der Kurve sein. Um die Art desselben zu untersuchen, projizieren wir ihn in den Nullpunkt A und setzen zu diesem Zwecke in Gleichung (8):

$$x = \frac{1}{x'} \quad \text{und} \quad y = \frac{y'}{x'}.$$

Wir erhalten, wenn wir nach der Transformation noch mit x'^4 multipliziert haben:

$$4y'^2(1+y'^2) - (2cy'x' + bx')^2 = 0.$$

Der Nullpunkt ist Doppelpunkt. Die Gleichung der Tangenten in demselben lautet

$$y' = \pm \frac{b}{2} x'.$$

Die projizierte Kurve hat im Nullpunkt einen Knotenpunkt mit 2 verschiedenen Tangenten; folglich ist der unendlich ferne Punkt der x-Axe auch ein solcher Doppelpunkt. Die Tangenten in demselben sind

$$y' = yx' = \pm \frac{b}{2} x' \quad \text{oder}$$

$$y = \pm \frac{b}{2}.$$

Diese Tangenten sind Asymptoten der Kurve, wie dies schon die Gleichung (10) verraten hat.

Unsere Kurve gehört somit auch zu den *rationalen* Kurven; denn sie besitzt einen Selbstberührungspunkt und einen Doppelpunkt, was zusammen für 3 Doppelpunkte zählt.

Für $c=0$ besteht die Kurve, deren Gleichung nun die Form hat

$$4y^2(y^2+x^2) - b^2x^2 = 0, \text{ aus 2 kongruenten Ästen} \qquad (12)$$

zwischen den Asymptoten $y = \pm \frac{b}{2}$, siehe Fig. 10, Taf. III.

Für ein unendlich grosses c besteht die Kurve aus der doppelt gelegten unendlich fernen Geraden und der doppelt gelegten x-Axe. Asymptoten und Selbstberührungstangente laufen parallel.

Nimmt c negative Werte an, so sind die entstehenden Kurven Spiegelbilder derjenigen mit positivem c in Bezug auf die x-Axe.

d) Die Lösungen.

Die Koordinaten der zunächst gesuchten Schnittpunkte D sind die Wurzeln des Systems

$$1.\quad 4y^2[(b-x)^2+y^2]-[2cy-(b-x)b]^2=0, \text{ Kurve.}$$

und
$$2.\quad x^2-bx+y^2=0, \text{ Grundkreis.}$$

Die allgemeine Lösung dieser Aufgabe stösst auf bedeutende Schwierigkeiten. Wir können die Übereinstimmung mit dem ersten Verfahren nur in Spezialfällen nachweisen.

1. Für ein gleichseitiges Dreieck besitzt der Punkt D die Koordinaten $\left(\frac{b}{4}, \frac{b}{4}\sqrt{3}\right)$.

Setzen wir diese Werte für x und y in Gleichung (1) unseres Systems oben ein, so wird

$$c_1 = b\sqrt{3} \quad \text{und} \quad c_2 = 0.$$

Vergleiche damit die Fälle A_1 und C, pag. 136.

2. Bei einem rechtwinkligen Dreieck sind die Koordinaten von $D = \left(\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right)$. Setzt man diese Werte gleichen Orts wieder ein, so wird $c = \frac{b}{2}(1+\sqrt{2})$. Fig. 10.

Vergleiche damit A_2, pag. 136.

3. Für ein unendlich kleines Dreieck hat Punkt D die Koordinaten (b, 0). Die Einsetzung dieser Werte liefert $c = 0$, vergleiche damit C, pag. 136; siehe Fig. 10.

VI.

§ 17. *Sechste Aufgabe: Konstruktion eines gleichschenkligen Dreieckes, wenn die Basis und die Summe oder Differenz aus Schenkel und Schenkelhöhe gegeben sind.*

Gegeben: 1. b.
2. $s \pm h_s = c = \text{konstant}$.

Bedingungen: 1. $s + h_s \geqq \frac{b}{2}$,
2. $s - h_s \geqq 0$.

Bei einem unendlich kleinen, auf die Basis reduzierten Dreieck ist $s + h_s = \frac{b}{2} = \text{Minimum}$; denn $s = \frac{b}{2}$ und $h_s = 0$.

Ist das gleichschenklige Dreieck rechtwinklig, so ist $s - h_s = 0$. In jedem andern Fall ist s als Hypotenuse grösser als h_s (Kathete).

§ 18. *Erstes Lösungsverfahren: Bestimmung der Dreiecksspitzen B.*

a) Konstruktion der Kurve. Taf. III, Fig. 11.

Es sei $OA = b$ die Basis des Dreiecks. Wir ziehen den Grundkreis und um A den Hilfskreis mit dem Radius $r = c$. Ferner ziehen wir einen Strahl durch O, der den Grundkreis in Q schneidet. Die Verbindungslinie AQ endlich schneide den Hilfskreis in H und H_1. Liegt nun Q innerhalb des Hilfskreises, dann trägt man die beiden Strecken QH und QH_1 von O aus auf dem zugehörigen Strahl nach entgegengesetzten Seiten ab und zwar die Strecke nach Q hin, welche den Punkt A nicht enthält. Man macht also

$$OP_1 = QH \quad \text{und} \quad OP_2 = QH_1.$$

Beziehungen: 1. $OP_1 + AQ = QH + AQ = AH = c;$

2. $OP_2 - AQ = QH_1 - AQ = AH_1 = c.$

Liegt der Punkt Q ausserhalb des Hilfskreises, so trägt man beide Strecken nach Q hin ab. In diesem Fall gelten dann die Relationen:

1. $AQ' - OP_1' = AQ' - Q'H' = AH' = c;$
2. $OP_2' - AQ' = Q'H_1' - AQ' = AH_1' = c.$

Der geometrische Ort aller Punkte P ist die Hilfskurve. Fällt ein Kurvenpunkt P in die Mittelsenkrechte, so wird $OP = OB = s$ und $AQ = AD = h$, und man kann, wenn diese Werte in den Relationen oben eingesetzt werden, eine Lösung konstatieren. Die Schnittpunkte der Kurve mit der Geraden $x = \frac{b}{2}$ ergeben somit die zunächst gesuchten Punkte B.

b) Ableitung der Kurvengleichung.

Es seien für das gewohnte Koordinatensystem x und y die Koordinaten eines Punktes P'_2; dann kann gesetzt werden:

$$OP_2' = \sqrt{x^2 + y^2}; \tag{α}$$

Nun ist $OP_2' = c + AQ' = c + b \sin\varphi$, eingesetzt in ($\alpha$), und man hat $c + b\sin\varphi = \sqrt{x^2 + y^2}$, umgeformt

$$(x^2 + y^2 + by)^2 - c^2 (x^2 + y^2) = 0. \tag{1}$$

Polargleichung: $$r = - b\sin\varphi \pm c. \tag{2}$$

Unsere Kurve ist die *Kreiskonchoide.* Die y-Axe ist Symmetrieaxe.

$c < b$, O ist Knotenpunkt; die Konchoide besitzt eine Schleife;

$c = b$, O ist Spitze und die negative y-Axe Rückkehrtangente;

$c > b$, O ist konjugierter Punkt.

Für $c = 0$ reduziert sich die Kurve auf den doppelt gelegten Kreis $x^2 + y^2 + by = 0$.

c) Die Lösungen.

Es handelt sich noch um die Bestimmung der Ordinaten der Schnittpunkte B. Wir führen zu diesem Zweck den Wert für $x = \frac{b}{2}$ in der Kurvengleichung (1) ein und erhalten:

$$\left(y^2 + by + \frac{b^2}{4}\right)^2 - c^2\left(y^2 + \frac{b^2}{4}\right) = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind die Ordinaten von B. Die Auflösung vorliegender Gleichung führt auf eine kubische Hilfsgleichung von der Form

$$v^3 + \frac{6b^2c^2 - c^4}{3} v + \frac{9b^2c^4 + 2c^6}{27} = 0.$$

Die Diskriminante dieser kubischen Gleichung wird

$$\varDelta = \frac{bc^3\sqrt{3}}{18} \sqrt{32b^4 - 13b^2c^2 + 4c^4}.$$

Es ist nun $\varDelta = 0$ nur in dem einen Fall, wenn

$$c = 0. \tag{3}$$

Wir erhalten daher 2 Hauptfälle für die Lösungen:

A. $\varDelta = 0$ für $c = 0$.

Wir bekommen für y 4 zusammenfallende Wurzeln, nämlich $y = -\frac{b}{2}$ als Ordinate der Spitze. Damit erhalten wir auch 4 zusammenfallende Dreiecke, welche rechtwinklig sind.

B. $\varDelta =$ pos. für $c \neq 0$.

Die kubische Hilfsgleichung besitzt nur eine und infolge dessen die biquadratische Gleichung nur 2 reelle Wurzeln. Wir erhalten somit für jeden Wert von c, 0 ausgenommen, nur 2 wirkliche Dreiecke.

Wie schon erwähnt, treten für $c=0$ 4 zusammenfallende rechtwinklige Dreiecke auf, welche auf der negativen Seite der y-Axe liegen. Fängt nun c zu wachsen an, so verschwinden erstens 2 Dreiecke. Die andern 2 verwandeln sich in ein spitzwinkliges und in ein stumpfwinkliges, und zwar wird für ein wachsendes c das spitzwinklige immer spitzwinkliger.

