Über das Airysche Integral

A. Bohren.

(Eingereicht den 6. Oktober 1902.)

Über das Airysche Integral.

Als mathematischen Ausdruck der Intensität der einzelnen Farben im Regenbogen findet Airy[1]) das nach ihm benannte Integral

$$A = \int_0^{\infty} \cos \frac{\pi}{2} (x^3 - m x)\, dx.$$

Airy wertet dasselbe schon für die Argumente $m = -5{,}6$ bis $m = +5{,}6$ aus, allerdings noch auf umständlichem Wege. Infolge der Bedeutung, die dem Integral in der mathematischen Optik zukommt, ist in erster Linie nach einfachern Auswertungsmethoden gesucht worden. Stokes[2]) bedient sich folgender Formeln

$$A = 2^{\frac{1}{2}} (3m)^{-\frac{1}{4}} \left[R \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) + S \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)\right],$$

worin $R = 1 - \frac{1 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11}{1 \cdot 2 (72\varphi)^2} + \frac{1 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 (72\varphi)^4} - + \cdots$

$$S = \frac{1 \cdot 5}{1 \cdot 72\varphi} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17}{1 \cdot 2 \cdot 3 (72\varphi)^3} + - \cdots.$$

und $$\varphi = \pi \left(\frac{m}{3}\right)^{\frac{1}{2}},$$

mit deren Hilfe er ausgedehnte Tafeln berechnet.

Die Wurzelwerte der Gleichung $A = 0$ ergeben sich nach ihm aus

[1]) Transact. of the Cambridge phil. soc. 1838. pag. 379.

[2]) Stokes, Math. and phys. papers Cambridge 1883. II vol. p. 332.

$$\frac{\varphi}{\pi} = n - 0{,}25 + \frac{0{,}028145}{4n-1} - \frac{0{,}26510}{(4n-1)^3} + \frac{0{,}129402}{(4n-1)^5},$$

$$\text{wo } n = 1, 2, 3, 4 \cdots$$

und für die Maxima und Minima rechnet er nach einer ähnlichen Formel die 50 ersten entsprechenden Werte von m aus. Für Ausführung von Intensitätsberechnungen[1]) sind die Zahlenwerte des Integrals genügend bekannt; die vorliegende Mitteilung befasst sich auch nicht mit der Beschaffung neuer Zahlenwerte; aber es ist vielleicht von Interesse, zu sehen, wie auch dieses Integral durch Besselsche Funktionen einfach darstellbar ist.

Setzt man

$$\mathrm{I.} = \int_0^\infty e^{\frac{i\pi}{2}(x^3 - mx)} dx$$

$$\mathrm{II.} = \int_0^\infty e^{-\frac{i\pi}{2}(x^3 - mx)} dx,$$

so ist

$$\int_0^\infty \cos\frac{\pi}{2}(x^3 - mx)\, dx = \frac{1}{2}(\mathrm{I} + \mathrm{II}).$$

Für das Integral $\int e^{\frac{i\pi}{2}(x^3 - mx)} dx$ wähle man folgenden Integrationsweg: Die Begrenzung eines Kreissektors (mit dem Centrum O, dem Radius R), der durch die x-Axe und eine Gerade, die mit derselhen einen Winkel von 30^0 bildet, begrenzt ist.

Das Integral, über diesen Weg erstreckt, ist nach Cauchy = 0. Längs des Bogens verschwindet es, wenn R unendlich gross wird; somit ist

$$\int_0^\infty e^{\frac{i\pi}{2}(x^3 - mx)} dx = \int e^{\frac{i\pi}{2}(x^3 - mx)} dx \text{ längs OB, wenn B un-}$$

endlich weit vorausgesetzt wird.

$$= \int_0^\infty e^{\frac{i\pi}{2}\left(i x^3 - m x e^{\frac{i\pi}{6}}\right)} e^{\frac{i\pi}{6}} dx$$

$$= e^{\frac{i\pi}{6}} \int_0^\infty e^{-\frac{\pi}{2}x^3} e^{-\frac{i\pi}{2} m x e^{\frac{i\pi}{6}}} dx.$$

---

[1]) Pernter, die Farben des Regenbogens. Sitzungsberichte d. Akademie Wien 1896, p. 135.

