hören, werden immer weniger spitzwinklig. Für $c = 0$ ist $x_1 = x_2$ und die Dreiecke fallen als gleichseitige zusammen.

V.

§ 14. *Fünfte Aufgabe: Ein gleichschenkliges Dreieck zu konstruieren, von welchem die Basis und die Summe oder Differenz der beiden Dreieckshöhen gegeben sind.*

Gegeben: 1. b;
2. $h_b \pm h_s = \pm c =$ konstant.

Bedingung: $\infty \geqq h_b + h_s \geqq 0$; $\infty \geqq h_b - h_s \gtreqless 0$.

Für ein unendlich kleines Dreieck verschwinden beide Höhen, also Summe und Differenz $= 0$; für ein unendlich grosses Dreieck ist $h_b = \infty$ und $h_s = b$, somit Summe und Differenz $= \infty$. Die Differenz $h_b - h_s$ wird ein zweitesmal zu Null, wenn der Basiswinkel 60^0 misst. Ist er kleiner als 60^0, so ist $h_b - h_s$ $=$ neg., ist er grösser als 60^0, so ist $h_b - h_s =$ pos.

§ 15. *Erstes Lösungsverfahren. Bestimmung der Punkte B.*

a) Konstruktion der Kurve. Taf. II, Fig. 9.

$OA = b$ sei die Basis des gleichschenkligen Dreiecks. Wir ziehen den Grundkreis und die Mittelsenkrechte MM_1. Auf MM_1 tragen wir c von C aus nach E ab. Es gehe durch O ein Strahl, der den Grundkreis in Q schneidet. Von E aus schlagen wir nun mit dem Radius $r = AQ$ einen Kreisbogen, der den Strahl OQ in P_1 und P_2 schneidet. Der geometrische Ort des Punktes P ist die Hilfskurve. Dieselbe kann daher folgendermassen definiert werden:

Zieht man durch O Strahlen, so ist die Kurve der geometrische Ort eines Strahlenpunktes, der von einem festen Punkt E der Mittelsenkrechten denselben Abstand hat wie der Strahl selber vom festen Punkt A. Fällt ein Kurvenpunkt in die Mittelsenkrechte, so ist

einerseits $EC \pm PE = h$;
andererseits ist $EC \pm PE = c \pm h_s$; folglich
$h_b = c \pm h_s$, d. h. wir haben

eine Lösung vor uns. Die Schnittpunkte der Kurve mit der Mittelsenkrechten ergeben daher die gesuchten Punkte B.

b) Ableitung der Kurvengleichung.

Wir legen durch OA die x-Axe und durch O die y-Axe. x und y seien die rechtwinkligen Koordinaten eines Kurvenpunktes P_1. EN sei $\parallel$ AO gezogen; dann ist

$$EP_1 = \sqrt{\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + (y - c)^2}; \qquad (\alpha)$$

$EP_1 = AQ = b \sin\varphi$, in (α) eingesetzt, so giebt es

$$b \sin\varphi = \sqrt{\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + (y - c)^2}, \text{ umgeformt}$$

$$(x^2 + y^2)\left[\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + (y - c)^2\right] - b^2 y^2 = 0. \qquad (1)$$

c) Diskussion der Kurvengleichung.

Die Kurve ist von 4. Ordnung und hat im Nullpunkt einen Doppelpunkt. Die Gleichung der *Tangenten im Nullpunkt* lautet:

$$(x^2 + y^2)\left(\frac{b^2}{4} + c^2\right) - b^2 y^2 = 0;$$

$$y = \pm x \sqrt{\frac{b^2 + 4c^2}{3b^2 - 4c^2}}. \qquad (2)$$

Spezialfälle:

1. $c = 0$;

   $y = \pm \frac{x}{3}\sqrt{3}$; die Nullpunktstangenten bilden mit der x-Axe Winkel von $\pm\, 30^0$.

2. $c = \frac{b}{2}$;

   $y = \pm x$.

Richtungswinkel der Tangenten $= \pm\, 45^0$. Die Tangente $y = -x$ ist Wendetangente.

3. $c = \frac{b}{2}\sqrt{2}$;

   $y = \pm x\sqrt{3}$, Richtungswinkel $= \pm\, 60^0$.

