II.

§ 5. *Zweite Aufgabe: Ein gleichschenkliges Dreieck zu konstruieren, wenn die Basis und die Summe oder Differenz aus Schenkel und dem an die Spitze angrenzenden Schenkelabschnitt gegeben sind.*

Gegeben: 1. b,

2. $s \pm n = \pm c =$ konstant.

Bedingungen:

1. $s + n \geqq \frac{b}{2} \sqrt{2}$,

2. $s - n \leqq \frac{b}{2} \sqrt{2} =$ pos.

Im rechtwinkligen Dreieck ist $n = 0$ und $s = \frac{b}{2} \sqrt{2}$. Wird das Dreieck spitzwinklig, so wachsen sowohl s als auch n; also muss $s + n > \frac{b}{2} \sqrt{2}$ sein. Für ein stumpfwinkliges Dreieck ziehen wir den Grundkreis und finden, dass $s + n > \frac{b}{2} \sqrt{2}$ wird nach dem Satz: In einem Kreise gehört zu einem grössern Bogen auch die grössere Sehne. $\frac{b}{2} \sqrt{2}$ ist somit das Minimum, das der Wert der Summe $s + n$ annehmen kann.

Was die 2. Bedingung betrifft, so erreicht die Differenz $s - n$ einen maximalen Wert beim rechtwinkligen Dreieck, wo

$$s - n = s - 0 = \frac{b}{2} \sqrt{2} \text{ ist.}$$

Bei einem spitzwinkligen Dreieck ist nämlich $s - n < \frac{b}{2} \sqrt{2}$ nach dem oben erwähnten Sehnensatz, und bei einem stumpfwinkligen Dreieck ist $\frac{b}{2} \sqrt{2}$ schon $>$ als s allein, umsomehr also $\frac{b}{2} \sqrt{2} > s - n$.

§ 6. *Erstes Lösungsverfahren. Bestimmung des Punktes D.*

a) Konstruktion der Hilfskurve. Taf. I, Fig. 4.

Mache OA gleich der gegebenen Basis b. Ziehe die Mittelsenkrechte MM_1. Schlage um O einen Hilfskreis, dessen Radius

$r = OH$ gleich der gegebenen Konstanten c ist. Ziehe durch O einen Strahl, welcher die Mittelsenkrechte in R und den Hilfskreis in H und H′ schneidet. Mache $RP = RH$

und $RP' = RH'$.

Dreht sich nun der Strahl OR um O, so beschreiben die Punkte P und P′ die Kurve. Die Schnittpunkte dieser Kurve mit dem Grundkreis liefern die gesuchten Fusspunkte D der Schenkelhöhe. Es ist nämlich $c = OH = OR + RH$. OR entspricht dem s; folglich muss $RH = RP$ den Schenkelabschnitt n bedeuten. Dieser Schenkelabschnitt erstreckt sich in Wirklichkeit nur von der Mittelsenkrechten bis zum Grundkreis. Wenn also der Kurvenpunkt P auf den Grundkreis fällt, so ist $RP = n$, $OR = s$, und wir haben eine Lösung der Aufgabe.

Schneidet der Strahl eines Kurvenpunktes P die Mittelsenkrechte innerhalb des Hilfskreises O, so genügt P der Bedingung $$OR + RP = s + n = OH = c.$$

Für Kurvenpunkte P, deren entsprechende Strahlen die Mittelsenkrechte ausserhalb des Hilfskreises O schneiden, gilt die Relation: $$OR - RP = s - n = OH = c.$$

Für alle Strahlen haben wir endlich noch Kurvenpunkte P′, welche der Relation entsprechen:
$$RP' - OR = n - s = OH' = c.$$

Weil in einem gleichschenkligen Dreieck der an die Spitze grenzende Schenkelabschnitt n niemals grösser, höchstens gleich s werden kann, so kommt natürlich der Fall $n - s = c$ für die Lösung unserer Aufgabe nicht in Betracht. Der Kurvenzweig, auf dem die Punkte P′ liegen, liefert daher keine Lösungen unserer Aufgabe.

b) Ableitung der Kurvengleichung.

