Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern

Band: - (1902)

Heft: 1519-1550

Artikel: Konstruktionen gleichschenkliger Dreiecke mit Hilfe von Kurven höherer Ordnung

Kapitel

Autor: Krebs, A.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-319122

Für die Lösungen der Spiegelbildkurve ist dieser Wert negativ zu nehmen.

Für die Dreiecksfläche erhält man nach (8) die Formel

$$F = \frac{(4c^2 - b^2)b}{16c}. \tag{9}$$

§ 28. *Zweites Verfahren. Bestimmung der Spitzen B.*

Diese Aufgabe ist schon elementar ohne Mühe lösbar. Es ist ja $s^2 = \frac{b^2}{4} + h_b^2$. Berücksichtigt man, dass $s \pm h_b = c$, so findet man $h_b = \pm \frac{4c^2 - b^2}{8c}$, was mit (8) vollkommen übereinstimmt. Die elementare Lösung auf konstruktivem Wege erfordert 2 verschiedene Konstruktionen, je nachdem die Summe oder Differenz von s und h_b vorliegt. Soll die gleiche Konstruktion beide Fälle einschliessen, so wird eine Hilfskurve nötig. Ihre Gleichung lautet:

$$(x^2 + y^2)4x^2 - (by - 2cx)^2 = 0. \tag{10}$$

Wir haben dieselbe unter V (8), pag. 60, bereits kennen gelernt. In unserm Fall hat die Kurve den Selbstberührungspunkt in O.

Ihre Asymptoten sind $x = \pm \frac{b}{2}$.

Bei den Lösungen handelt es sich um die Schnittpunkte B der Mittelsenkrechten $x = \frac{b}{2}$ mit der Kurve. Für die Ordinate von B finden wir den Wert $y = h_b = \frac{4c^2 - b^2}{8c}$. (11)

Dieser Wert stimmt mit (8) überein. Beide Verfahren decken sich somit vollständig in ihren Resultaten.

X.

§ 29. ***Zehnte Aufgabe. Konstruktion eines gleichschenkligen Dreieckes, wenn die Basis und die Summe oder Differenz aus Basishöhe und dem an die Basis angrenzenden Schenkelabschnitt gegeben sind.***

Gegeben: 1. b,

2. $h_b \pm m = \pm c =$ konstant.

Bedingungen: 1. $h_b + m \gtreqqless b$,

2. $h_b - m \lesseqqgtr 0$.

Die Summe $h_b + m$ wird zum Minimum b beim unendlich kleinen Dreieck, wo $m = b$ und $h_b = 0$ ist. Die Differenz $h_b - m$ wird $= 0$ bei einem spitzwinkligen Dreieck, dessen Höhe

$$h_b = \frac{b}{4}\sqrt{2\sqrt{17} - 2} \text{ ist.}$$

Übersteigt h_b diesen Wert, so ist die Differenz $h_b - m =$ pos. Sinkt dagegen h_b unter diesen Wert, so ist $h_b - m =$ neg. und wird für ein unendlich kleines Dreieck $= - b$.

§ 30. *Erstes Lösungsverfahren. Bestimmung der Spitzen B.*

a) Konstruktion der Hilfskurve.

Es sei $OA = b$ die Basis des Dreiecks. Ziehe den Grundkreis, die Mittelsenkrechte und um O noch einen Hilfskreis mit dem Radius $r = c$. Ein Strahl durch O schneide nun den Grundkreis in Q und den Hilfskreis in H und H_1. Schlage von C aus einen Kreisbogen mit dem Radius $r = QH$ und einen zweiten Bogen mit dem Radius $r = QH_1$. Erhalte im Strahl 4 Schnittpunkte P_1, P_2, P_3 und P_4. Bei sich drehendem Strahl beschreiben die Punkte P die Kurve. Fällt ein Kurvenpunkt P in die Mittelsenkrechte, so ist $QH = CP = CB = h_b$, und da ferner in diesem Fall $OQ = m$ ist, so lässt sich die Relation aufstellen: $h_b \pm m = OH = c$. Somit haben wir in den Schnittpunkten der Kurve mit der Mittelsenkrechten die gesuchten Spitzen B.

b) Ableitung der Kurvengleichung.

