Zeichen verwendet werden darf. Das negative Zeichen entspricht den Lösungen der Spiegelbildkurve in Bezug auf die x-Axe.

Setzt man in der Proportion:

$y : h_b = x : \frac{b}{2}$ für x und y die Werte von (11) ein,

so erhält man für h_b den Wert nach Formel (6); damit ist nachgewiesen, dass beide Verfahren die gleichen Ergebnisse liefern.

Berechnen wir mit Hilfe von (11) m, denn $m = \sqrt{x^2 + y^2}$ und h_s, denn $h_s = \sqrt{b^2 - m^2}$, so finden wir, dass bei jedem spitzwinkligen Dreieck die Strecke $m = OD$ gleich ist der Grösse h_s bei dem zugehörigen stumpfwinkligen Dreieck und umgekehrt. Bei allen Lösungen gilt die Relation

$$h_s + m = c, \text{ wenn } c > b,$$
$$h_s \pm m = c, \quad » \quad c = b \text{ und}$$
$$h_s - m = c, \quad » \quad c < b \text{ ist.}$$

IX.

§ 26. *Neunte Aufgabe: Konstruktion eines gleichschenkligen Dreieckes, wenn die* ***Basis*** *und die* ***Summe*** *oder* ***Differenz*** *aus* ***Schenkel*** *und* ***Basishöhe*** *gegeben sind.*

Gegeben: 1. b,

2. $s \pm h_b = \pm c =$ konstant.

Bedingungen: 1. $s + h_b \geqq \frac{b}{2}$,

2. $s - h_b \leqq \frac{b}{2}$.

Die Summe ist das Minimum bei einem unendlich kleinen Dreieck; da ist $s = \frac{b}{2}$ und $h_b = 0$. Umgekehrt ist die Differenz bei einem unendlich kleinen Dreieck das Maximum und nimmt stetig ab bis 0, wenn das Dreieck wächst und schliesslich unendlich gross wird.

§ 27. *Erstes Verfahren.* ***Bestimmung der Fusspunkte D.***

a) Konstruktion der Hilfskurve. Taf. IV, Fig. 14.

Es sei $OA = b$ die Basis des Dreiecks. Wir ziehen den Grundkreis und die Mittelsenkrechte, auf welcher wir von C aus die Konstante c nach E abtragen. Durch O laufe nun ein Strahl, der den Grundkreis in Q und die Mittelsenkrechte in R schneidet. Nun tragen wir die Strecke RE von O aus auf dem Strahl OQ nach beiden Seiten ab und bekommen die beiden Punkte T_1 und T_2. Schliesslich tragen wir noch die Strecken RT_1 und RT_2 auf dem Strahl OQ von Q aus ab und zwar in der Richtung, in welcher von der Mittelsenkrechten aus die Punkte T liegen. Die gewonnenen Punkte seien P_1 und P_2, welche bei sich drehendem Strahl die Kurve beschreiben. Die Schnittpunkte derselben mit dem Grundkreis liefern die zunächst gesuchten Punkte D; denn fällt ein Kurvenpunkt P in den Grundkreis, so ist $QP = 0$, also auch $RT = 0$. Im letztern Fall kommt T in die Mittelsenkrechte zu liegen, und es ist ferner $OT = RE = OB = s$ und da auch $RC = h_b$ ist, so muss sich eine der Bedingungen erfüllen:

$$s \pm h_b = c.$$

b) Ableitung der Kurvengleichung.

Wir legen in gewohnter Weise das Koordinatensystem. x und y seien die Koordinaten des Kurvenpunktes P_1; dann ist

$$OP_1 = \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$OP_1 = OQ - T_1R = OQ - OR + OT_1 = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (\alpha)$$

$$\left.\begin{aligned} \text{Nun ist } OQ &= b\cos\varphi, \\ OR &= \frac{b}{2\cos\varphi} \\ \text{und } OT_1 &= EC - RC = c - \frac{b}{2}\operatorname{tg}\varphi, \end{aligned}\right\} \text{sub. in } (\alpha)\text{, so giebt es}$$

$$b\cos\varphi - \frac{b}{2\cos\varphi} + c - \frac{b}{2}\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{x^2 + y^2}, \text{ umgeformt}$$

$$[(x^2 + y^2)(2x - b) - 2bx^2]^2 - (by - 2cx)^2(x^2 + y^2) = 0. \quad (1)$$

Für ein negatives c bekommen wir die Spiegelbildkurve in Bezug auf die x-Axe. In der Gleichung (1) ändert bloss das mit c behaftete Glied Vorzeichen. Löst man Gleichung (1) auf, so verschwindet das Glied b^2y^4; dann lässt sich der Faktor x in allen Gliedern wegdividieren und wir erhalten:

$$(x^2 + y^2)^2 x - (x^4 - y^4) b + (x^2 - 3y^2)\frac{b^2x}{4}$$
$$+ (x^2 + y^2)(by - cx)c = 0. \quad (2)$$