Wir wählen wieder O zum Nullpunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystems und legen durch OA die positive x-Axe. Es seien x und y die Koordinaten eines Kurvenpunktes P, dessen Strahl den Richtungswinkel φ habe. Dann ist

$$y = OP \cdot \sin\varphi; \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\alpha)$$

$$OP = OH - 2RP = c - 2RP;$$

somit $$y = (c - 2RP) \sin\varphi \cdots\cdots\cdots (\beta)$$

Ziehe $PN \perp MM_1$, so ist

$$PN = \frac{b}{2} - x.$$

$$RP = \frac{PN}{\cos\varphi} = \frac{\frac{b}{2} - x}{\cos\varphi}, \text{ sub. in } (\beta);$$

wir erhalten $$y = \left(c - \frac{(\frac{b}{2} - x)2}{\cos\varphi}\right) \sin\varphi;$$

$$y = (c \cos\varphi - b + 2x) \frac{y}{x};$$

$$\frac{cx}{\sqrt{x^2 + y^2}} = b - x;$$

$$(x^2 + y^2)(b - x)^2 - c^2 x^2 = 0 \quad . \tag{1}$$

In Polarkoordinaten: $$r = \frac{b}{\cos\varphi} \mp c. \tag{1a}$$

Unsere Kurve ist somit die Konchoide des Nikomedes.

Die x-Axe ist Symmetrieaxe und die Asymptote $x = b = LA$ die Leitlinie.

$c > b$; der Nullpunkt ist Doppelpunkt;
$c = b$; » » » Spitze;
$c < b$; » » » isolierter Punkt.

Es bleibt nur noch nachzuweisen, dass nach der gewöhnlichen Definition der Nikomedischen Konchoide

$$PV = VP' = c \text{ ist.}$$

Nach Konstruktion ist

$$RP' - OR = c.$$

Nun ist $$OR = RV,$$

also $$RP' - RV = VP' = c. \tag{γ}$$

Ferner ist nach Konstruktion

$$OR + PR = c;$$

für OR kann man RV setzen; also ist

$$RV + RP = PV = c. \tag{δ}$$

Aus (γ) und (δ) folgt, dass

$$PV = P'V = c \text{ ist.}$$

Wir haben also die Nikomedische Konchoide nicht mit Hilfe der Leitlinie, sondern mit Hilfe der zwischen dem festen Punkt O und der Leitlinie gelegenen Mittelparallelen MM_1 und einem

Kreis konstruiert. Die Basis b des zu konstruierenden gleichschenkligen Dreieckes ist der Abstand des festen Punktes O von der Leitlinie A L.

c) Die Lösungen unserer Aufgabe.

Wir haben die Schnittpunkte D der Kurve mit dem Grundkreis zu bestimmen. Die Koordinaten der Punkte D sind die Wurzeln des Gleichungssystems:

1. $(x^2+y^2)(x-b)^2-c^2x^2=0$; Gleichung der Kurve.
2. $x^2-bx+y^2 \quad =0$; » des Grundkreises.

Aus (2) folgt $y=\sqrt{x(b-x)}$, sub. in (1); wir erhalten

$$bx(x-b)^2-c^2x^2=0,$$

oder

$$b(x-b)^2-c^2x=0. \tag{2}$$

Die Wurzeln dieser quadratischen Gleichung sind die Abscissen der Schnittpunkte D. Wir erhalten statt 8 Schnittpunkte nur zwei, weil beide Kurven durch die unendlich fernen imaginären Kreispunkte der Ebene gehen, weil ferner zwei Schnittpunkte in den Nullpunkt fallen und weil endlich y nur in der 2. Potenz vorkommt.

Gleichung (2) nach x aufgelöst giebt

$$x=\frac{2b^2+c^2\pm c\sqrt{4b^2+c^2}}{2b}.$$

Nun ist $y=\sqrt{x(b-x)}$;

x darf also höchstens $=$ b werden; sonst werden die Schnittpunkte imaginär. Dies folgt übrigens schon aus der Konstruktion. Wir können daher im Ausdruck für x, den Spezialfall $c=0$ ausgenommen, nur das negative Zeichen der Wurzel brauchen. Es wird somit der Ausdruck für die Abscisse von D

$$x=\frac{2b^2+c^2-c\sqrt{4b^2+c^2}}{2b}; \text{ dann wird} \tag{3}$$

$$y=\pm\frac{1}{2b}\sqrt{2c\left\{(b^2+c^2)\sqrt{4b^2+c^2}-(3b^2c+c^3)\right\}}. \tag{4}$$

Weil das Wurzelzeichen unter der Wurzel nur eindeutig genommen werden darf, so erhalten wir für y 2 Werte, die sich nur im Vorzeichen unterscheiden. Wir erhalten somit 2 reelle Schnittpunkte D, welche symmetrisch zur x-Axe liegen. Dies bedingt ferner als Lösungen 2 gleichschenklige Dreiecke, welche kongruent sind und eine symmetrische Lage zur gemeinsamen Basis b haben.