Lege in gewohnter Weise das Koordinatensystem. x und y seien die Koordinaten des Kurvenpunktes P_1; dann gilt

$$CP_1 = \sqrt{\left(\frac{b}{2} - x\right)^2 + y^2}. \qquad (\alpha)$$

Nun ist $CP_1 = QH = OH - OQ = c - b\cos\varphi$, eingesetzt in (α) ergiebt $c - b\cos\varphi = \sqrt{\left(\frac{b}{2} - x\right)^2 + y^2}$, umgeformt

$$\left\{(x^2+y^2)\left[y^2+\left(\frac{b}{2}-x\right)^2\right]-c^2(x^2+y^2)-b^2x^2\right\}^2$$
$$-4b^2c^2x^2(x^2+y^2)=0. \quad (1)$$

Polargleichung: $r=\dfrac{b\cos\varphi}{2}$

$$\pm\frac{1}{2}\sqrt{(2b\cos\varphi+b\sin\varphi\pm 2c)(2b\cos\varphi-b\sin\varphi\pm 2c)}. \quad (2)$$

c) *Eigenschaften der Kurve.*

Die Kurve ist von der 8. Ordnung und hat im Nullpunkt einen 4fachen Punkt. Die *Gleichung der Tangenten im Nullpunkt* lautet:

$$y=\pm\frac{x}{b^2-4c^2}\sqrt{3b^4+24b^2c^2-16c^4\pm 16b^3c}. \quad (3)$$

1. $0 \leqq c \leqq \frac{b}{2}$; O ist Knotenpunkt; alle 4 Tangenten sind reell.
2. $\frac{b}{2} < c \leqq \frac{3b}{2}$; O ist Doppelpunkt und isolierter Punkt; 2 Tangenten sind reell, 2 imaginär.
3. $c > \frac{3b}{2}$; O ist isolierter Punkt; alle 4 Tangenten sind imaginär.

Die Kurve liegt zur x-Axe symetrisch; denn y kommt nur in geraden Potenzen vor. Die Kurve hat nicht nur in O, sondern auch in den imaginären Kreispunkten der Ebene 4fache Punkte. Für endliche Werte von c liegen keine Kurvenpunkte im Unendlichen; die Kurve kann daher keine Asymptoten haben. Wir betrachten nun die einzelnen Kurvenformen bei veränderlichem c.

1. $c=0$.

Die Kurve zerfällt in 2 zusammenfallende Kurven 4. Ordnung, deren Gleichung die Form hat

$$(x^2+y^2)\left\{y^2+\left(\frac{b}{2}-x\right)^2\right\}-b^2x^2=0. \quad (4)$$

Die Kurve (4) besteht aus einer Doppelschleife mit ungleichen Blättern. Die Tangenten in O sind $y=\pm x\sqrt{3}$. Die y-Axe schneidet die Kurve 2mal in O und 2mal imaginär, die x-Axe 2mal in O und dann noch in $x_3 = \frac{3b}{2}$ und $x_4 = -\frac{b}{2}$. Bei wachsendem c wird die eine Doppelschleife grösser und die andere kleiner und so geht es, bis $c = b/2$ wird. Für diesen Wert von c verliert die kleinere Doppelschleife die kleinere Schleife, welche zu einer Spitze zusammenschrumpft.

2. $c = \frac{b}{2}$.

Die Gleichung der Kurve lautet nun

$$[(x^2+y^2)(x^2+y^2-bx)-b^2x^2]^2-b^4x^2(x^2+y^2)=0. \qquad (5)$$

Die positive x-Axe ist Rückkehrtangente und die y-Axe doppelt gelegte Wendetangente. O ist also Doppelinflexionsknoten und Spitze. Alle Schnittpunkte der Axen mit der Kurve sind reell und bleiben von da weg reell. In allgemeiner Form sind die Schnittpunkte mit der x-Axe:

1. $x = 0$, 4mal; 2. $x = \frac{3b}{2} \pm c$; 3. $x = -\frac{b}{2} \pm c$.