4. $c = \frac{b}{2}\sqrt{3}$;

   $x = 0$ 2mal.

Die y-Axe ist Rückkehrtangente und der Nullpunkt Spitze.

5. $c > \frac{b}{2}\sqrt{3}$.

Die Tangenten werden imaginär, und der Nullpunkt wird zum isolierten Punkt.

Schnittpunkte mit der y-Axe: Setze $x = 0$ und erhalte

1. $y_1 = y_2 = 0$ und 2. $y_{3,4} = c \pm \frac{b}{2}\sqrt{3}$.

Schnittpunkte mit der x-Axe: Setze $y = 0$ und finde

1. $x_1 = x_2 = 0$ und 2. $x_{3,4} = \frac{b}{2} \pm ci$.

So lange c von 0 verschieden ist, schneidet die Kurve die x-Axe nur im Doppelpunkt O. Ist $c = 0$, so werden auch die beiden andern Schnittpunkte reell und fallen in den Punkt C, welcher Doppelpunkt der Kurve wird.

Die imaginären Kreispunkte der Ebene sind Doppelpunkte der Kurve; denn es ist

$$U_n = (x^2 + y^2)^2.$$

Reelle Punkte hat die Kurve im Unendlichen nicht, daher auch keine Asymptoten.

Die Kurve ist *rational;* denn sie hat 3 Doppelpunkte. Für $c = 0$ besitzt sie 4 Doppelpunkte und zerfällt, wie wir noch sehen werden.

Für $c = 0$ nimmt Gleichung (1) die Form an:

$$(x^2 + y^2)\left[\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + y^2\right] - b^2 y^2 = 0;$$

das Gleichungspolynom lässt sich in 2 Faktoren zerlegen; wir erhalten:

$$\left(x^2 + y^2 - \frac{bx}{2} + \frac{by}{2}\sqrt{3}\right)\left(x^2 + y^2 - \frac{bx}{2} - \frac{by}{2}\sqrt{3}\right) = 0; \quad (3)$$

daraus folgt

$$1. \quad x^2 + y^2 - \frac{bx}{2} - \frac{by}{2}\sqrt{3} = 0$$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{oder} & \left(x - \frac{b}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{4}\sqrt{3}\right)^2 = \frac{b^2}{4}, & (\beta) \\ \text{und} \quad 2. & \left(x - \frac{b}{4}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{4}\sqrt{3}\right)^2 = \frac{b^2}{4}. & (\gamma) \end{array}\right\} \quad (4)$$

Die Kurve zerfällt in 2 Kreise (β) und (γ), deren Mittelpunktskoordinaten: $\left(\frac{b}{4}, \frac{b}{4}\sqrt{3}\right)$ und $\left(\frac{b}{4}, -\frac{b}{4}\sqrt{3}\right)$ sind.

Beide Kreise haben den Radius $r = \frac{b}{2}$. Beide Kreise schneiden sich in O und C.

Für ein unendlich grosses c besteht die Kurve aus der doppelt gelegten unendlich fernen Geraden und dem Nullpunkt als isoliertem Punkt.

Negative c erzeugen die gleichen Kurven wie positive c; nur liegen die Gebilde symmetrisch zueinander.

d) Die Lösungen.

Wir suchen die Spitzen B der gleichschenkligen Dreiecke. Alle haben die Abscisse $x = \frac{b}{2}$. Setzen wir diesen Wert in der Kurvengleichung (1) ein, so erhalten wir

$$\left(y^2 + \frac{b^2}{4}\right)(y^2 - 2cy + c^2) - b^2y^2 = 0. \tag{5}$$

Die Wurzeln dieser Gleichung in y sind die Ordinaten der Schnittpunkte B. Lösen wir (5) auf, so finden wir zunächst folgende kubische Hilfsgleichung:

$$v^3 - \frac{9b^4 - 24b^2c^2 + 16c^4}{48}\,v + \frac{27b^6 - 972b^4c^2 + 144b^2c^4 - 64c^6}{864} = 0.$$