Bei variablem c erhalten wir folgende Hauptfälle unter den Lösungen:

$$\text{A.}\quad c > \frac{b}{2}\sqrt{2}.$$

Die Abscisse der Schnittpunkte D und D_1 ist $< \frac{b}{2}$. Die entstehenden Dreiecke sind somit spitzwinklig und genügen der Bedingung:

$$s + n = c.$$

1. Unterfall $c > \frac{3b}{2}$.

Der Dreieckswinkel an der Spitze bei B ist $< 60^0$. Ist speziell $c = \infty$, so fallen die Punkte D und D_1 zusammen in den Nullpunkt. Es entstehen 2 unendlich grosse Dreiecke.

2. Unterfall $c = \frac{3b}{2}$.

Es wird $x = \frac{b}{4}$ und $y = \pm \frac{b}{2}\sqrt{3}$.

Die Dreiecke sind gleichseitig.

3. Unterfall $\frac{3b}{2} > c > \frac{b}{2}\sqrt{2}$. Taf. I, Fig. 4.

Spitzwinklige Dreiecke, deren Winkel an der Spitze zwischen 60^0 und 90^0 liegt.

$$\text{B.}\quad c = \frac{b}{2}\sqrt{2} = \text{Grenzfall.}$$

Es wird $x = \frac{b}{2}$ und $y = \pm \frac{b}{2}$.

Die Dreiecke sind rechtwinklig und erfüllen die Bedingung:

$$s \pm n = c; \quad n = 0.$$

$$\text{C.}\quad c < \frac{b}{2}\sqrt{2}.$$

Es wird $x > \frac{b}{2}$; dies hat zur Folge, dass die Dreiecke stumpfwinklig werden. Für dieselben gilt die Relation:

$$s - n = c.$$

Wird speziell $c = 0$, so fallen die Schnittpunkte D und D^1 zusammen auf A (b, 0), und da jeder doppelt zu nehmen ist, so erhalten wir als Lösungen 4 unendlich kleine Dreiecke, die sich auf die Basis reduzieren.

§ 7. *Zweites Lösungsverfahren. Bestimmung der Punkte B.*

Es gelten die Voraussetzungen des § 5.

a) Konstruktion der Hilfskurve. (Ohne Figur.) Mache $OA =$ der gegeben Basis b. Ziehe den Grundkreis. Schlage ferner einen Hilfskreis um O, dessen Radius $r = OH = c$, der gegebenen Konstanten. Lege nun durch O einen Strahl, welcher den Grundkreis in Q und den Hilfskreis in H und H_1 schneidet. Halbiere die Strecken HQ und H_1Q in den Punkten P und P_1. Lassen wir den Strahl OQ um O sich drehen, so erzeugen die Punkte P und P_1 die gesuchte Kurve.

Es entspricht nun die Strecke OP, resp. OP_1 dem Schenkel s; folglich muss die Strecke PQ, resp. P_1Q dem Schenkelabschnitt n entsprechen, da n gleich dem Abstand des Schenkelendpunktes vom Grundkreis ist, gemessen auf dem zugehörigen Strahl.

Die Kurve ist der geometrische Ort eines Strahlpunktes, dessen Summe oder Differenz der Abstände vom Ursprung O und dem Grundkreis eine Konstante ist.

Da OP dem Schenkel s und P dem Endpunkt desselben entspricht, so haben wir in den Schnittpunkten der Kurve mit der Mittelsenkrechten die gesuchten Punkte B. Die innere Schleife liefert nur im Spezialfall $c = 0$ Schnittpunkte.

b) Abteilung der Kurvengleichung.

Wir erhalten, indem wir analog wie früher vorgehen, die

Gleichung: $$\left(x^2 + y^2 - \frac{b}{2}x\right)^2 - \frac{c^2}{4}(x^2 + y^2) = 0. \qquad (5)$$

Dies ist die Gleichung einer Kreiskonchoide.

$\frac{b}{2}$ ist der Durchmesser des erzeugenden festen Kreises und $\frac{c}{2}$ der konstante Abstand der Kurvenpunkte vom Grundkreis, gemessen auf den zugehörigen Strahlen. Die x-Axe ist Symmetrieaxe.

