d) Die Lösungen.

Die Koordinaten der zunächst gesuchten Schnittpunkte D sind die Wurzeln des Systems

1. $4y^2[(b-x)^2+y^2]-[2cy-(b-x)b]^2=0$, Kurve.

und 2. $x^2-bx+y^2=0$, Grundkreis.

Die allgemeine Lösung dieser Aufgabe stösst auf bedeutende Schwierigkeiten. Wir können die Übereinstimmung mit dem ersten Verfahren nur in Spezialfällen nachweisen.

1. Für ein gleichseitiges Dreieck besitzt der Punkt D die Koordinaten $\left(\frac{b}{4}, \frac{b}{4}\sqrt{3}\right)$.

Setzen wir diese Werte für x und y in Gleichung (1) unseres Systems oben ein, so wird

$$c_1 = b\sqrt{3} \quad \text{und} \quad c_2 = 0.$$

Vergleiche damit die Fälle A_1 und C, pag. 136.

2. Bei einem rechtwinkligen Dreieck sind die Koordinaten von $D = \left(\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right)$. Setzt man diese Werte gleichen Orts wieder ein, so wird $c = \frac{b}{2}(1+\sqrt{2})$. Fig. 10.

Vergleiche damit A_2, pag. 136.

3. Für ein unendlich kleines Dreieck hat Punkt D die Koordinaten (b, 0). Die Einsetzung dieser Werte liefert $c = 0$, vergleiche damit C, pag. 136; siehe Fig. 10.

VI.

§ 17. *Sechste Aufgabe: Konstruktion eines gleichschenkligen Dreieckes, wenn die Basis und die Summe oder Differenz aus Schenkel und Schenkelhöhe gegeben sind.*

Gegeben: 1. b.

2. $s \pm h_s = c =$ konstant.

Bedingungen: 1. $s + h_s \geqq \frac{b}{2}$,

2. $s - h_s \geqq 0$.

Bei einem unendlich kleinen, auf die Basis reduzierten Dreieck ist $s + h_s = \frac{b}{2} =$ Minimum; denn $s = \frac{b}{2}$ und $h_s = 0$.

Ist das gleichschenklige Dreieck rechtwinklig, so ist $s - h_s = 0$. In jedem andern Fall ist s als Hypotenuse grösser als h_s (Kathete).

§ 18. *Erstes Lösungsverfahren: Bestimmung der Dreiecksspitzen B.*

a) Konstruktion der Kurve. Taf. III, Fig. 11.

Es sei $OA = b$ die Basis des Dreiecks. Wir ziehen den Grundkreis und um A den Hilfskreis mit dem Radius $r = c$. Ferner ziehen wir einen Strahl durch O, der den Grundkreis in Q schneidet. Die Verbindungslinie AQ endlich schneide den Hilfskreis in H und H_1. Liegt nun Q innerhalb des Hilfskreises, dann trägt man die beiden Strecken QH und QH_1 von O aus auf dem zugehörigen Strahl nach entgegengesetzten Seiten ab und zwar die Strecke nach Q hin, welche den Punkt A nicht enthält. Man macht also

$$OP_1 = QH \quad \text{und} \quad OP_2 = QH_1.$$

Beziehungen: 1. $OP_1 + AQ = QH + AQ = AH = c$;

2. $OP_2 - AQ = QH_1 - AQ = AH_1 = c$.

Liegt der Punkt Q ausserhalb des Hilfskreises, so trägt man beide Strecken nach Q hin ab. In diesem Fall gelten dann die Relationen:

1. $AQ' - OP_1' = AQ' - Q'H' = AH' = c$;
2. $OP_2' - AQ' = Q'H_1' - AQ' = AH_1' = c$.

Der geometrische Ort aller Punkte P ist die Hilfskurve. Fällt ein Kurvenpunkt P in die Mittelsenkrechte, so wird $OP = OB = s$ und $AQ = AD = h$, und man kann, wenn diese Werte in den Relationen oben eingesetzt werden, eine Lösung konstatieren. Die Schnittpunkte der Kurve mit der Geraden $x = \frac{b}{2}$ ergeben somit die zunächst gesuchten Punkte B.

b) Ableitung der Kurvengleichung.

Es seien für das gewohnte Koordinatensystem x und y die Koordinaten eines Punktes P'_2; dann kann gesetzt werden:

$$OP_2' = \sqrt{x^2 + y^2}; \qquad (\alpha)$$

Nun ist $OP_2' = c + AQ' = c + b \sin\varphi$, eingesetzt in ($\alpha$), und man hat $c + b \sin\varphi = \sqrt{x^2 + y^2}$, umgeformt

$$(x^2 + y^2 + by)^2 - c^2 (x^2 + y^2) = 0. \qquad (1)$$

Polargleichung: $$r = - b \sin\varphi \pm c. \qquad (2)$$

Unsere Kurve ist die *Kreiskonchoide.* Die y-Axe ist Symmetrieaxe.