Für $c=\frac{b}{2}(2-\sqrt{3})$ wird es gleichseitig. Das stumpfwinklige wird auch stumpfwinkliger und erreicht für $c=\frac{b}{2}$ das Maximum. Der Winkel an der Spitze wird 180°. Das Dreieck reduziert sich auf die Basis. Wird $c>\frac{b}{2}$, so nimmt der Winkel an der Spitze stetig ab. Für $c=b\sqrt{2}$ wird das Dreieck rechtwinklig natürlich auf der positiven Seite der y-Axe. Für jeden Wert von $c>b\sqrt{2}$ ist dann auch das auf der positiven Seite der y-Axe liegende Dreieck spitzwinklig. Gleichseitig ist dieses spitzwinklige Dreieck für den Spezialwert von $c=\frac{b}{2}(2+\sqrt{3})$.

§ 19. *Zweites Lösungsverfahren: Bestimmung der Punkte D.*

Bedingungen wie in § 17.

a) Konstruktion der Kurve. Ohne Figur.

Es sei $OA=b$ die Basis des Dreiecks. Wir ziehen den Grundkreis, die Mittelsenkrechte MM_1 und endlich noch einen Hilfskreis um A mit dem Radius $r=c$. Ein durch A gezogener Strahl schneide nun den Grundkreis in Q, die Mittelsenkrechte in R und den Hilfskreis in H und H_1. Schliesslich wird noch durch O ein Strahl gezogen, der auch durch Q geht. Nun trägt man auf dem Strahl OQ von O aus die Strecken RH und RH_1 nach entgegengesetzten Seiten ab, macht also

$OP_1=RH$ und $OP_2=RH_1$, so dass also

1. $AR+OP_1=AR+RH=AH=c$ und ebenso
2. $OP_2-AR=RH_1-AR=AH_1=c$.

So darf es aber nur gemacht werden, wenn Q innerhalb des Hilfskreises liegt. Liegt Q ausserhalb des Hilfskreises, so trägt man beide Strecken RH und RH_1 nach der gleichen Seite und zwar nach Q hin ab. Der geometrische Ort aller Punkte P ist die Hilfskurve.

Fällt ein Punkt derselben in den Grundkreis, so wird $OP = OQ = h_s$ und da $AR = s$ ist, so wird nach den oben stehenden Relationen

1. $s + h_s = c$ oder 2. $h_s - s = c$; somit ist der Punkt P zu einem Punkt D geworden; wir haben eine Lösung. Die Schnittpunkte der Kurve mit dem Grundkreis sind wieder die zunächst gesuchten Punkte D.

b) Ableitung der Kurvengleichung.

Wir erhalten nach analoger Methode wie früher

$$(x^2 + y^2)\left(y + \frac{b}{2}\right)^2 - c^2 y^2 = 0. \tag{4}$$

Polargleichung: $$r = -\frac{b}{2\sin\varphi} \pm c. \tag{4a}$$

Die Hilfskurve ist die *Konchoide des Nikomedes.* Die y-Axe ist die Symmetrieaxe derselben und die Gerade $y = -\frac{b}{2}$ die Leitlinie. c ist der auf einem Strahl durch O gemessene konstante Abstand zweier Kurvenpunkte von der Leitlinie.

Für $c > \frac{b}{2}$ besitzt die Konchoide eine Schleife.

für $c = \frac{b}{2}$ tritt sie mit Spitze auf in O;

» $c < \frac{b}{2}$ wird O zum konjugierten Punkt;

» $c = 0$ zerfällt die Kurve in die doppelte Leitlinie und den konjugierten Punkt O.

c) Die Lösungen.

Es handelt sich um die Bestimmung der Koordinaten der Schnittpunkte D. Diese Koordinaten sind die Wurzeln des Gleichungssystems:

1. $(x^2 + y^2)\left(y + \frac{b}{2}\right)^2 - c^2 y^2 = 0,$ .... Kurve.

2. $x^2 - bx + y^2 = 0,$ .... Grundkreis.

Wir führen den Wert von x aus (2) in (1) ein und erhalten

$$y^4 + 2by^3 + \frac{3b^4 - 2b^2c^2 + 2c^4}{2b^2} y^2 + \frac{b^3 - 2bc^2}{2} y + \frac{b^4 - 4b^2c^2}{16} = 0. \quad (5)$$

Die Wurzeln dieser Gleichung 4. Grades in y sind die Ordinaten der Schnittpunkte D. Die kubische Hilfsgleichung dazu erscheint in der Form

$$v^3 - \frac{c^4(4b^4 - 2b^2c^2 + c^4)}{3b^4} v - \frac{c^6(16b^6 + 15b^4c^2 - 6b^2c^4 + 2c^6)}{27b^6} = 0.$$

Als Diskriminante erhält man

$$\varDelta = \frac{c^{14}(32b^4 - 13b^2c^2 + 4c^4)}{27b^6}.$$

Es wird $\varDelta = 0$ nur für $c = 0$ wie beim ersten Verfahren. Auch hier giebt es die beiden gleichen Hauptfälle, nämlich

A. $\varDelta = 0$ für $c = 0$.

Wir erhalten wie beim ersten Verfahren 4 zusammenfallende rechtwinklige Dreiecke; denn in Gleichung (5) wird $y = -\frac{b}{2}$ 4mal.

B. $\varDelta =$ pos. für $c \neq 0$.

Für jeden von 0 verschiedenen Wert von c liefert Gleichung (5) 2 reelle Wurzeln und damit 2 reelle Dreiecke, also dasselbe Ergebnis wie beim ersten Verfahren. Setzt man in Gleichung (5) Spezialwerte ein

$y = 0$ für das unendlich kleine Dreieck,

$y = \pm \frac{b}{2}$ » » rechtwinklige »

$y = \pm \frac{b}{4}$ » » gleichseitige »

so erhält man die nämlichen Werte für c wie auf Seite 143.

VII.

§ 20. *Siebente Aufgabe: Konstruktion des gleichschenkligen Dreieckes, wenn die Basis und die Summe oder Differenz aus Schenkel und dem an die Basis angrenzenden Schenkelabschnitt gegeben sind.*

Gegeben: 1. b,

2. $s \pm m = \pm c$.

Bedingungen: 1. $s + m \gtreqless b\sqrt{2}$,

2. $m - s \lesseqgtr \pm \frac{b}{2}$.

Sie Summe $s + m$ ist ein Minimum beim rechtwinkligen Dreieck, und da ist $s = m = \frac{b}{2}\sqrt{2}$. $m - s$ erreicht den Maximalwert $\frac{b}{2}$ bei einem unendlich kleinen Dreieck und nimmt mit wachsendem h_b stetig ab. So lange das Dreieck noch stumpfwinklig ist, bleibt $m - s$ noch positiv. $m - s$ wird zu 0 beim rechtwinkligen und negativ beim spitzwinkligen Dreieck und kann hier dann jeden Wert von 0 bis $-\infty$ annehmen.

§ 21. *Erstes Lösungsverfahren: Bestimmung der Punkte B.*

a) Konstruktion der Hilfskurve. Taf. III, Fig. 12.

Es sei $OA = b$ die Basis des Dreiecks. Wir ziehen den Grundkreis, die Mittelsenkrechte MM_1 und einen Hilfskreis um O mit dem Radius $r = c$. Ein Strahl durch O schneide den Grundkreis in Q und den Hilfskreis in H und H_1. Nun tragen wir auf dem Strahl OQ von O aus die Strecken QH und QH_1 jede nach beiden Seiten ab, machen also

$$OP_1 = OP_3 = QH \text{ und}$$
$$OP_2 = OP_4 = QH_1.$$

Für die Punkte P_1 und P_3 gilt die Relation:

1. $OQ + OP_{1,3} = OQ + HQ = OH = c$, während die Punkte P_2 und P_4 die Bedingung erfüllen: 2. $OP_{2,4} - OQ = QH_1 - QO = OH_1 = c$. Dreht sich der Strahl OQ um O, so beschreiben die Punkte P_1 und P_4 eine Kurve und die Punkte P_3 und P_2 das Spiegelbild derselben in Bezug auf die y-Axe. Die Schnittpunkte beider Kurven mit der Mittelsenkrechten ergeben die zunächst gesuchten Punkte B; denn für einen solchen Kurvenpunkt P ist

$OP = OB = s$ und $OQ = OD = m$, und die oben stehenden Relationen werden

$m + s = c$ oder $s - m = c$. Wir haben eine Lösung.

b) Ableitung der Kurvengleichung.