Polargleichung: $r = \frac{b \cos 2\varphi \pm (b \sin\varphi - 2c\cos\varphi)}{2\cos\varphi}$

$$= \frac{b\cos 2\varphi}{2\cos\varphi} \pm \left(\frac{b}{2}\operatorname{tg}\varphi - c\right). \quad (2\alpha)$$

c) *Diskussion der Kurvengleichung.*

Die Kurve ist von der 5. Ordnung und hat im Nullpunkt einen 3fachen Punkt. Die Gleichung der *Nullpunktstangenten* lautet:

$$\left(\frac{y}{x}\right)^3 - \frac{3b^2+4c^2}{4bc}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x} + \frac{b^2-4c^2}{4bc} = 0. \quad (3)$$

Spezialfälle:

1. $c = 0$; $\quad \frac{b^2}{4}\,x\,(x^2 - 3y^2) = 0.$

α) $x = 0.$

β) $y = \pm\frac{x}{3}\sqrt{3}.$

Die Gleichung der Kurve selbst nimmt die Form an

$$(x^2+y^2)[(x^2+y^2)x - b(x^2-y^2)] + (x^2-3y^2)\,\frac{b^2x}{4} = 0. \quad (4)$$

Diese Spezialkurve allein ist symmetrisch und zwar in Bezug auf die x-Axe. Nach y aufgelöst erhalten wir

$$y = \pm\sqrt{\frac{3b^2x - 8x^3 \pm bx\sqrt{9b^2-16bx}}{8(x+b)}}.$$

$x = \frac{9b}{16}$ ist der Maximalwert, den x annehmen kann. Für diesen Grenzwert von x wird $y = \pm\frac{3b}{16}\sqrt{0{,}6}$. Die Kurve bildet eine Doppelschleife, welche ganz innerhalb des Grundkreises liegt, denselben im Nullpunkt berührt und aus 2 kongruenten Schleifen besteht, die sich im Punkt $\left(\frac{b}{2}, 0\right)$ schneiden.

2. $c = \frac{b}{2}$; $\quad \left(\frac{y}{x}\right)^3 - 2\left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x} = 0$:

α) $y = 0$; die x-Axe ist Tangente.

β) $y = x$ 2mal; diese Tangente ist eine Selbstberührungstangente, welche die Kurve im Nullpunkt zudem noch schneidet.

Alle Schnittpunkte der Geraden $y = x$ mit der Kurve fallen daher in den Nullpunkt. Von den 3 Doppelpunkten, die im 3fachen Punkte O liegen, ist der eine also ein Selbstberührungspunkt. Die 4 Doppelpunkte, welche die Kurve im Endlichen hat, stecken für $c = \frac{b}{2}$ alle im Nullpunkt.

Die x-Axe schneidet die Kurve in O 3mal und 2mal in den Punkten $\frac{b}{2} \pm c$. Die y-Axe schneidet die Kurve 3mal in O, einmal in $(0, -c)$ und einmal im Unendlichen.

Die imaginären Kreispunkte der Ebene sind Doppelpunkte der Kurve; diese ist somit *rational;* denn sie besitzt 6 Doppelpunkte, 4 im Endlichen und 2 im Unendlichen, so lange c endlich ist.

Die Gerade $x = -b$ ist *Wendeasymptote.* (4)

Die Kurve hat *Wendepunkte.* Ist O Knotenpunkt, so besitzt die Kurve einen Wendepunkt im Unendlichen. Ist O isolierter Punkt, so sind 3 Wendepunkte vorhanden, wovon 2 im Endlichen sind.

Für ein unendlich grosses c besteht die Kurve aus der y-Axe, der doppelt gelegten unendlich fernen Geraden und dem isolierten Punkt in O.

d) Die Lösungen.