Die Diskriminante letzterer Gleichung lautet

$$\Delta = \frac{b^4c^2(64c^6 - 144b^2c^4 + 540b^4c^2 - 27b^6)}{432}.$$

Es ist nun $\Delta = 0$, wenn

$$\left.\begin{array}{l} 1.\quad c = 0, \\ 2.\quad c = \pm \frac{b}{2}\sqrt{3(1 + \sqrt[3]{4} - 2\sqrt[3]{2})}. \end{array}\right\} \tag{6}$$

Wir bekommen daher folgende Hauptfälle:

$$\text{A.}\quad c > \frac{b}{2}\sqrt{3(1 + \sqrt[3]{4} - 2\sqrt[3]{2})}.$$

Die Diskriminante der kubischen Hilfsgleichung ist positiv; die biquadratische Gleichung (5) besitzt folglich 2 reelle Wurzeln, und wir erhalten 2 reelle Lösungen.

$$1.\quad c > \frac{b}{2}(1 + \sqrt{2}).$$

Beide Dreiecke sind nach Konstruktion spitzwinklig. Das kleinere davon ist gleichseitig, wenn speziell $c = b\sqrt{3}$.

$$2. \quad c = \frac{b}{2}(1 + \sqrt{2}).$$

Für diesen Wert von c wird Gleichung (5) erfüllt, wenn wir für y den Wert $\frac{b}{2}$ einsetzen. Folglich haben wir hier unter den beiden Dreiecken ein rechtwinkliges.

$$3. \quad c < \frac{b}{2}(1 + \sqrt{2}).$$

Ein Dreieck wird stumpfwinklig; das andere bleibt spitzwinklig.

$$\text{B.} \quad c = \frac{b}{2}\sqrt{3(1 + \sqrt[3]{4} - 2\sqrt[3]{2})}; \quad \Delta = 0.$$

4 reelle Lösungen, wovon 2 zusammenfallen. Die Kurve berührt die Mittelsenkrechte MM_1. Ein Dreieck ist spitzwinklig, die 3 andern stumpfwinklig, worunter 2 zusammenfallende.

$$\text{C.} \quad c < \frac{b}{2}\sqrt{3(1 + \sqrt[3]{4} - 2\sqrt[3]{2}}.$$

Die Diskriminante ist negativ; daher erhalten wir 4 reelle Lösungen. So lange c von 0 verschieden ist, sind sämtliche Dreiecke ungleich, und zwar sind 2 derselben stumpfwinklig, eines spitzwinklig und das vierte stumpfwinklig, rechtwinklig oder spitzwinklig, je nachdem $c \gtreqless \frac{b}{2}(\sqrt{2} - 1)$ ist. Taf. II, Fig. 9.

Für $c = 0$ werden die 2 stumpfwinkligen Dreiecke unendlich klein, d. h. sie reduzieren sich auf die Basis. Die 2 spitzwinkligen werden gleichseitig.

§ 16. *Zweites Lösungsverfahren. Bestimmung der Fusspunkte D der Schenkelhöhen.* Die Voraussetzungen sind dieselben wie in § 14.

a) Konstruktion der Kurve. Taf. III, Fig. 10.

Es sei $OA = b$ die Basis des Dreiecks. Wir ziehen den Grundkreis und die Mittelsenkrechte und machen auf der letztern $CE = c =$ konstant. Nun ziehen wir durch O einen Strahl, welcher den Grundkreis in Q und die Mittelsenkrechte in R schneidet. Wir verbinden A mit Q und tragen auf dieser Verbindungslinie die Strecke RE von A aus nach beiden Seiten ab, so dass $AP_1 = AP_2 = RE$ ist.

Der geometrische Ort aller Punkte P ist die Kurve. Fällt ein Kurvenpunkt in den Grundkreis, so ist

$$1.\quad RE = AP = AQ = h_s,$$
$$2.\quad RE = c \mp h_b;\ \text{folglich}$$

$c \mp h_b = h_s$ oder $c = h_s \pm h_b$; wir haben also eine Lösung vor uns. Die Schnittpunkte der Kurve mit dem Grundkreis müssen daher die Fusspunkte D der Schenkelhöhen der gesuchten Dreiecke sein.