Es seien x und y die rechtwinkligen Koordinaten eines Kurvenpunktes P_2 im gewohnten Koordinatensystem; dann gilt:

$$OP_2 = \sqrt{x^2 + y^2}. \qquad (\alpha)$$

Nun ist $OP_2 = H_1Q = OQ + OH = b\cos\varphi + c$, sub. in (α)

$$b\cos\varphi + c = \sqrt{x^2 + y^2}, \text{ umgeformt}$$

$$(x^2 + y^2 - bx)^2 - c^2(x^2 + y^2) = 0. \qquad (1)$$

Die Punkte dieser Kurve genügen der Relation

$$s - m = \pm c.$$

Für die Relation: $s + m = c$ bekommt die Gleichung die etwas abweichende Form

$$(x^2 + y^2 + bx)^2 - c^2(x^2 + y^2) = 0. \qquad (2)$$

Die Kurven (1) und (2) sind symmetrisch zueinander gelegen in Bezug auf die y-Axe. Die Gleichung der Kurve, die alle Schnittpunkte B liefert, ist die unächte Kurve 8. Ordnung:

$$[(x^2 + y^2 + bx)^2 - c^2(x^2 + y^2)]\,[(x^2 + y^2 - bx)^2 - c^2(y^2 + x^2)] = 0. \qquad (3)$$

Unser symmetrisches Kurvenpaar besteht aus 2 *Kreiskonchoiden.* Für beide ist die x-Axe Symmetrieaxe. Bei positivem bx liegt die Kurve mehr auf der negativen Seite, bei negativem bx mehr auf der positiven Seite der x-Axe. Ist $c \gtreqless b$, so ist für beide Konchoiden der Punkt O isolierter Punkt, Rückkehrpunkt oder Doppelpunkt. Für $c = 0$ zerfällt jede Konchoide in 2 sich deckende Kreise. Die beiden Kreispaare berühren sich in O und haben in der y-Axe eine gemeinsame Tangente.

c) *Die Lösungen.*

Wir suchen zunächst die Schnittpunkte B der Kurve mit der Mittelsenkrechten. Dabei handelt es sich nur noch um die Bestimmung der Ordinaten dieser Punkte. Lösen wir das bekannte Gleichungssystem nach y auf, so finden wir

$$1.\ y = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2c^2 - 3b^2 \pm 2c\sqrt{c^2 - 2b^2}}, \text{ wenn } bx = \text{pos.} \qquad (4)$$

$$\text{und } 2.\ y = \pm\frac{1}{2}\sqrt{b^2 + 2c^2 \pm 2c\sqrt{c^2 + 2b^2}}, \text{ wenn } bx = \text{neg.} \qquad (5)$$

Wir bekommen hier 2 gesonderte Lösungsgruppen.

Erste Gruppe für Formel (4).

A. $c > \frac{3b}{2}$.

2 reelle Wurzeln für y für das positive Zeichen der innern Wurzel; 2 symmetrische spitzwinklige Dreiecke.

B. $\frac{3b}{2} \geqq c \geqq b\sqrt{2}$.

4 reelle Wurzeln für y, welche paarweise absolut gleich sind; 4 wirkliche Dreiecke, welche paarweise symmetrisch sind.

1. $c = \frac{3b}{2}$.

$$y_{1,2} = \pm \frac{b}{2}\sqrt{3} \quad \text{und} \quad y_{3,4} = 0.$$

2 gleichseitige Dreiecke, bedingt durch das positive Zeichen der innern Wurzel und 2 unendlich kleine, bedingt durch das negative Zeichen der innern Wurzel.

2. $\frac{3b}{2} > c > b\sqrt{2}$; Fig. 12, Taf. III, Kurve II.

Das positive Zeichen der innern Wurzel erzeugt 2 spitzwinklige, das negative Zeichen 2 stumpfwinklige Dreiecke. Mit abnehmendem c werden die spitzwinkligen immer weniger spitzwinklig und die stumpfwinkligen weniger stumpfwinklig.

3. $c = b\sqrt{2}$;

$$y = \pm \frac{b}{2} \text{ je } 2\text{mal}.$$

Die Kurve berührt von der negativen Seite her die Mittelsenkrechte in den 2 Punkten $\left(\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right)$ und $\left(\frac{b}{2}, -\frac{b}{2}\right)$. 4 rechtwinklige Dreiecke, welche paarweise sich decken und paarweise symmetrisch sind.

C. $c < b\sqrt{2}$.

Alle y-Werte sind imaginär, daher keine reellen Lösungen.

Alle Dreiecke der ersten Lösungsgruppe erfüllen die Bedingung $s + m = c$.

Für den Flächeninhalt derselben bekommen wir die allgemeine Formel:

$$F = \frac{b}{4}\sqrt{2c^2 - 3b^2 \pm 2c\sqrt{c^2 - 2b^2}}. \qquad (6)$$

Zweite Gruppe für Formel (5).

A. $c > \frac{b}{2}$. Fig. 12, Kurve I.

2 reelle Wurzeln für y und 2 imaginäre, letztere für das negative Zeichen der innern Wurzel. 2 symmetrische spitzwinklige Dreiecke, deren Basiswinkel $> 60^\circ$.

B. $c \leqq \frac{b}{2}$.

4 reelle Wurzeln für y, daher 4 reelle Lösungen, welche paarweise symmetrisch sind.

1. $c = \frac{b}{2}$, Grenzfall.

Für das positive Zeichen der innern Wurzel wird $y = \pm \frac{b}{2}\sqrt{3}$, bedingt 2 gleichseitige Dreiecke. Für das negative Zeichen der innern Wurzel wird $y = \pm 0$, was 2 unendlich kleine Dreiecke zur Folge hat.

2. $\frac{b}{2} > c > 0$.

2 spitzwinklige Dreiecke für das positive und 2 stumpfwinklige für das negative Vorzeichen der innern Wurzel. Mit abnehmendem c nähern sich beide Formen dem rechtwinkligen Dreieck.

3. $c = 0$.

Die Kurve ist der doppelte gelegte Kreis $x^2 - bx + y^2 = 0$, welcher die Mittelsenkrechte in den Punkten $\left(\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right)$ und $\left(\frac{b}{2}, -\frac{b}{2}\right)$ schneidet; 4 rechtwinklige Dreiecke wie oben unter B_3.

Sämtliche Dreiecke dieser Gruppe genügen der Relation

$$s - m = \pm c.$$

Ihre Inhaltsformel lautet:

$$F = \frac{b}{4}\sqrt{b^2 + 2c^2 \pm 2c\sqrt{2b^2 + c^2}}. \tag{7}$$

§ 22. *Zweites Lösungsverfahren: Bestimmung der Schnittpunkte D.*

Die Voraussetzungen sind dieselben wie in § 20.

Wir referieren über diesen Fall in gedrängter Kürze.

Analog dem ersten Verfahren erhalten wir als Hilfskurve eine unächte Kurve 8. Ordnung. Dieselbe hat die Form

$$\left[(x^2+y^2)\left(x+\frac{b}{2}\right)^2-c^2x^2\right]\left[(x^2+y^2)\left(x-\frac{b}{2}\right)^2-c^2x^2\right]=0. \quad (8)$$

Die Kurve besteht aus 2 *Konchoiden des Nikomedes.* Für beide ist die x-Axe Symmetrieaxe. Die Konchoide des Klammerausdrucks links hat die Gerade $x=-\frac{b}{2}$, diejenige des Klammerausdrucks rechts die Gerade $x=\frac{b}{2}$ zur Leitlinie.

Bei den Lösungen handelt es sich um die Bestimmung der Koordinaten der Schnittpunkte D der Konchoiden mit dem Grundkreis. Für die Abscisse x erhalten wir die Bestimmungsgleichung

$$bx\left(x\pm\frac{b}{2}\right)^2-c^2x^2=0; \text{ daraus folgt}$$

$$x=\frac{c^2\pm b^2\pm c\sqrt{c^2\pm 2b^2}}{2b};$$

für das positive Zeichen im Ausdruck $\left(x\pm\frac{b}{2}\right)^2$ wird

$$x=\frac{c^2-b^2\pm c\sqrt{c^2-2b^2}}{2b}. \quad (9)$$

Alle diesbezüglichen Lösungen entsprechen der Relation:

$$s+m=c.$$

Führen wir den Wert für x aus (9) in der Gleichung des Grundkreises ein, so erhält man für die Ordinate y des Punktes D den Ausdruck:

$$y=\pm\frac{1}{2b}\sqrt{6b^2c^2-3b^4-2c^4\pm 2c(2b^2\mp c^2)\sqrt{c^2-2b^2}}. \quad (10)$$

Nun besteht die Proportion:

$$y:x=h_b:\frac{b}{2}.$$

Setzen wir hierin für x und y die gefundenen Werte ein und lösen nach h_b auf, so finden wir:

$$h_b = \pm \frac{1}{2} \sqrt{2c^2 - 3b^2 \pm 2c\sqrt{c^2 - 2b^2}}. \tag{11}$$

Für das negative Zeichen im Ausdruck $\left(x \pm \frac{b}{2}\right)^2$ erlangt die Abscisse x von D den Wert

$$x = \frac{c^2 + b^2 \pm c\sqrt{c^2 + 2b^2}}{2b} \tag{12}$$

und die Ordinate y den Wert

$$y = \pm \frac{1}{2b} \sqrt{b^4 - 2b^2c^2 - 2c^4 \mp 2c^3\sqrt{c^2 + 2b^2}}. \tag{13}$$

Alle diesbezüglichen Lösungen erfüllen die Bedingung:

$$s - m = \pm c.$$

Für die Basishöhe dieser Dreiecke finden wir auf ähnliche Weise wie oben den Wert

$$h_b = \pm \frac{1}{2} \sqrt{b^2 + 2c^2 \pm 2c\sqrt{c^2 + 2b^2}}. \tag{14}$$

Vergleichen wir (11) mit (4) und (14) mit (5), so finden wir vollkommene Übereinstimmung in den Ergebnissen beider Auflösungsmethoden.

VIII.