$c < b$, O ist Knotenpunkt; die Konchoide besitzt eine Schleife;

$c = b$, O ist Spitze und die negative y-Axe Rückkehrtangente;

$c > b$, O ist konjugierter Punkt.

Für $c = 0$ reduziert sich die Kurve auf den doppelt gelegten Kreis $x^2 + y^2 + by = 0$.

c) Die Lösungen.

Es handelt sich noch um die Bestimmung der Ordinaten der Schnittpunkte B. Wir führen zu diesem Zweck den Wert für $x = \frac{b}{2}$ in der Kurvengleichung (1) ein und erhalten:

$$\left(y^2 + by + \frac{b^2}{4}\right)^2 - c^2\left(y^2 + \frac{b^2}{4}\right) = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind die Ordinaten von B. Die Auflösung vorliegender Gleichung führt auf eine kubische Hilfsgleichung von der Form

$$v^3 + \frac{6b^2c^2 - c^4}{3} v + \frac{9b^2c^4 + 2c^6}{27} = 0.$$

Die Diskriminante dieser kubischen Gleichung wird

$$\varDelta = \frac{bc^3\sqrt{3}}{18}\sqrt{32b^4 - 13b^2c^2 + 4c^4}.$$

Es ist nun $\varDelta = 0$ nur in dem einen Fall, wenn

$$c = 0. \tag{3}$$

Wir erhalten daher 2 Hauptfälle für die Lösungen:

A. $\varDelta = 0$ für $c = 0$.

Wir bekommen für y 4 zusammenfallende Wurzeln, nämlich $y = -\frac{b}{2}$ als Ordinate der Spitze. Damit erhalten wir auch 4 zusammenfallende Dreiecke, welche rechtwinklig sind.

B. $\varDelta =$ pos. für $c \neq 0$.

Die kubische Hilfsgleichung besitzt nur eine und infolge dessen die biquadratische Gleichung nur 2 reelle Wurzeln. Wir erhalten somit für jeden Wert von c, 0 ausgenommen, nur 2 wirkliche Dreiecke.

Wie schon erwähnt, treten für $c=0$ 4 zusammenfallende rechtwinklige Dreiecke auf, welche auf der negativen Seite der y-Axe liegen. Fängt nun c zu wachsen an, so verschwinden erstens 2 Dreiecke. Die andern 2 verwandeln sich in ein spitzwinkliges und in ein stumpfwinkliges, und zwar wird für ein wachsendes c das spitzwinklige immer spitzwinkliger.

Für $c=\frac{b}{2}(2-\sqrt{3})$ wird es gleichseitig. Das stumpfwinklige wird auch stumpfwinkliger und erreicht für $c=\frac{b}{2}$ das Maximum. Der Winkel an der Spitze wird 180°. Das Dreieck reduziert sich auf die Basis. Wird $c>\frac{b}{2}$, so nimmt der Winkel an der Spitze stetig ab. Für $c=b\sqrt{2}$ wird das Dreieck rechtwinklig natürlich auf der positiven Seite der y-Axe. Für jeden Wert von $c>b\sqrt{2}$ ist dann auch das auf der positiven Seite der y-Axe liegende Dreieck spitzwinklig. Gleichseitig ist dieses spitzwinklige Dreieck für den Spezialwert von $c=\frac{b}{2}(2+\sqrt{3})$.

§ 19. *Zweites Lösungsverfahren: Bestimmung der Punkte D.*

Bedingungen wie in § 17.

a) *Konstruktion der Kurve.* Ohne Figur.

Es sei $OA=b$ die Basis des Dreiecks. Wir ziehen den Grundkreis, die Mittelsenkrechte MM_1 und endlich noch einen Hilfskreis um A mit dem Radius $r=c$. Ein durch A gezogener Strahl schneide nun den Grundkreis in Q, die Mittelsenkrechte in R und den Hilfskreis in H und H_1. Schliesslich wird noch durch O ein Strahl gezogen, der auch durch Q geht. Nun trägt man auf dem Strahl OQ von O aus die Strecken RH und RH_1 nach entgegengesetzten Seiten ab, macht also

$OP_1=RH$ und $OP_2=RH_1$, so dass also

1. $AR+OP_1=AR+RH=AH=c$ und ebenso
2. $OP_2-AR=RH_1-AR=AH_1=c$.