Die Schnittpunkte mit der y-Axe:

1. $y = 0$, 4mal; 2. $y = \pm\sqrt{c^2 - \frac{b^2}{4}}$ 2mal.

Wächst nun c von $\frac{b}{2}$ bis b, so verwandelt sich die Doppelschleife in eine 4fache Schleife. Die 2 grössern Schleifen dehnen sich aus in der Richtung der x-Axe, die 2 kleinern längs der y-Axe. Das kleinere innere Blatt löst sich los vom Nullpunkt, nimmt Eiform an, schrumpft mehr und mehr zusammen und wird schliesslich zum isolierten Punkt in $C\left(\frac{b}{2}, 0\right)$.

3. $c = b$.

Die Kurve besteht aus einer in sich geschlossenen Linie, welche in der y-Axe 3 Doppelpunkte bildet, wovon einer in O liegt. Ferner gehören zu ihr noch 2 isolierte Punkte O und C. Die Gleichung der reellen Tangenten in O lautet

$$y = \pm x\sqrt{3}.$$

Diese Spezialkurve ist rational; denn sie besitzt neben den 3 vierfachen Punkten noch 3 Doppelpunkte, was zusammen für 21 Doppelpunkte zählt. Die 3 Doppelpunkte haben die Koordinaten

$$\left(\frac{b}{2}, 0\right), \left(0, \frac{b}{2}\sqrt{3}\right) \quad \text{und} \quad \left(0, -\frac{b}{2}\sqrt{3}\right).$$

Wächst c über b hinaus, so nähern sich die 2 Schleifen längs der y-Axe der Mittelsenkrechten und um den Punkt C bildet sich wieder ein isoliertes Blättchen. Für einen gewissen Wert von c, den wir nicht ermitteln konnten, hängt sich das kleinere innere Kurvenstück an den andern Kurvenzweig. Wird c noch grösser, so bildet die Kurve 2 Blätter, die sich teilweise überlagern und von denen das eine die Form der Kreiskonchoide hat. Für $c = \frac{3b}{2}$ hat das konchoidenähnliche Blatt in O eine Spitze mit der negativen x-Axe als Rückkehrtangente.

$$4. \quad c > \frac{3b}{2}.$$

Die Kurve hat in O keine reellen Tangenten mehr. Der Mittelpunkt ist 2fach isolierter Punkte. Die Kurve bildet 2 Blätter, die sich teilweise überlagern, was bei weiter wachsendem c so bleibt.

Für ein unendlich grosses c besteht die Kurve aus dem doppelt gelegten unendlich grossen Kreis und dem 2fach isolierten Punkt in O.

d) Die Lösungen.

Es handelt sich um die Bestimmung der Spitzen B. Für jeden Wert von c giebt es 4 Schnittpunkte B der Kurve mit der Mittelsenkrechten. Wir bekommen also immer 4 reelle Lösungen, welche nach Konstruktion paarweise symmetrisch sind. Die allgemeine Lösung stösst auf Schwierigkeiten. Setzt man jedoch in der Kurvengleichung (1) für x den Wert $\frac{b}{2}$ und für y Spezialwerte wie $y = 0$, $y = \frac{b}{2}$, $y = \frac{b}{2}\sqrt{3}$ etc. ein, so kann man für besondere Lösungen den zugehörigen Wert von c berechnen. Ehe wir die Hauptfälle bringen, bemerken wir noch, dass ein Dreieckspaar immer spitzwinklig ist, das andere dagegen jede beliebige Form annehmen kann.

1. $c = 0$; $\quad y = h_b = \pm \frac{b}{4}\sqrt{-2+2\sqrt{17}}$, 2mal.

Alle 4 Dreiecke sind spitzwinklig, kongruent und fallen paarweise zusammen und sind paarweise symmetrisch.