§ 23. *Achte Aufgabe. Konstruktion eines gleichschenkligen Dreiecks, wenn die Basis und die Summe oder Differenz aus Schenkelhöhe und dem der Basis angrenzenden Schenkelabschnitt gegeben sind.*

Gegeben: 1. b,

2. $h_s \pm m = \pm c =$ konstant.

Bedingungen: 1. $b\sqrt{2} \gtreqless (h_s + m) \geqq b$;

2. $b \gtreqless (h_s - m) \geqq -b$.

Im rechtwinkligen Dreieck ist $h_s + m = b\sqrt{2} =$ Maximum; denn da ist $h_s = m = \frac{b}{2}\sqrt{2}$. In diesem Fall ist nun $h_s + m = \sqrt{b}\left\{\sqrt{\frac{b}{2}} + \sqrt{\frac{b}{2}}\right\}$. Ist das Dreieck nicht rechtwinklig, so ist $h_s + m = \sqrt{b}\left\{\sqrt{\left(\frac{b}{2} + a\right)} + \sqrt{\left(\frac{b}{2} - a\right)}\right\}$. Es ist aber bekanntlich $\left(\sqrt{\frac{b}{2}} + \sqrt{\frac{b}{2}}\right) > \left(\sqrt{\left(\frac{b}{2} + a\right)} + \sqrt{\left(\frac{b}{2} - a\right)}\right)$.

Bei einem unendlich grossen Dreieck ist $h_s - m = b - 0 = b = \text{Max.}$ und bei einem unendlich kleinen Dreieck $= 0 - b = - b = \text{Min.}$ Bei einem spitzwinkligen Dreieck ist $h_s - m = \text{pos.}$, bei einem rechtwinkligen $= 0$ und bei einem stumpfwinkligen $= \text{neg.}$

§ 24. *Erstes Lösungsverfahren. Bestimmung der Spitzen B.*

a) Konstruktion der Kurve. Taf. IV, Fig. 13.

Es sei $OA = b$ die Basis des Dreiecks. Wir ziehen den Grundkreis, die Mittelsenkrechte MM_1 und um A den Hilfskreis mit dem Radius $r = c$. Durch O werde nun ein Strahl gezogen, der den Grundkreis in Q schneidet. Ferner werde durch A und Q eine Gerade gelegt, welche den Hilfskreis in H und H_1 schneidet. Jetzt tragen wir auf dem Strahl OQ die Strecken QH und QH_1 von O aus in gleicher oder ungleicher Richtung ab und erhalten die Punkte T_1 und T_2. Gleiche Richtung ist nötig, wenn Q ausserhalb des Hilfskreises liegt. Hat Q negative Ordinate, so sind die Strecken nach Q hin abzutragen, im andern Fall nach der entgegengesetzten Seite. Endlich trägt man noch die Strecken QT_1 und QT_2 von R aus auf den Strahl OQ ab in der Richtung, wie T von Q aus liegt, und bekommt die Punkte P_1 und P_2. Bei sich drehendem Strahl beschreiben die Punkte P die Kurve. Die Schnittpunkte derselben mit der Mittelsenkrechten sind die Spitzen B; denn in diesem Fall ist $RP = 0$, also auch $QT = 0$; folglich fällt T auf Q; damit ist $OT = OQ = m$, QA ist $= h_s$, und eine der Relationen ist erfüllt:

$$h_s \pm m = c.$$

b) Ableitung der Kurvengleichung.

Es seien $(-x, -y)$ die rechtwinkligen Koordinaten eines Kurvenpunktes P_2 im gewohnten System; dann ist

$$OP_2 = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Nun ist $OP_2 = P_2R - OR = T_2Q - OR = T_2O + OQ - OR$,

somit $\sqrt{x^2+y^2} = T_2O + OQ - OR. \qquad (\alpha)$

$$\left.\begin{aligned} \text{Ferner ist } T_2O &= QH_1 = AQ + AH_1 = b\sin\varphi + c, \\ OQ &= b\cos\varphi, \\ OR &= \frac{b}{2x}\sqrt{x^2+y^2}, \end{aligned}\right\} \text{sub in } (\alpha),$$

es giebt $\sqrt{x^2+y^2} = b\sin\varphi + c + b\cos\varphi - \frac{b}{2x}\sqrt{x^2+y^2}$, umgeformt

$$\left[(x^2+y^2)\left(x-\frac{b}{2}\right)+bx(x+y)\right]^2 - c^2x^2(x^2+y^2) = 0. \quad (1)$$

$$\text{Polargleichung:} \quad r = \frac{b}{2\cos\varphi} - b(\cos\varphi + \sin\varphi) \pm c. \quad (2)$$

c) Eigenschaften der Kurve.

Vorliegende Kurve ist von der 6. Ordnung. Sie hat im Nullpunkt einen 4fachen Punkt. Die *Gleichung der Tangenten im Nullpunkt* lautet:

$$y^4 - 4xy^3 + \frac{2b^2-4c^2}{b^2}x^2y^2 + 4x^3y + \frac{b^2-4c^2}{b^2}x^4 = 0. \quad (3)$$

Spezialfälle: 1. $c = 0$.

$y^4 - 4xy^3 + 2x^2y^2 + 4x^3y + x^4 = 0$, aufgelöst

$$y = (1 \pm \sqrt{2})\,x \text{ je 2mal.}$$

Die Tangenten müssen paarweise zusammenfallen, da die Kurve in 2 zusammenfallende Kurven 3. Ordnung zerfällt, deren Gleichung $(x^2+y^2)\left(x-\frac{b}{2}\right) + bx(x+y) = 0$ ist. (4)

Diese Kurve ist strophoidenartig, siehe Fig. 13, Kurve II.

2. $c = \frac{b}{2}$.

$$y^4 - 4xy^3 + x^2y^2 + 4x^3y = 0.$$

$y = 0$; die x-Axe ist Tangente.

Die Gleichung der übrigen 3 reellen Tangenten lautet:

$$y^3 - 4xy^2 + x^2y + 4x^3 = 0.$$

3. $c = \frac{b}{2}\sqrt{2}$.

$$y^4 - 4xy^3 + 4x^3y - x^4 = 0.$$

Da $y = x$ der Gleichung genügt, so ist $y = x$ Tangente.

Die Gleichung der übrigen 3 reellen Tangenten lautet:

$$y^3 - 3xy^2 + x^3 = 0.$$

4. $c = \infty$.

Die Kurve besteht aus der doppelt gelegten unendlich fernen Geraden und der doppelt gelegten y-Axe und dem konjugierten Punkt in O. Die y-Axe ist doppelt gelegte Tangente; die 2 andern Nullpunktstangenten sind imaginär.

Die x-Axe schneidet die Kurve im Nullpunkt 4mal; die andern 2 Schnittpunkte liegen in den Punkten $\left(-\frac{b}{2} \pm c\right)$. Die y-Axe schneidet die Kurve 4mal im Nullpunkt und 2mal im Unendlichen.

Aus der Form der Gleichung geht hervor, dass die imaginären Kreispunkte der Ebene Doppelpunkte der Kurve sind. Ebenso sagt uns die Gleichung, dass die Gerade $x = \frac{b}{2}$ doppelt gelegte Asymptote ist. Die Natur des unendlich fernen Punktes der Kurve wird durch Transformation bestimmt. Wir setzen $x = x' + \frac{b}{2}$ und $y = y'$ und erhalten

$$\left\{\left[\left(x' + \frac{b}{2}\right)^2 + y'^2\right]x' + b\left(x' + \frac{b}{2}\right)\left(x' + \frac{b}{2} + y'\right)\right\}^2$$
$$- c^2\left(x' + \frac{b}{2}\right)^2\left[\left(x' + \frac{b}{2}\right)^2 + y'^2\right] = 0.$$

Nun projizieren wir den unendlich fernen Punkt der Kurve auf die x-Axe, indem wir setzen

$$y' = \frac{1}{y''} \text{ und } x' = \frac{x''}{y''} \text{ und erhalten:}$$

$$\left[\left(x''^2 + by''x'' + \frac{b^2y''^2}{4} + 1\right)x''\right.$$
$$\left. + by''\left(x'' + \frac{by''}{2}\right)\left(x'' + \frac{by''}{2} + 1\right)\right]^2 - c^2y''^2\left(x''^2 + bx''y''\right.$$
$$\left. + \frac{b^2}{4}y''^2\right)\left(x''^2 + bx''y'' + \frac{b^2}{4}y''^2 + 1\right) = 0. \quad (5)$$

Der Nullpunkt der projizierten Kurve ist Doppelpunkt. Die Gleichung der Doppelpunktstangenten lautet:

$x''^2 = 0$; folglich fallen die beiden Tangenten mit der y'-Axe zusammen. Da ferner für $x'' = 0$ $y'' = 0$ wird und zwar 4mal, so muss der Nullpunkt Selbstberührungspunkt sein. Es ist somit auch der unendlich ferne Punkt der Kurve *Selbst-*

berührungspunkt und die Gerade $x = \frac{b}{2}$ *Selbstberührungsasymptote*. Die Kurve ist also *rational;* denn sie besitzt 10 Doppelpunkte, nämlich 6 im 4fachen Punkt O, 2 im unendlich fernen Selbstberührungspunkt und 2 in den imaginären Kreispunkten der Ebene.