So darf es aber nur gemacht werden, wenn Q innerhalb des Hilfskreises liegt. Liegt Q ausserhalb des Hilfskreises, so trägt man beide Strecken RH und RH_1 nach der gleichen Seite und zwar nach Q hin ab. Der geometrische Ort aller Punkte P ist die Hilfskurve.

Fällt ein Punkt derselben in den Grundkreis, so wird $OP = OQ = h_s$ und da $AR = s$ ist, so wird nach den oben stehenden Relationen

1. $s + h_s = c$ oder 2. $h_s - s = c$; somit ist der Punkt P zu einem Punkt D geworden; wir haben eine Lösung. Die Schnittpunkte der Kurve mit dem Grundkreis sind wieder die zunächst gesuchten Punkte D.

b) *Ableitung der Kurvengleichung.*

Wir erhalten nach analoger Methode wie früher

$$(x^2 + y^2)\left(y + \frac{b}{2}\right)^2 - c^2 y^2 = 0. \qquad (4)$$

$$\text{Polargleichung:} \quad r = -\frac{b}{2\sin\varphi} \pm c. \qquad (4a)$$

Die Hilfskurve ist die *Konchoide des Nikomedes.* Die y-Axe ist die Symmetrieaxe derselben und die Gerade $y = -\frac{b}{2}$ die Leitlinie. c ist der auf einem Strahl durch O gemessene konstante Abstand zweier Kurvenpunkte von der Leitlinie.

Für $c > \frac{b}{2}$ besitzt die Konchoide eine Schleife.

für $c = \frac{b}{2}$ tritt sie mit Spitze auf in O;

» $c < \frac{b}{2}$ wird O zum konjugierten Punkt;

» $c = 0$ zerfällt die Kurve in die doppelte Leitlinie und den konjugierten Punkt O.

c) *Die Lösungen.*

Es handelt sich um die Bestimmung der Koordinaten der Schnittpunkte D. Diese Koordinaten sind die Wurzeln des Gleichungssystems:

1. $(x^2 + y^2)\left(y + \frac{b}{2}\right)^2 - c^2 y^2 = 0,$ ········· Kurve.
2. $x^2 - bx + y^2 = 0,$ ········· Grundkreis.

Wir führen den Wert von x aus (2) in (1) ein und erhalten

$$y^4 + 2by^3 + \frac{3b^4 - 2b^2c^2 + 2c^4}{2b^2} y^2 + \frac{b^3 - 2bc^2}{2} y + \frac{b^4 - 4b^2c^2}{16} = 0. \qquad (5)$$

Die Wurzeln dieser Gleichung 4. Grades in y sind die Ordinaten der Schnittpunkte D. Die kubische Hilfsgleichung dazu erscheint in der Form

$$v^3 - \frac{c^4(4b^4 - 2b^2c^2 + c^4)}{3b^4} v - \frac{c^6(16b^6 + 15b^4c^2 - 6b^2c^4 + 2c^6)}{27b^6} = 0.$$

Als Diskriminante erhält man

$$\Delta = \frac{c^{14}(32b^4 - 13b^2c^2 + 4c^4)}{27b^6}.$$

Es wird $\Delta = 0$ nur für $c = 0$ wie beim ersten Verfahren. Auch hier giebt es die beiden gleichen Hauptfälle, nämlich

A. $\Delta = 0$ für $c = 0$.

Wir erhalten wie beim ersten Verfahren 4 zusammenfallende rechtwinklige Dreiecke; denn in Gleichung (5) wird $y = -\frac{b}{2}$ 4mal.

B. $\Delta =$ pos. für $c \neq 0$.

Für jeden von 0 verschiedenen Wert von c liefert Gleichung (5) 2 reelle Wurzeln und damit 2 reelle Dreiecke, also dasselbe Ergebnis wie beim ersten Verfahren. Setzt man in Gleichung (5) Spezialwerte ein

$y = 0$ für das unendlich kleine Dreieck,

$y = \pm\frac{b}{2}$ » » rechtwinklige »

$y = \pm\frac{b}{4}$ » » gleichseitige »

so erhält man die nämlichen Werte für c wie auf Seite 143.

VII.

§ 20. *Siebente Aufgabe: Konstruktion des gleichschenkligen Dreieckes, wenn die Basis und die Summe oder Differenz aus Schenkel und dem an die Basis angrenzenden Schenkelabschnitt gegeben sind.*

Gegeben: 1. b,

2. $s \pm m = \pm c$.