Entwickeln wir nach Potenzen von m, so erhalten wir eine konvergente Reihe von der Form

$$= e^{\frac{i\pi}{6}} \sum_{r=0}^{\infty} \int_0^{\infty} (-1)^r \frac{\left(\frac{i\pi}{2} m e^{\frac{i\pi}{6}}\right)^r}{\Gamma(r+1)} e^{-\frac{\pi}{2}x^3} x^r \, dx$$

da $\int_0^{\infty} e^{-\frac{\pi}{2}x^3} x^r \, dx = \frac{1}{3}\int_0^{\infty} e^{-\frac{\pi}{2}y} y^{\frac{r+1}{3}-1} dy = \frac{1}{3} \frac{\Gamma\left(\frac{r+1}{3}\right)}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{r+1}{3}}}$

so ist $\int_0^{\infty} e^{\frac{i\pi}{2}(x^3 - mx)} dx = \frac{e^{\frac{i\pi}{6}}}{3} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{\left[\frac{i\pi}{2} m e^{\frac{i\pi}{6}}\right]^r \Gamma\left(\frac{r+1}{3}\right)}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{r+1}{3}} \Gamma(r+1)}.$

Setzt man in

$$\Gamma(a) \cdot \Gamma\left(a + \frac{1}{n}\right) \cdot \cdot \Gamma\left(a + \frac{n-1}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{-an+\frac{1}{2}} \Gamma(na)$$

$$a = \frac{r+1}{3} \text{ und } n = 3, \text{ so ist}$$

$$\Gamma\left(\frac{r+1}{3}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{r+2}{3}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{r}{3}+1\right) = 2\pi 3^{-r-\frac{1}{2}} \Gamma(r+1)$$

und

$$I = \frac{2\pi}{3^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} e^{\frac{i\pi}{6}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{\Gamma\left(\frac{r+2}{3}\right) \Gamma\left(\frac{r}{3}+1\right)} \left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{i m e^{\frac{i\pi}{6}}}{3}\right]^r.$$

Zerlegen wir die Reihe in 3 Partialreihen, entsprechend den Werten von r, die durch 3 dividiert, die Reste 1, 0, — 1 ergeben, so folgt

$$I = \frac{2\pi}{3^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} e^{-\frac{i\pi}{6}} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\lambda}}{\Gamma(\lambda+1) \cdot \Gamma\left(\lambda+1+\frac{1}{3}\right)} \left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{m}{3}\right]^{3\lambda+1}$$

$$+ \frac{2\pi}{3^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} e^{\frac{i\pi}{6}} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\lambda}}{\Gamma\left(\lambda+\frac{2}{3}\right) \Gamma(\lambda+1)} \left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{m}{3}\right]^{3\lambda}$$

$$+\frac{2\pi}{3^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} i\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\lambda}}{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{3}\right)\cdot\Gamma\left(\lambda+\frac{2}{3}\right)}\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\frac{m}{3}\right]^{3\lambda-1}.$$

Das Integral II erhält man aus I, indem man i durch —i ersetzt. Führt man die Besselsche Funktion

$$\overset{a}{J}(x)=\sum_{\lambda=0}^{\infty}(-1)^{\lambda}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{a+2\lambda}}{\Gamma(a+\lambda+1)\cdot\Gamma(\lambda+1)}$$

ein, und bedenkt man, dass $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, so ergibt sich

$$A=\frac{1}{2}(I+II)=$$

$$=\frac{\pi}{3}\left(\frac{m}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{\overset{\frac{1}{3}}{J}\left[\pi\left(\frac{m}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\right]+\overset{-\frac{1}{3}}{J}\left[\pi\left(\frac{m}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\right]\right\}.$$

Spezialfälle

$$m=0\qquad\int_0^{\infty}\cos\frac{\pi}{2}x^3\,dx=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{2^{\frac{2}{3}}3^{\frac{1}{2}}\pi^{\frac{1}{3}}}$$

$$m=3\qquad\int_0^{\infty}\cos\frac{\pi}{2}(x^3-3x)\,dx=\frac{\pi}{3}\left[\overset{\frac{1}{3}}{J}(\pi)+\overset{-\frac{1}{3}}{J}(\pi)\right]\quad\text{etc.}$$

Wenn auch die vorliegenden Ausdrücke nicht so einfach sind wie die, die bei der Darstellung der Fresnelschen Integrale durch Besselsche Funktionen auftreten, so sind sie doch von einigem Interesse.