Für $c = b$ fallen 5 Schnittpunkte der Geraden $x = \frac{b}{2}$ mit der Kurve ins Unendliche. In diesem Fall ist die Mittelsenkrechte *Selbstberührungswendeasymptote* und der unendlich ferne Punkt der Kurve ein Selbstberührungspunkt mit *einfachem Inflexionsknoten.*

Die Kurve ist keine symmetrische Kurve.

d) Die Lösungen.

Um die Schnittpunkte B zu bekommen, führen wir für x den Wert $x = \frac{b}{2}$ in der Kurvengleichung (1) ein und erhalten

$$y = \frac{-b^3 \pm bc\sqrt{2b^2 - c^2}}{2(b^2 - c^2)}. \tag{6}$$

Für jeden Wert von $c \leqq b\sqrt{2}$ giebt es 2 reelle Werte für y, also 2 reelle Lösungen. Die Hauptfälle sind folgende:

A. $c > b\sqrt{2}$.

y wird imaginär; keine reellen Lösungen.

B. $c \leqq b\sqrt{2}$; 2 reelle Lösungen.

1. $c = b\sqrt{2}$.

$y_1 = y_2 = \frac{b}{2}$; 2 zusammenfallende rechtwinklige Dreiecke.

2. $c = b$.

$y_1 = 0$ und $y_2 = \infty$; ein unendlich kleines und ein unendlich grosses Dreieck.

3. $c = \frac{b}{2}\sqrt{2}$; $\quad y = -\frac{b}{2}(2 \mp \sqrt{3}.)$

4. $c = \frac{b}{2}$; $\quad y = -\frac{b}{6}(4 \mp \sqrt{7})$.

In beiden Fällen ein stumpfwinkliges und ein spitzwinkliges Dreieck.

5. $c = 0$; $y_1 = y_2 = -\frac{b}{2}$.

2 zusammenfallende rechtwinklige Dreiecke OAB'. Fig. 13.

6. $c = \frac{b}{2}(\sqrt{3} \pm 1)$; $y_1 = \pm \frac{b}{2}\sqrt{3}$ und $y_2 = \pm \frac{b}{6}\sqrt{3}$.

Das spitzwinklige Dreieck ist gleichseitig und das stumpfwinklige Dreieck hat Basiswinkel von 30° und eine Schenkelhöhe von $h_s = \frac{b}{2}$.

Lässt man c von b aus einmal wachsen bis $c = b\sqrt{2}$, das andere Mal abnehmen bis $c = 0$, so sind die Lösungen im 2. Fall symmetrisch zu denjenigen im ersten Fall.

Setzt man $y = -y$, so geht Gleichung (1) über in

$$\left[(x^2 + y^2)\left(x - \frac{b}{2}\right) + bx(x - y)\right]^2 - c^2x^2(x^2 + y^2) = 0. \quad (7)$$

Die Kurve ist das Spiegelbild der erstern in Bezug auf die x-Axe. Mit den Lösungen ist es dasselbe; dabei giebt es für die Basishöhe den Ausdruck

$$h_b = y = \frac{b^3 \pm bc\sqrt{2b^2 - c^2}}{2(b^2 - c^2)}. \quad (8)$$

Als Inhaltsformel des Dreiecks erhalten wir nach (6)

$$F = \frac{-b^4 \pm b^2c\sqrt{2b^2 - c^2}}{4(b^2 - c^2)}. \quad (9)$$

§ 24. *Zweites Lösungsverfahren: Bestimmung der Fusspunkte D der Schenkelhöhen.* Ohne Figur.

Diese Aufgabe kann elementar gelöst werden, wenn wir aus den drei Grössen b, m und h_s zuerst ein rechtwinkliges Dreieck konstruieren wollen. Will man aber direkt das gleichschenklige Dreieck gewinnen, bedarf es auch hier der Konstruktion einer Kurve höherer Ordnung. Diese Hilfskurve wird eine ***Kreiskonchoide,*** deren Gleichung:

$(x^2 + y^2 + by)^2 - c^2(x^2 + y^2) = 0$ ist (vergleiche VI (1), (10) pag. 64).

Für die Koordinaten der Punkte D erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{b^2 \pm c\sqrt{2b^2 - c^2}}{2b} \\ \text{und } y &= \pm\frac{c^2 - b^2}{2b}, \text{ wobei nur das positive} \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Zeichen verwendet werden darf. Das negative Zeichen entspricht den Lösungen der Spiegelbildkurve in Bezug auf die x-Axe.

Setzt man in der Proportion:

$$y : h_b = x : \frac{b}{2} \text{ für } x \text{ und } y \text{ die Werte von (11) ein,}$$

so erhält man für h_b den Wert nach Formel (6); damit ist nachgewiesen, dass beide Verfahren die gleichen Ergebnisse liefern.

Berechnen wir mit Hilfe von (11) m, denn $m = \sqrt{x^2 + y^2}$ und h_s, denn $h_s = \sqrt{b^2 - m^2}$, so finden wir, dass bei jedem spitzwinkligen Dreieck die Strecke $m = OD$ gleich ist der Grösse h_s bei dem zugehörigen stumpfwinkligen Dreieck und umgekehrt. Bei allen Lösungen gilt die Relation

$$h_s + m = c, \text{ wenn } c > b,$$
$$h_s \pm m = c, \quad » \quad c = b \text{ und}$$
$$h_s - m = c, \quad » \quad c < b \text{ ist.}$$

IX.

§ 26. *Neunte Aufgabe: Konstruktion eines gleichschenkligen Dreieckes, wenn die **Basis** und die **Summe** oder **Differenz** aus **Schenkel** und **Basishöhe** gegeben sind.*

Gegeben: 1. b,

2. $s \pm h_b = \pm c =$ konstant.

Bedingungen: 1. $s + h_b \geqq \frac{b}{2}$,

2. $s - h_b \leqq \frac{b}{2}$.

Die Summe ist das Minimum bei einem unendlich kleinen Dreieck; da ist $s = \frac{b}{2}$ und $h_b = 0$. Umgekehrt ist die Differenz bei einem unendlich kleinen Dreieck das Maximum und nimmt stetig ab bis 0, wenn das Dreieck wächst und schliesslich unendlich gross wird.

§ 27. *Erstes Verfahren. **Bestimmung der Fusspunkte D.***

a) Konstruktion der Hilfskurve. Taf. IV, Fig. 14.

Es sei $OA = b$ die Basis des Dreiecks. Wir ziehen den Grundkreis und die Mittelsenkrechte, auf welcher wir von C aus die Konstante c nach E abtragen. Durch O laufe nun ein Strahl, der den Grundkreis in Q und die Mittelsenkrechte in R schneidet. Nun tragen wir die Strecke RE von O aus auf dem Strahl OQ nach beiden Seiten ab und bekommen die beiden Punkte T_1 und T_2. Schliesslich tragen wir noch die Strecken RT_1 und RT_2 auf dem Strahl OQ von Q aus ab und zwar in der Richtung, in welcher von der Mittelsenkrechten aus die Punkte T liegen. Die gewonnenen Punkte seien P_1 und P_2, welche bei sich drehendem Strahl die Kurve beschreiben. Die Schnittpunkte derselben mit dem Grundkreis liefern die zunächst gesuchten Punkte D; denn fällt ein Kurvenpunkt P in den Grundkreis, so ist $QP = 0$, also auch $RT = 0$. Im letztern Fall kommt T in die Mittelsenkrechte zu liegen, und es ist ferner $OT = RE = OB = s$ und da auch $RC = h_b$ ist, so muss sich eine der Bedingungen erfüllen:

$$s \pm h_b = c.$$

b) Ableitung der Kurvengleichung.

Wir legen in gewohnter Weise das Koordinatensystem. x und y seien die Koordinaten des Kurvenpunktes P_1; dann ist

$$OP_1 = \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$OP_1 = OQ - T_1R = OQ - OR + OT_1 = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (\alpha)$$

$$\left.\begin{aligned} \text{Nun ist } OQ &= b\cos\varphi, \\ OR &= \frac{b}{2\cos\varphi} \\ \text{und } OT_1 &= EC - RC = c - \frac{b}{2}\operatorname{tg}\varphi, \end{aligned}\right\} \text{sub. in } (\alpha), \text{ so giebt es}$$

$$b\cos\varphi - \frac{b}{2\cos\varphi} + c - \frac{b}{2}\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{x^2 + y^2}, \text{ umgeformt}$$

$$[(x^2 + y^2)(2x - b) - 2bx^2]^2 - (by - 2cx)^2(x^2 + y^2) = 0. \quad (1)$$

Für ein negatives c bekommen wir die Spiegelbildkurve in Bezug auf die x-Axe. In der Gleichung (1) ändert bloss das mit c behaftete Glied Vorzeichen. Löst man Gleichung (1) auf, so verschwindet das Glied b^2y^4; dann lässt sich der Faktor x in allen Gliedern wegdividieren und wir erhalten:

$$(x^2 + y^2)^2 x - (x^4 - y^4) b + (x^2 - 3y^2)\frac{b^2x}{4} + (x^2 + y^2)(by - cx)c = 0. \quad (2)$$

