Ad. Gasser.

Ueber die Nullstellen der Besselschen Funktionen.

(Eingereicht im Juli 1904.)

Einleitung.

Als allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$x^2 \frac{d^2 y}{d x^2} + x \frac{d y}{d x} + (x^2 - a^2)\, y = 0,$$

worin a eine beliebige Zahl bedeutet, kann gesetzt werden:

$$y = A \overset{a}{J}(x) + B \overset{a}{K}(x).$$ [1]

A und B sind arbiträre Konstante, $\overset{a}{J}(x)$ und $\overset{a}{K}(x)$ nennen wir die *Besselschen Funktionen I. Art.*

$\overset{a}{J}(x)$ lässt sich durch folgende Reihe darstellen

$$\overset{a}{J}(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^{\lambda} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{a+2\lambda}}{\lambda!\, \Gamma(a+\lambda+1)},$$

woraus sich das Integral ergibt

$$\overset{a}{J}(x) = \frac{1}{2 i \pi} \int_{-\frac{N}{x}} e^{\frac{x}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)}\, t^{-a-1}\, d t.$$

N ist eine zum unendlich Werden bestimmte Zahl.

Zwischen $\overset{a}{K}(x)$ und $\overset{a}{J}(x)$ besteht die Beziehung

$$\overset{a}{K}(x) = \operatorname{cotg} a \pi\, \overset{a}{J}(x) - \frac{1}{\sin a \pi} \overset{-a}{J}(x),$$

woraus sich auch eine Summenformel und Integraldarstellungen für $\overset{a}{K}(x)$ bilden lassen.

Auf die Besselschen Funktionen stösst man bei der mathematischen Behandlung mehrerer physikalischer und astronomischer Probleme, und es spielen darin meist die Nullstellen derselben eine bedeutende Rolle.

[1]) L. Schläfli, Annali di Matem. Ser. II[a] T. VI.

Von verschiedenen Mathematikern sind daher Untersuchungen angestellt worden, um die Zahl und Lage derselben zu ermitteln, ohne dass es bis dahin gelungen ist, einen einfachen Weg zur genauen Berechnung zu finden.

Wir haben uns die Aufgabe gestellt, die bis dahin bekannten Resultate und eingeschlagenen Methoden kurz zusammenzustellen und in einem zweiten Abschnitt eine derselben weiterzuführen.

I. Historischer Überblick.

Bereits *Poisson*[1]) hat gezeigt, dass die Gleichung $\overset{a}{J}(x) = 0$ für reelle a *nur reelle Wurzeln* besitzen kann. Er stellt das Integral auf:

$$\int_0^1 t\,\overset{a}{J}(\alpha t) \cdot \overset{a}{J}(\beta t)\,dt = 0,$$

worin α und β zwei beliebige aber verschiedene Wurzeln von $\overset{a}{J}(x) = 0$ bedeuten. Wäre α komplex, so könnten wir als β die konjugiert komplexe Wurzel wählen, es müssten dann auch $\overset{a}{J}(\alpha t)$ und $\overset{a}{J}(\beta t)$ konjugiert sein; ihr Produkt wäre positiv längs des ganzen Weges, somit könnte das Integral nicht den Wert Null annehmen.

Kurze Zeit später hat *Sturm*[2]) eine allgemeine Methode entwickelt, welche, angewendet auf die Besselschen Funktionen, sehr weitgehende Schlüsse auf die Lage ihrer Nullstellen zulässt. Da wir jedoch dieselbe im zweiten Teil unserer Arbeit einlässlich behandeln, so sei sie hier nur erwähnt. Dagegen müssen wir uns etwas länger bei der interessanten Untersuchung von *Hurwitz*[3]) aufhalten. Er beschäftigt sich nicht direkt mit den Besselschen Funktionen, wie wir sie eingangs definiert haben, sondern geht aus von einer verwandten aber einfachern Reihe. Er setzt

---

[1]) Sur la distribut. d. l. chaleur d. l. corps solides. Paris 1821.
[2]) Liouville Journal. Vol. 1. 1831.
[3]) Math. Annalen. Bd. 33. 1889.

$$f_a(z) = \frac{1}{\Gamma(a+1)} + \frac{z}{\Gamma(a+2)\cdot 1!} + \cdots + \frac{z^r}{\Gamma(a+r+1)\cdot r!} + \cdots$$

und es gilt dann:

$$\overset{a}{J}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^a f_a\left(-\frac{x^2}{4}\right).$$