b) *Ableitung der Kurvengleichung.*

Wir legen das rechtwinklige Koordinatensystem in gewohnter Weise. Sind x und y die Koordinaten eines Kurvenpunktes P_1, so gilt

$$AP_1 = \sqrt{(b-x)^2 + y^2}. \tag{α}$$

$$\text{Nun ist } AP_1 = c - CR. \tag{β}$$

$$\text{Ferner ist } \operatorname{tg}\varphi = \frac{RC}{OC} = \operatorname{cotg}(90^0 - \varphi) = \frac{b-x}{y}, \text{ somit}$$

$$RC = \frac{(b-x)b}{2y}, \text{ eingesetzt in } (\beta) \text{ ergiebt}$$

$$AP_1 = \frac{2cy - (b-x)b}{2y}, \text{ eingesetzt in } (\alpha) \text{ führt}$$

zur Kurvengleichung:

$$4y^2[(b-x)^2 + y^2] - [2cy - (b-x)b]^2 = 0. \tag{7}$$

c) *Diskussion der Kurvengleichung.*

Die Kurve ist von der 4. Ordnung. Verlegen wir den Koordinatenanfangspunkt nach A durch Parallelverschiebung der Axen, indem wir setzen

$$x = x' + b \quad \text{und} \quad y = y',$$

so erhalten wir nach der Transformation und nach Weglassung der Indizes folgende einfachere Kurvengleichung:

$$4y^2(x^2 + y^2) - (2cy + bx)^2 = 0. \tag{8}$$

A ist Doppelpunkt der Kurve; denn die Gleichung beginnt mit Gliedern 2. Grades. Die Doppelpunktstangenten fallen zusammen und bilden, da die Glieder 3. Grades fehlen, eine *Selbstberührungstangente*. Der *Nullpunkt ist also Selbstberührungspunkt.*

Die Gleichung der Selbstberührungstangente lautet:

$$y = -\frac{b}{2c}x. \tag{9}$$

Spezialfälle:

1. $c = 0;\qquad x = 0.$ Fig. 10.
2. $c = \frac{b}{2};\quad y = -x.$
3. $c = \infty;\quad y = 0.$

Wächst also c von 0 bis ∞, so dreht sich die Selbstberührungstangente um 90^0 aus der Richtung der y'-Axe in die Richtung der x'-Axe.

Die x'-Axe schneidet die Kurve nur im Selbstberührungspunkt A; die andern 2 Schnittpunkte fallen ins Unendliche, da die Potenzen x^3 und x^4 nicht vorhanden sind.

Die Schnittpunkte der y'-Axe mit der Kurve liegen für endliche Werte von c alle im Endlichen; es ist

$$y_{1,2} = 0 \qquad \text{und} \qquad y_{3,4} = \pm c.$$

Die Gleichung nach x aufgelöst, ergiebt

$$x = \frac{2bcy \pm 2y^2\sqrt{b^2 + 4c^2 - 4y^2}}{4y^2 - b^2}. \tag{10}$$

Jedem Wert von y entsprechen 2 verschiedene Werte von x. Nur für $y = 0$ fallen die Wurzeln zusammen. In diesem einzigen Fall liegt die Kurve symmetrisch und zwar zu beiden Axen. Jede Parallele zur x-Axe schneidet die Kurve im Endlichen in 2 Punkten, den Fall ausgenommen, da der Nenner Null wird. Die 2 Parallelen

$$y = \pm\frac{b}{2} \tag{11}$$

müssen daher *Asymptoten* der Kurve sein. Der Maximalwert, den y annehmen kann, ist

$$y = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + 4c^2}.$$

Um die Schnittpunkte der Kurve mit der unendlich fernen Geraden zu gewinnen, setzen wir nach bekanntem Verfahren

$$U_n = 4y^2(x^2 + y^2) = 0; \text{ daraus folgt}$$

1. $y = 0$ 2 mal und 2. $y = \pm ix$.