Polargleichung: $r = \frac{b\cos 2\varphi \pm (b\sin\varphi - 2c\cos\varphi)}{2\cos\varphi}$

$$= \frac{b\cos 2\varphi}{2\cos\varphi} \pm \left(\frac{b}{2}\operatorname{tg}\varphi - c\right). \quad (2\alpha)$$

c) *Diskussion der Kurvengleichung.*

Die Kurve ist von der 5. Ordnung und hat im Nullpunkt einen 3fachen Punkt. Die Gleichung der *Nullpunktstangenten* lautet:

$$\left(\frac{y}{x}\right)^3 - \frac{3b^2+4c^2}{4bc}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x} + \frac{b^2-4c^2}{4bc} = 0. \quad (3)$$

Spezialfälle:

1. $c = 0$; $\frac{b^2}{4} x(x^2 - 3y^2) = 0.$

α) $x = 0.$

β) $y = \pm\frac{x}{3}\sqrt{3}.$

Die Gleichung der Kurve selbst nimmt die Form an

$$(x^2+y^2)[(x^2+y^2)x - b(x^2-y^2)] + (x^2-3y^2)\frac{b^2x}{4} = 0. \quad (4)$$

Diese Spezialkurve allein ist symmetrisch und zwar in Bezug auf die x-Axe. Nach y aufgelöst erhalten wir

$$y = \pm\sqrt{\frac{3b^2x - 8x^3 \pm bx\sqrt{9b^2-16bx}}{8(x+b)}}.$$

$x = \frac{9b}{16}$ ist der Maximalwert, den x annehmen kann. Für diesen Grenzwert von x wird $y = \pm\frac{3b}{16}\sqrt{0{,}6}$. Die Kurve bildet eine Doppelschleife, welche ganz innerhalb des Grundkreises liegt, denselben im Nullpunkt berührt und aus 2 kongruenten Schleifen besteht, die sich im Punkt $\left(\frac{b}{2}, 0\right)$ schneiden.

2. $c = \frac{b}{2}$; $\left(\frac{y}{x}\right)^3 - 2\left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x} = 0$:

α) $y = 0$; die x-Axe ist Tangente.

β) $y = x$ 2mal; diese Tangente ist eine Selbstberührungstangente, welche die Kurve im Nullpunkt zudem noch schneidet.

Alle Schnittpunkte der Geraden $y = x$ mit der Kurve fallen daher in den Nullpunkt. Von den 3 Doppelpunkten, die im 3fachen Punkte O liegen, ist der eine also ein Selbstberührungspunkt. Die 4 Doppelpunkte, welche die Kurve im Endlichen hat, stecken für $c = \frac{b}{2}$ alle im Nullpunkt.

Die x-Axe schneidet die Kurve in O 3mal und 2mal in den Punkten $\frac{b}{2} \pm c$. Die y-Axe schneidet die Kurve 3mal in O, einmal in $(0, -c)$ und einmal im Unendlichen.

Die imaginären Kreispunkte der Ebene sind Doppelpunkte der Kurve; diese ist somit *rational;* denn sie besitzt 6 Doppelpunkte, 4 im Endlichen und 2 im Unendlichen, so lange c endlich ist.

Die Gerade $x = -b$ ist *Wendeasymptote.* (4)

Die Kurve hat *Wendepunkte.* Ist O Knotenpunkt, so besitzt die Kurve einen Wendepunkt im Unendlichen. Ist O isolierter Punkt, so sind 3 Wendepunkte vorhanden, wovon 2 im Endlichen sind.

Für ein unendlich grosses c besteht die Kurve aus der y-Axe, der doppelt gelegten unendlich fernen Geraden und dem isolierten Punkt in O.

d) Die Lösungen.

Wir suchen die Fusspunkte D der Schenkelhöhen zunächst. Für die Koordinaten von D finden wir die Werte

$$x = \frac{16\,b^3 c^2}{(b^2 + 4\,c^2)^2} \tag{5}$$

$$\text{und} \quad y = \pm \frac{4\,b^2 c\,(4\,c^2 - b^2)}{(b^2 + 4\,c^2)^2}. \tag{6}$$

Das negative Zeichen gilt für die Lösungen der Spiegelbildkurve. Wir bekommen für einen bestimmten Wert von c nur *eine* reelle Lösung; das rührt daher, weil $s + h$ nicht kleiner als $\frac{b}{2}$ und $s - h_b$ nicht grösser als $\frac{b}{2}$ werden kann. Wir bekommen folgende Hauptfälle:

A. $c > \frac{b}{2}$.

Alle Lösungen genügen der Bedingung: $s + h_b = c$.

$$1. \quad c > \frac{b}{2}(1+\sqrt{2}); \quad 0 < x < \frac{b}{2}.$$

Das Dreieck ist spitzwinklig und wird speziell gleichseitig, wenn $c = \frac{b}{2}(2+\sqrt{3})$ ist.

$$2. \quad c = \frac{b}{2}(1+\sqrt{2}); \quad x = \frac{b}{2}.$$

Das Dreieck ist rechtwinklig.

$$3. \quad \frac{b}{2}(1+\sqrt{2}) > c > \frac{b}{2}; \quad \frac{b}{2} < x < b.$$

Das Dreieck ist stumpfwinklig.

$$B. \quad c = \frac{b}{2}, \text{ Grenzfall}; \ x = b.$$

Das Dreieck ist unendlich klein und genügt der Relation:

$$s \pm h_b = c.$$

$$C. \quad c < \frac{b}{2}.$$

Die Dreiecke erfüllen die Bedingung: $s - h_b = 0$.

$$1. \quad \frac{b}{2}(\sqrt{2}-1) < c < \frac{b}{2}; \quad \frac{b}{2} < x < b.$$

Das Dreieck ist stumpfwinklig.

$$2. \quad c = \frac{b}{2}(\sqrt{2}-1); \quad x = \frac{b}{2}.$$

Das Dreieck ist rechtwinklig.

$$3. \quad \frac{b}{2}(\sqrt{2}-1) > c > 0; \quad \frac{b}{2} > x > 0.$$

Das Dreieck ist spitzwinklig und wird für $c = \frac{b}{2}(2-\sqrt{3})$ speziell gleichseitig.

$$4. \quad c = 0; \quad x = 0.$$

Das Dreieck ist unendlich gross, wie es bei A für $c = \infty$ wird.

Für die Basishöhe BC findet man nach bekannter Proportion den Ausdruck:

$$h_b = \frac{4c^2 - b^2}{8c}. \tag{8}$$

Für die Lösungen der Spiegelbildkurve ist dieser Wert negativ zu nehmen.

Für die Dreiecksfläche erhält man nach (8) die Formel

$$F = \frac{(4c^2 - b^2)b}{16c}. \tag{9}$$

§ 28. *Zweites Verfahren. Bestimmung der Spitzen B.*

Diese Aufgabe ist schon elementar ohne Mühe lösbar. Es ist ja $s^2 = \frac{b^2}{4} + h_b^2$. Berücksichtigt man, dass $s \pm h_b = c$, so findet man $$h_b = \pm \frac{4c^2 - b^2}{8c},$$ was mit (8) vollkommen übereinstimmt. Die elementare Lösung auf konstruktivem Wege erfordert 2 verschiedene Konstruktionen, je nachdem die Summe oder Differenz von s und h_b vorliegt. Soll die gleiche Konstruktion beide Fälle einschliessen, so wird eine Hilfskurve nötig. Ihre Gleichung lautet:

$$(x^2 + y^2)4x^2 - (by - 2cx)^2 = 0. \tag{10}$$

Wir haben dieselbe unter V (8), pag. 60, bereits kennen gelernt. In unserm Fall hat die Kurve den Selbstberührungspunkt in O.

Ihre Asymptoten sind $x = \pm \frac{b}{2}$.

Bei den Lösungen handelt es sich um die Schnittpunkte B der Mittelsenkrechten $x = \frac{b}{2}$ mit der Kurve. Für die Ordinate von B finden wir den Wert $$y = h_b = \frac{4c^2 - b^2}{8c}. \tag{11}$$

Dieser Wert stimmt mit (8) überein. Beide Verfahren decken sich somit vollständig in ihren Resultaten.

X.

§ 29. ***Zehnte Aufgabe. Konstruktion eines gleichschenkligen Dreieckes, wenn die Basis und die Summe oder Differenz aus Basishöhe und dem an die Basis angrenzenden Schenkelabschnitt gegeben sind.***

Gegeben: 1. b,

2. $h_b \pm m = \pm c =$ konstant.

Bedingungen: 1. $h_b + m \gtreqless b$,

2. $h_b - m \lesseqgtr 0$.

Die Summe $h_b + m$ wird zum Minimum b beim unendlich kleinen Dreieck, wo $m = b$ und $h_b = 0$ ist. Die Differenz $h_b - m$ wird $= 0$ bei einem spitzwinkligen Dreieck, dessen Höhe

$$h_b = \frac{b}{4}\sqrt{2\sqrt{17} - 2} \text{ ist.}$$

Übersteigt h_b diesen Wert, so ist die Differenz $h_b - m =$ pos. Sinkt dagegen h_b unter diesen Wert, so ist $h_b - m =$ neg. und wird für ein unendlich kleines Dreieck $= - b$.

§ 30. *Erstes Lösungsverfahren. Bestimmung der Spitzen B.*

a) Konstruktion der Hilfskurve.