$c < b$; Nullpunkt ist Doppelpunkt,
$c = b$; » » Spitze,
die positive x-Axe ist Rückkehrtangente.

$c > b$; Nullpunkt ist isolierter Punkt.

In Polarkoordinaten lautet die Gleichung der Kurve:

$$r = \frac{b}{2} \cos\varphi \pm \frac{c}{2}. \tag{6}$$

c) Die Lösungen der Aufgabe.

Wir ziehen die Mittelsenkrechte, da es sich um deren Schnittpunkte B mit der Kurve handelt. Die Abscisse aller dieser Punkte ist $x = \frac{b}{2}$. Führt man diesen Wert für x in der Kurvengleichung (5) ein, so erhält man eine Gleichung in y, deren Wurzeln die Ordinaten der Schnittpunkte B, der Spitzen der gesuchten gleichschenkligen Dreiecke sind. Diese Gleichung lautet:

$$y^4 - \frac{c^2 y^2}{4} - \frac{b^2 c^2}{16} = 0.$$

Die Gleichung, zunächst nach y^2 aufgelöst, ergiebt

$$y^2 = \frac{c^2 \pm c\sqrt{4b^2 + c^2}}{8}.$$

Da y nicht imaginär werden darf, so ist nur das positive Zeichen der Wurzel zu gebrauchen mit Ausnahme des Spezialfalles $c = 0$; daraus folgt

$$y = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c^2 + c\sqrt{4b^2 + c^2}}{2}}. \tag{7}$$

Man erhält demnach 2 Schnittpunkte, welche symmetrisch zur x-Axe liegen. Dies bedingt als Lösungen im allgemeinen 2 kongruente symmetrisch zur Basis gelegene Dreiecke. Die Lösungen sind spitzwinklig, rechtwinklig oder stumpfwinklig, je nachdem

$$c \gtreqless \frac{b}{2}\sqrt{2} \text{ ist.}$$

Das zweite Lösungsverfahren führt zu denselben Ergebnissen wie das erste. (Vergleiche damit die Resultate auf pag. 106 und 107.) Wir verzichten darauf, die Übereinstimmung für Spezialfälle nachzuweisen. Wir erlauben uns nur noch, die allgemeine Formel für die Dreiecksfläche zu bringen. Es wird

$$F_{AOB} = \frac{b}{4}\sqrt{\frac{c^2 + c\sqrt{4b^2 + c^2}}{2}}. \qquad (8)$$

Speziell für $c = \frac{3b}{2}$ entsteht ein gleichseitiges Dreieck; es wird

$$F = \frac{b}{4}\sqrt{\frac{\frac{9b^2}{4} + \frac{3b}{2}\sqrt{4b^2 + \frac{9b^2}{4}}}{2}} = \frac{b^2}{4}\sqrt{3}.$$

III.

§ 8. *Dritte Aufgabe: Konstruktion eines gleichschenkligen Dreiecks, wenn die Basis und die Summe oder Differenz aus Schenkelhöhe und dem an die Spitze angrenzenden Schenkelabschnitt gegeben sind.*

Gegeben: 1. b;

2. $h_s \pm n = \pm c =$ konstant.

Bedingungen: 1. $h_s + n \geqq \frac{b}{2}$;

2. $h_s - n \underset{<}{\overset{=}{}} + \frac{b}{2}\sqrt{2}$.

Die Summe $h_s + n$ wird ein Mimimum bei einem unendlich kleinen Dreieck; denn da ist $h_s = 0$ und $n = \frac{b}{2}$, also $h_s + n = \frac{b}{2}$.

Die Differenz $h_s - n$ erreicht das Maximum bei einem rechtwinkligen Dreieck, bei welchen $h_s = \frac{b}{2}\sqrt{2}$ und $n = 0$, also $h_s - n = \frac{b}{2}\sqrt{2}$.

§ 9. *Erstes Lösungsverfahren: Bestimmung der Spitze B des gleichschenkligen Dreiecks.*

a) Konstruktion der Hilfskurve.

Es sei (siehe Figur 6, Tafel II) OA die gegebene Basis b. Ziehe den Grundkreis. Schlage ferner um A einen Hilfskreis, dessen Radius $r = AH = c$ ist. Lege durch O einen Strahl, welcher den Grundkreis in Q schneidet. Fälle von A aus ein Lot auf diesen Strahl, das durch Q gehen muss und das den Hilfskreis in H und H_1 schneidet. Trage nun auf dem Strahl OQ