2. $0 < c < (\sqrt{2}-1)\frac{b}{2}$;

ein Paar symmetrischer Lösungen wird spitzwinkliger, das andere Paar weniger spitzwinklig.

3. $c = (\sqrt{2}-1)\frac{b}{2}$.

Das zweite Paar wird rechtwinklig.

4. $(\sqrt{2}-1)\frac{b}{2} < c < b$.

Das zweite Paar ist stumpfwinklig. Für $c = \frac{b}{2}(\sqrt{3}-1)$ wird das erste Paar gleichseitig.

5. $c = b$.

Das zweite Paar ist unendlich klein.

6. $b < c < (\sqrt{2}+1)\frac{b}{2}$.

Das zweite Paar ist wieder stumpfwinklig.

7. $c = (\sqrt{2}+1)\frac{b}{2}$; zweites Paar ist rechtwinklig.

8. $c > (\sqrt{2}+1)\frac{b}{2}$; auch das zweite Paar ist spitzwinklig und wird speziell für $c = (\sqrt{3}+1)\frac{b}{2}$ gleichseitig.

9. $c = \infty$.

Alle 4 Dreiecke sind unendlich gross.

§ 31. *Zweites Lösungsverfahren.* ***Bestimmung** der Schnittpunkte D.* Bedingungen wie in § 29.

Wir bekommen eine unächte Kurve 8. Ordnung als Hilfskurve. Ihre Gleichung hat die Form

$$\left\{4x^2(x^2+y^2) - (2cx-by)^2\right\}\left\{4x^2\cdot(x^2+y^2) - (2cx+by)^2\right\} = 0. \quad (6)$$

Die Kurve (6) zerfällt in die 2 Kurven 4. Ordnung:

$$4x^2(x^2+y^2) - (2cx-by)^2 = 0 \quad (7)$$

und

$$4x^2(x^2+y^2) - (2cx+by)^2 = 0. \quad (8)$$

Die beiden Teilkurven sind Spiegelbilder voneinander in Bezug auf beide Axen. Wir haben es daher im Grund nur mit einer Kurve 4. Ordnung zu tun. Sie ist uns in der Form begegnet in $IX_{(10)}$, pag. 85, und wurde beschrieben im V. Abschnitt. Die Lösungen lassen sich ebenfalls nicht allgemein bestimmen. Man kann nur für Spezialdreiecke die zugehörigen Werte von c berechnen. Man findet ganz dieselben Resultate wie oben. Zu jeder Teilkurve gehören zwei ungleiche Lösungen mit Ausnahme des Falles, da $c = o$ ist, wo dieselben zusammenfallen. Die Dreiecke, die zu den zwei Teilkurven gehören, sind Spiegelbilder voneinander in Bezug auf die x-Axe.

In allen Fällen, da $c < b$ ist, entsprechen die Dreiecke der Relation: $h_b - m = \pm c$. Ist $c = b$, so gilt $h_b \pm m = \pm c$. Ist $c > b$, so finden wir die Bedingung erfüllt: $h_b \pm m = + c$ (vergleiche § 29).

§ 32. *Uebersichtliche Zusammenstellung der Resultate.*

I.

Gegeben: b und $h_b \pm n = c$.

Lösungen:

1. $c > \frac{b}{2}\sqrt{6\sqrt{3} - 9}$; 1 reelles Dreieck;
2. $c \overline{\overline{<}} \frac{b}{2}\sqrt{6\sqrt{3} - 9}$; 3 reelle Dreiecke.

II.

Gegeben: b und $s \pm n = c$.

Lösungen:

Für jeden Wert von $c \neq 0$ 2 reelle, symmetrische Dreiecke. Für $c = 0$ 4 reelle, zusammenfallende Dreiecke, die unendlich klein sind.

III.

Gegeben: b und $h_s \pm n = c$.

Lösungen:

1. $c > \frac{b}{2}\sqrt{3\sqrt[3]{13 + 16\sqrt{2}} + 3\sqrt[3]{13 - 16\sqrt{2}} - 1}$; 2 reelle verschiedene Dreiecke;