Es sei $OA = b$ die Basis des Dreiecks. Ziehe den Grundkreis, die Mittelsenkrechte und um O noch einen Hilfskreis mit dem Radius $r = c$. Ein Strahl durch O schneide nun den Grundkreis in Q und den Hilfskreis in H und H_1. Schlage von C aus einen Kreisbogen mit dem Radius $r = QH$ und einen zweiten Bogen mit dem Radius $r = QH_1$. Erhalte im Strahl 4 Schnittpunkte P_1, P_2, P_3 und P_4. Bei sich drehendem Strahl beschreiben die Punkte P die Kurve. Fällt ein Kurvenpunkt P in die Mittelsenkrechte, so ist $QH = CP = CB = h_b$, und da ferner in diesem Fall $OQ = m$ ist, so lässt sich die Relation aufstellen: $h_b \pm m = OH = c$. Somit haben wir in den Schnittpunkten der Kurve mit der Mittelsenkrechten die gesuchten Spitzen B.

b) Ableitung der Kurvengleichung.

Lege in gewohnter Weise das Koordinatensystem. x und y seien die Koordinaten des Kurvenpunktes P_1; dann gilt

$$CP_1 = \sqrt{\left(\frac{b}{2} - x\right)^2 + y^2}. \qquad (\alpha)$$

Nun ist $CP_1 = QH = OH - OQ = c - b\cos\varphi$, eingesetzt in (α) ergiebt $c - b\cos\varphi = \sqrt{\left(\frac{b}{2} - x\right)^2 + y^2}$, umgeformt

$$\left\{(x^2+y^2)\left[y^2+\left(\frac{b}{2}-x\right)^2\right]-c^2(x^2+y^2)-b^2x^2\right\}^2$$
$$-4b^2c^2x^2(x^2+y^2)=0. \quad (1)$$

Polargleichung: $r=\dfrac{b\cos\varphi}{2}$

$$\pm\frac{1}{2}\sqrt{(2b\cos\varphi+b\sin\varphi\pm 2c)(2b\cos\varphi-b\sin\varphi\pm 2c)}. \quad (2)$$

c) *Eigenschaften der Kurve.*

Die Kurve ist von der 8. Ordnung und hat im Nullpunkt einen 4fachen Punkt. Die *Gleichung der Tangenten im Nullpunkt* lautet:

$$y=\pm\frac{x}{b^2-4c^2}\sqrt{3b^4+24b^2c^2-16c^4\pm 16b^3c}. \quad (3)$$

1. $0\leqq c\leqq\frac{b}{2}$; O ist Knotenpunkt; alle 4 Tangenten sind reell.
2. $\frac{b}{2}<c\leqq\frac{3b}{2}$; O ist Doppelpunkt und isolierter Punkt; 2 Tangenten sind reell, 2 imaginär.
3. $c>\frac{3b}{2}$; O ist isolierter Punkt; alle 4 Tangenten sind imaginär.

Die Kurve liegt zur x-Axe symetrisch; denn y kommt nur in geraden Potenzen vor. Die Kurve hat nicht nur in O, sondern auch in den imaginären Kreispunkten der Ebene 4fache Punkte. Für endliche Werte von c liegen keine Kurvenpunkte im Unendlichen; die Kurve kann daher keine Asymptoten haben. Wir betrachten nun die einzelnen Kurvenformen bei veränderlichem c.

1. $c=0$.

Die Kurve zerfällt in 2 zusammenfallende Kurven 4. Ordnung, deren Gleichung die Form hat

$$(x^2+y^2)\left\{y^2+\left(\frac{b}{2}-x\right)^2\right\}-b^2x^2=0. \quad (4)$$

Die Kurve (4) besteht aus einer Doppelschleife mit ungleichen Blättern. Die Tangenten in O sind $y=\pm x\sqrt{3}$. Die y-Axe schneidet die Kurve 2mal in O und 2mal imaginär, die x-Axe 2mal in O und dann noch in $x_3 = \frac{3b}{2}$ und $x_4 = -\frac{b}{2}$. Bei wachsendem c wird die eine Doppelschleife grösser und die andere kleiner und so geht es, bis $c = b/2$ wird. Für diesen Wert von c verliert die kleinere Doppelschleife die kleinere Schleife, welche zu einer Spitze zusammenschrumpft.

2. $c = \frac{b}{2}$.

Die Gleichung der Kurve lautet nun

$$[(x^2+y^2)(x^2+y^2-bx)-b^2x^2]^2-b^4x^2(x^2+y^2)=0. \tag{5}$$

Die positive x-Axe ist Rückkehrtangente und die y-Axe doppelt gelegte Wendetangente. O ist also Doppelinflexionsknoten und Spitze. Alle Schnittpunkte der Axen mit der Kurve sind reell und bleiben von da weg reell. In allgemeiner Form sind die Schnittpunkte mit der x-Axe:

1. $x = 0$, 4mal; 2. $x = \frac{3b}{2} \pm c$; 3. $x = -\frac{b}{2} \pm c$.

Die Schnittpunkte mit der y-Axe:

1. $y = 0$, 4mal; 2. $y = \pm\sqrt{c^2 - \frac{b^2}{4}}$ 2mal.

Wächst nun c von $\frac{b}{2}$ bis b, so verwandelt sich die Doppelschleife in eine 4fache Schleife. Die 2 grössern Schleifen dehnen sich aus in der Richtung der x-Axe, die 2 kleinern längs der y-Axe. Das kleinere innere Blatt löst sich los vom Nullpunkt, nimmt Eiform an, schrumpft mehr und mehr zusammen und wird schliesslich zum isolierten Punkt in C $\left(\frac{b}{2}, 0\right)$.

3. $c = b$.

Die Kurve besteht aus einer in sich geschlossenen Linie, welche in der y-Axe 3 Doppelpunkte bildet, wovon einer in O liegt. Ferner gehören zu ihr noch 2 isolierte Punkte O und C. Die Gleichung der reellen Tangenten in O lautet

$$y = \pm x\sqrt{3}.$$

Diese Spezialkurve ist rational; denn sie besitzt neben den 3 vierfachen Punkten noch 3 Doppelpunkte, was zusammen für 21 Doppelpunkte zählt. Die 3 Doppelpunkte haben die Koordinaten

$$\left(\frac{b}{2}, 0\right), \left(0, \frac{b}{2}\sqrt{3}\right) \text{ und } \left(0, -\frac{b}{2}\sqrt{3}\right).$$

Wächst c über b hinaus, so nähern sich die 2 Schleifen längs der y-Axe der Mittelsenkrechten und um den Punkt C bildet sich wieder ein isoliertes Blättchen. Für einen gewissen Wert von c, den wir nicht ermitteln konnten, hängt sich das kleinere innere Kurvenstück an den andern Kurvenzweig. Wird c noch grösser, so bildet die Kurve 2 Blätter, die sich teilweise überlagern und von denen das eine die Form der Kreiskonchoide hat. Für $c = \frac{3b}{2}$ hat das konchoidenähnliche Blatt in O eine Spitze mit der negativen x-Axe als Rückkehrtangente.

$$4. \quad c > \frac{3b}{2}.$$

Die Kurve hat in O keine reellen Tangenten mehr. Der Mittelpunkt ist 2fach isolierter Punkte. Die Kurve bildet 2 Blätter, die sich teilweise überlagern, was bei weiter wachsendem c so bleibt.

Für ein unendlich grosses c besteht die Kurve aus dem doppelt gelegten unendlich grossen Kreis und dem 2fach isolierten Punkt in O.

d) Die Lösungen.

Es handelt sich um die Bestimmung der Spitzen B. Für jeden Wert von c giebt es 4 Schnittpunkte B der Kurve mit der Mittelsenkrechten. Wir bekommen also immer 4 reelle Lösungen, welche nach Konstruktion paarweise symmetrisch sind. Die allgemeine Lösung stösst auf Schwierigkeiten. Setzt man jedoch in der Kurvengleichung (1) für x den Wert $\frac{b}{2}$ und für y Spezialwerte wie $y = 0$, $y = \frac{b}{2}$, $y = \frac{b}{2}\sqrt{3}$ etc. ein, so kann man für besondere Lösungen den zugehörigen Wert von c berechnen. Ehe wir die Hauptfälle bringen, bemerken wir noch, dass ein Dreieckspaar immer spitzwinklig ist, das andere dagegen jede beliebige Form annehmen kann.

1. $c = 0$; $y = h_b = \pm \frac{b}{4} \sqrt{-2 + 2\sqrt{17}}$, 2mal.

Alle 4 Dreiecke sind spitzwinklig, kongruent und fallen paarweise zusammen und sind paarweise symmetrisch.

2. $0 < c < (\sqrt{2} - 1)\frac{b}{2}$;

ein Paar symmetrischer Lösungen wird spitzwinkliger, das andere Paar weniger spitzwinklig.

3. $c = (\sqrt{2} - 1)\frac{b}{2}$.

Das zweite Paar wird rechtwinklig.

4. $(\sqrt{2} - 1)\frac{b}{2} < c < b$.

Das zweite Paar ist stumpfwinklig. Für $c = \frac{b}{2}(\sqrt{3} - 1)$ wird das erste Paar gleichseitig.

5. $c = b$.

Das zweite Paar ist unendlich klein.

6. $b < c < (\sqrt{2} + 1)\frac{b}{2}$.

Das zweite Paar ist wieder stumpfwinklig.

7. $c = (\sqrt{2} + 1)\frac{b}{2}$; zweites Paar ist rechtwinklig.

8. $c > (\sqrt{2} + 1)\frac{b}{2}$; auch das zweite Paar ist spitzwinklig und wird speziell für $c = (\sqrt{3} + 1)\frac{b}{2}$ gleichseitig.