Wir suchen die Fusspunkte D der Schenkelhöhen zunächst. Für die Koordinaten von D finden wir die Werte

$$x = \frac{16\,b^3 c^2}{(b^2 + 4c^2)^2} \tag{5}$$

$$\text{und} \quad y = \pm \frac{4\,b^2 c\,(4\,c^2 - b^2)}{(b^2 + 4\,c^2)^2}. \tag{6}$$

Das negative Zeichen gilt für die Lösungen der Spiegelbildkurve. Wir bekommen für einen bestimmten Wert von c nur *eine* reelle Lösung; das rührt daher, weil $s + h$ nicht kleiner als $\frac{b}{2}$ und $s - h_b$ nicht grösser als $\frac{b}{2}$ werden kann. Wir bekommen folgende Hauptfälle:

A. $c > \frac{b}{2}$.

Alle Lösungen genügen der Bedingung: $s + h_b = c$.

$$1. \quad c > \frac{b}{2}(1+\sqrt{2}); \quad 0 < x < \frac{b}{2}.$$

Das Dreieck ist spitzwinklig und wird speziell gleichseitig, wenn $c = \frac{b}{2}(2+\sqrt{3})$ ist.

$$2. \quad c = \frac{b}{2}(1+\sqrt{2}); \quad x = \frac{b}{2}.$$

Das Dreieck ist rechtwinklig.

$$3. \quad \frac{b}{2}(1+\sqrt{2}) > c > \frac{b}{2}; \quad \frac{b}{2} < x < b.$$

Das Dreieck ist stumpfwinklig.

$$B. \quad c = \frac{b}{2}, \text{ Grenzfall}; \ x = b.$$

Das Dreieck ist unendlich klein und genügt der Relation:

$$s \pm h_b = c.$$

$$C. \quad c < \frac{b}{2}.$$

Die Dreiecke erfüllen die Bedingung: $s - h_b = 0$.

$$1. \quad \frac{b}{2}(\sqrt{2}-1) < c < \frac{b}{2}; \quad \frac{b}{2} < x < b.$$

Das Dreieck ist stumpfwinklig.

$$2. \quad c = \frac{b}{2}(\sqrt{2}-1); \quad x = \frac{b}{2}.$$

Das Dreieck ist rechtwinklig.

$$3. \quad \frac{b}{2}(\sqrt{2}-1) > c > 0; \quad \frac{b}{2} > x > 0.$$

Das Dreieck ist spitzwinklig und wird für $c = \frac{b}{2}(2-\sqrt{3})$ speziell gleichseitig.

$$4. \quad c = 0; \quad x = 0.$$

Das Dreieck ist unendlich gross, wie es bei A für $c = \infty$ wird.

Für die Basishöhe BC findet man nach bekannter Proportion den Ausdruck:

$$h_b = \frac{4c^2 - b^2}{8c}. \tag{8}$$

Für die Lösungen der Spiegelbildkurve ist dieser Wert negativ zu nehmen.

Für die Dreiecksfläche erhält man nach (8) die Formel

$$F = \frac{(4c^2 - b^2)b}{16c}. \tag{9}$$

§ 28. *Zweites Verfahren. Bestimmung der Spitzen B.*

Diese Aufgabe ist schon elementar ohne Mühe lösbar. Es ist ja $s^2 = \frac{b^2}{4} + h_b^2$. Berücksichtigt man, dass $s \pm h_b = c$, so findet man $$h_b = \pm \frac{4c^2 - b^2}{8c}.$$ was mit (8) vollkommen übereinstimmt. Die elementare Lösung auf konstruktivem Wege erfordert 2 verschiedene Konstruktionen, je nachdem die Summe oder Differenz von s und h_b vorliegt. Soll die gleiche Konstruktion beide Fälle einschliessen, so wird eine Hilfskurve nötig. Ihre Gleichung lautet:

$$(x^2 + y^2) 4x^2 - (by - 2cx)^2 = 0. \tag{10}$$

Wir haben dieselbe unter V (8), pag. 60, bereits kennen gelernt. In unserm Fall hat die Kurve den Selbstberührungspunkt in O.

Ihre Asymptoten sind $x = \pm \frac{b}{2}$.

Bei den Lösungen handelt es sich um die Schnittpunkte B der Mittelsenkrechten $x = \frac{b}{2}$ mit der Kurve. Für die Ordinate von B finden wir den Wert $$y = h_b = \frac{4c^2 - b^2}{8c}. \tag{11}$$

Dieser Wert stimmt mit (8) überein. Beide Verfahren decken sich somit vollständig in ihren Resultaten.

X.

§ 29. ***Zehnte Aufgabe. Konstruktion eines gleichschenkligen Dreieckes, wenn die Basis und die Summe oder Differenz aus Basishöhe und dem an die Basis angrenzenden Schenkelabschnitt gegeben sind.***

Gegeben: 1. b,

2. $h_b \pm m = \pm c =$ konstant.