Wir haben somit 2 reelle, zur x-Axe parallele Asymptotenrichtungen und 2 imaginäre. Die Kurve schneidet also die imaginären Kreispunkte der Ebene. Da nun $y=0$ auch ein Faktor von U_3 ist, so muss der unendlich ferne Punkt der x-Axe ein Doppelpunkt der Kurve sein. Um die Art desselben zu untersuchen, projizieren wir ihn in den Nullpunkt A und setzen zu diesem Zwecke in Gleichung (8):

$$x=\frac{1}{x'} \quad \text{und} \quad y=\frac{y'}{x'}.$$

Wir erhalten, wenn wir nach der Transformation noch mit x'^4 multipliziert haben:

$$4y'^2(1+y'^2)-(2cy'x'+bx')^2=0.$$

Der Nullpunkt ist Doppelpunkt. Die Gleichung der Tangenten in demselben lautet

$$y'=\pm\frac{b}{2}x'.$$

Die projizierte Kurve hat im Nullpunkt einen Knotenpunkt mit 2 verschiedenen Tangenten; folglich ist der unendlich ferne Punkt der x-Axe auch ein solcher Doppelpunkt. Die Tangenten in demselben sind

$$y'=yx'=\pm\frac{b}{2}x' \quad \text{oder}$$

$$y=\pm\frac{b}{2}.$$

Diese Tangenten sind Asymptoten der Kurve, wie dies schon die Gleichung (10) verraten hat.

Unsere Kurve gehört somit auch zu den *rationalen* Kurven; denn sie besitzt einen Selbstberührungspunkt und einen Doppelpunkt, was zusammen für 3 Doppelpunkte zählt.

Für $c=0$ besteht die Kurve, deren Gleichung nun die Form hat

$$4y^2(y^2+x^2)-b^2x^2=0, \text{ aus 2 kongruenten Ästen} \quad (12)$$

zwischen den Asymptoten $y=\pm\frac{b}{2}$, siehe Fig. 10, Taf. III.

Für ein unendlich grosses c besteht die Kurve aus der doppelt gelegten unendlich fernen Geraden und der doppelt gelegten x-Axe. Asymptoten und Selbstberührungstangente laufen parallel.

Nimmt c negative Werte an, so sind die entstehenden Kurven Spiegelbilder derjenigen mit positivem c in Bezug auf die x-Axe.

d) Die Lösungen.

Die Koordinaten der zunächst gesuchten Schnittpunkte D sind die Wurzeln des Systems

$$1.\quad 4y^2[(b-x)^2+y^2]-[2cy-(b-x)b]^2=0, \text{ Kurve.}$$

und

$$2.\quad x^2-bx+y^2=0, \text{ Grundkreis.}$$

Die allgemeine Lösung dieser Aufgabe stösst auf bedeutende Schwierigkeiten. Wir können die Übereinstimmung mit dem ersten Verfahren nur in Spezialfällen nachweisen.

1. Für ein gleichseitiges Dreieck besitzt der Punkt D die Koordinaten $\left(\frac{b}{4}, \frac{b}{4}\sqrt{3}\right)$.

Setzen wir diese Werte für x und y in Gleichung (1) unseres Systems oben ein, so wird

$$c_1 = b\sqrt{3} \quad \text{und} \quad c_2 = 0.$$

Vergleiche damit die Fälle A_1 und C, pag. 136.

2. Bei einem rechtwinkligen Dreieck sind die Koordinaten von $D = \left(\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right)$. Setzt man diese Werte gleichen Orts wieder ein, so wird $c = \frac{b}{2}(1+\sqrt{2})$. Fig. 10.

Vergleiche damit A_2, pag. 136.

3. Für ein unendlich kleines Dreieck hat Punkt D die Koordinaten (b, 0). Die Einsetzung dieser Werte liefert $c = 0$, vergleiche damit C, pag. 136; siehe Fig. 10.

VI.

§ 17. *Sechste Aufgabe: Konstruktion eines gleichschenkligen Dreieckes, wenn die Basis und die Summe oder Differenz aus Schenkel und Schenkelhöhe gegeben sind.*

Gegeben: 1. b.

2. $s \pm h_s = c =$ konstant.

Bedingungen: 1. $s + h_s \gtreqless \frac{b}{2}$,

2. $s - h_s \gtreqless 0$.

Bei einem unendlich kleinen, auf die Basis reduzierten Dreieck ist $s + h_s = \frac{b}{2} =$ Minimum; denn $s = \frac{b}{2}$ und $h_s = 0$.