9. $c = \infty$.

Alle 4 Dreiecke sind unendlich gross.

§ 31. *Zweites Lösungsverfahren.* *Bestimmung der Schnittpunkte D.* Bedingungen wie in § 29.

Wir bekommen eine unächte Kurve 8. Ordnung als Hilfskurve. Ihre Gleichung hat die Form

$$\{4x^2(x^2+y^2) - (2cx - by)^2\}\{4x^2 \cdot (x^2+y^2) - (2cx + by)^2\} = 0. \quad (6)$$

Die Kurve (6) zerfällt in die 2 Kurven 4. Ordnung:

$$4x^2(x^2+y^2) - (2cx - by)^2 = 0 \quad (7)$$

und

$$4x^2(x^2+y^2) - (2cx + by)^2 = 0. \quad (8)$$

Die beiden Teilkurven sind Spiegelbilder voneinander in Bezug auf beide Axen. Wir haben es daher im Grund nur mit einer Kurve 4. Ordnung zu tun. Sie ist uns in der Form begegnet in $IX_{(10)}$, pag. 85, und wurde beschrieben im V. Abschnitt. Die Lösungen lassen sich ebenfalls nicht allgemein bestimmen. Man kann nur für Spezialdreiecke die zugehörigen Werte von c berechnen. Man findet ganz dieselben Resultate wie oben. Zu jeder Teilkurve gehören zwei ungleiche Lösungen mit Ausnahme des Falles, da $c = o$ ist, wo dieselben zusammenfallen. Die Dreiecke, die zu den zwei Teilkurven gehören, sind Spiegelbilder voneinander in Bezug auf die x-Axe.

In allen Fällen, da $c < b$ ist, entsprechen die Dreiecke der Relation: $h_b - m = \pm c$. Ist $c = b$, so gilt $h_b \pm m = \pm c$. Ist $c > b$, so finden wir die Bedingung erfüllt: $h_b \pm m = + c$ (vergleiche § 29).

§ 32. *Uebersichtliche Zusammenstellung der Resultate.*

I.

Gegeben: b und $h_b \pm n = c$.

Lösungen:

1. $c > \frac{b}{2}\sqrt{6\sqrt{3}-9}$; 1 reelles Dreieck;
2. $c \overline{\overline{<}} \frac{b}{2}\sqrt{6\sqrt{3}-9}$; 3 reelle Dreiecke.

II.

Gegeben: b und $s \pm n = c$.

Lösungen:

Für jeden Wert von $c \neq 0$ 2 reelle, symmetrische Dreiecke. Für $c = 0$ 4 reelle, zusammenfallende Dreiecke, die unendlich klein sind.

III.

Gegeben: b und $h_s \pm n = c$.

Lösungen:

1. $c > \frac{b}{2}\sqrt{3\sqrt[3]{13+16\sqrt{2}} + 3\sqrt[3]{13-16\sqrt{2}} - 1}$; 2 reelle verschiedene Dreiecke;

2. $c \gtreqless \frac{b}{2}\sqrt{\quad\text{obiger Ausdruck}\quad}$; 4 reelle, verschiedene Dreiecke.

IV.

Gegeben: b und $m \pm n = c$.
Lösungen:

1. $c > \frac{3b}{2}$; 2 reelle symmetrische Dreiecke;
2. $c \gtreqless \frac{3b}{2}$; 4 reelle, paarweise symmetrische Dreiecke.

V.

Gegeben: b und $h_b \pm h_s = c$.
Lösungen:

1. $c > \frac{b}{2}\sqrt{3(1 + \sqrt[3]{4} - 2\sqrt[3]{2})}$; 2 reelle verschiedene Dreiecke.
2. $c \gtreqless$ do. 4 do.

VI.

Gegeben: b und $s \pm h_s = c$.
Lösungen:

1. $c > 0$; 2 reelle verschiedene Dreiecke;
2. $c = 0$; 4 zusammenfallende rechtwinklige Dreiecke.

VII.

Gegeben: b und $s \pm m = c$.
Lösungen:

1. $c > \frac{3b}{2}$; 4 reelle, paarweise symmetrische Dreiecke;
2. $\frac{3b}{2} \gtreqless c \geqq b\sqrt{2}$; 6 reelle, paarweise symmetrische Dreiecke;
3. $b\sqrt{2} > c > \frac{b}{2}$; 2 reelle, symmetrische Dreiecke;
4. $c \gtreqless \frac{b}{2}$; 4 reelle, paarweise symmetrische Dreiecke.

VIII.

Gegeben: b und $h_s \pm m = c$.
Lösungen:
1. $c > b\sqrt{2}$; keine reellen Dreiecke;
2. $c \overline{\overline{<}} b\sqrt{2}$; 2 reelle Dreiecke.

IX.

Gegeben: b und $s \pm h_b = c$.
Lösungen: Für jeden Wert von c 1 reelles Dreieck.

X.

Gegeben: b und $h_b \pm m = c$.
Lösungen: Für jeden Wert von c 4 reelle, paarweise symmetrische Dreiecke.

Nur bei einem Fall (VIII) kann es vorkommen, dass keine reelle Lösung möglich ist. Als Bestimmungsgrösse tritt hier $h_s \pm m = c$ auf. h_s und m sind nun gerade die Dreiecksgrössen, die bei endlicher Basis nicht unendlich werden können; das Maximum für beide ist b.

Für *Spezialdreiecke* giebt es folgende Wertetafel für c:

Fälle	unendlich kleines $\triangle$	rechtwinkliges $\triangle$	gleichseitiges $\triangle$	unendlich grosses $\triangle$
I. $h_b \pm n = c$	$c = \frac{b}{2}$	$c = \frac{b}{2}$	$c = \frac{b}{2}\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$	$c = \infty$
II. $s \pm n = c$	$= 0$	$= \frac{b}{2}\sqrt{2}$	$= \frac{3b}{2}$	$= \infty$
III. $h_s \pm n = c$	$= \frac{b}{2}$	$= \frac{b}{2}\sqrt{2}$	$= \frac{b}{2}(\sqrt{3} + 1)$	$= \infty$
IV. $m \pm n = c$	$= \frac{3b}{2}$	$= \frac{b}{2}\sqrt{2}$	$= 0$	$= \infty$
V. $h_b \pm h_s = c$	$= 0$	$= \frac{b}{2}(\sqrt{2} \pm 1)$	$= 0$ od. $= b\sqrt{3}$	$= \infty$
VI. $s \pm h_s = c$	$= \frac{b}{2}$	$= 0$ od. $= b\sqrt{2}$	$= \frac{b}{2}(2 \pm \sqrt{3})$	$= \infty$
VII. $s \pm m = c$	$= \frac{b}{2}$ od. $= \frac{3b}{2}$	$= 0$ od. $= b\sqrt{2}$	$= \frac{b}{2}$ od. $= \frac{3b}{2}$	$= \infty$
VIII. $h_s \pm m = c$	$= b$	$= 0$ od. $= b\sqrt{2}$	$= \frac{b}{2}(\sqrt{3} \pm 1)$	$= b$
IX. $s \pm h_b = c$	$= \frac{b}{2}$	$= \frac{b}{2}(\sqrt{2} \pm 1)$	$= \frac{b}{2}(2 \pm \sqrt{3})$	$= 0$ od. $= \infty$
X. $h_b \pm m = c$	$= b$	$= \frac{b}{2}(\sqrt{2} \pm 1)$	$= \frac{b}{2}(\sqrt{3} + 1)$	$= \infty$

Unter den 13 Kurven 4. Ordnung, die als Hilfskurven auftreten, finden wir 6mal die Kreiskonchoide, 3mal die Konchoide des Nikomedes und 3mal die Kurve, die bei V (D gesucht) zum erstenmal auftaucht; siehe Tafel III, Fig. 10. Als Spezialfall für $c = 0$ erscheint 2mal die Strophoide, nämlich bei I und IV (D gesucht). Andere Spezialfälle für $c = 0$ sind strophoidenähnlich wie I und VIII (B gesucht). Für $c = 0$ zerfallen alle Kurven mit Ausnahme von I (B gesucht), welche für den Wert $c = \frac{b}{2}$ degeneriert. Beim Zerfallen treten Kreise auf ausser bei den Konchoiden noch bei V und I (B gesucht).

Im festen Eckpunkt O des Dreiecks besitzen alle Kurven einen mehrfachen Punkt mit Ausnahme von I_2 und V_7. Bei I_2 bewegt sich der mehrfache Punkt auf der Mittelsenkrechten, bei V_7 ist er konstant in A.

Als ein kleines Nebenresultat meiner Arbeit, die ich hiemit abbreche, betrachte ich das, dass es mir gelungen ist, für die zwei bekanntern Konchoiden neue Konstruktionsverfahren zu finden.

Es bleibt mir nur noch die angenehme Pflicht, meinen hochgeehrten Lehrern, den Herren Prof. Dr. Graf, Prof. Dr. Huber, dessen freundliche Ratschläge mir bei Fertigstellung dieser Arbeit sehr wertvoll gewesen, Prof. Dr. Forster, Prof. Dr. Moser und PD Dr. Gruner für das mir während meiner Studienzeit stets entgegengebrachte Wohlwollen den herzlichsten Dank auszusprechen.