Daraus ergeben sich mit Leichtigkeit die Nullstellen von $\overset{a}{J}(x)$, wenn diejenigen von $f_a(z)$ bekannt sind. Hurwitz sucht die Aufgabe weiterhin zu vereinfachen, indem er die transzendente Funktion $f_a(z)$ durch eine rationale zu ersetzen sucht, deren Nullstellen in einem bestimmten Grenzfall mit denjenigen der transzendenten zusammenfallen. Zu diesem Zwecke beweist er folgenden Satz: *Es sei $f(z)$ die gleichmässige Grenze der Funktionsreihe*

$$g_0(z),\ g_1(z),\ g_2(z), \cdots\cdots, g_\nu(z), \cdots\cdots$$

so dass gilt $\lim\limits_{\nu=\infty} g_\nu(z) \equiv f(z)$, *so liegen in einem Gebiet, in welchem $f(z)$ endlich und stetig, und die Funktionen $g_\nu(z)$ alle den Charakter einer rationalen Funktion besitzen, die Nullstellen von $f(z)$ in den Verdichtungsstellen der Wurzeln der Gleichungen*

$$g_0(z) = 0,\quad g_1(z) = 0,\quad g_2(z) = 0,\quad \cdots\cdot g_\nu(z) = 0$$

und zwar liegen in einer beliebig kleinen Umgebung der Stelle w, die eine ν-fache Wurzel von $f(z) = 0$ ist, genau ν Nullstellen von $g_\nu(z)$, so bald ν eine bestimmte, von der Grösse jener Umgebung abhängende Zahl überschreitet.

Als solche Hilfsfunktion $g_\nu(z)$ wählt Hurwitz Zähler und Nenner der Kettenbruchentwicklung des Quotienten $\dfrac{f_a(z)}{f_{a+1}(z)}$, welche Funktionen von *Heine*[1]), *Christoffel*[2]) und *Lommel*[3]) bearbeitet worden sind.

$g^a_\nu(z)$ ist definiert durch die Reihe

$$g^a_\nu(z) = \sum_{r=0} \binom{\nu - r}{r} \frac{\Gamma(a+\nu-r)}{\Gamma(a+r)} z^r$$

und hängt in folgender Weise mit $f(z)$ zusammen:

$$g^a_\nu = \frac{(-1)^\nu \cdot \pi}{\sin a\pi} \left\{ f_{a-1} \cdot f_{-a-\nu} - z f_{-a+1} \cdot f_{a+\nu} \right\}.$$

---

[1]) Heine, Handbuch der Kugelfunkt. Bd. 1.

[2]) Crelle Journal Bd. 58.

[3]) Math. Annalen Bd. 4.

Setzt man für $f_{a+\nu}$ und $f_{-a-\nu}$ die Reihenentwicklungen ein, so lässt sich leicht zeigen, dass $\lim\limits_{\nu=\infty} \dfrac{g_\nu^a}{\Gamma(a+\nu)} = f_{a-1}$. Man findet daher die Wurzeln der Gleichung $f_a(z) = 0$ mit beliebiger Genauigkeit, indem man diejenigen von $g_\nu^{a+1}(z) = 0$ bestimmt. Mit wachsendem ν wird die Übereinstimmung immer besser. Diese Hilfsfunktion $g_\nu^a(z)$ ist nebenbei bemerkt nahe verwandt mit der von *Graf* und *Gubler* [1]) eingeführten *Schläflischen Funktion*, deren Definition ganz ähnlich lautet.

Sie ist definiert als Zähler und Nenner der Kettenbruchentwicklung von $\dfrac{\overset{a}{J}(x)}{\overset{a-1}{J}(x)}$. Es ist

$$\frac{\overset{a}{J}(x)}{\overset{a-1}{J}(x)} = \lim_{\nu=\infty} \frac{\overset{a}{P}_\nu(x)}{\overset{a-1}{P}_{\nu+1}(x)},$$

wobei $\overset{a}{P}_\nu(x)$ die ν^{te} Schläflische Funktion mit dem Parameter a bezeichnet. $\overset{a}{J}(x)$ bildet ihre gleichmässige Grenze. Ferner ist

$$\overset{a}{P}_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \sum_{r=o} (-1)^r \binom{\nu-r}{r} \frac{\Gamma(a+\nu-r+1)}{\Gamma(a+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2r}.$$

Mit der Summenformel von $g_\nu(z)$ verglichen, ergibt sich

$$\overset{a}{P}_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} g_\nu^{a+1}\left(-\frac{x^2}{4}\right),$$

somit fallen die Nullstellen von $\overset{a}{P}_\nu(x)$ mit denjenigen von $g_\nu^{a+1}\left(-\frac{x^2}{4}\right)$ zusammen, und es gilt der Satz:

Die Nullstellen der Besselschen Funktion $\overset{a}{J}(x)$ liegen in den Verdichtungsstellen derjenigen der Schläflischen Funktion.

Anmerkung. Es ist uns gelungen, eine Differentialgleichung der Schläflischen Funktion aufzustellen. Sie lautet:

$$\frac{x^2}{4}\frac{d^4y}{dx^4} + \frac{x}{2}\frac{d^3y}{dx^3} - (p-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{p}{2x} + 2x\right)\frac{dy}{dx} + \frac{qy}{4x^2} = 0,$$

wobei

$$p = m\left(\frac{m}{2} + a + 1\right) + \left(a + \frac{1}{2}\right)^2$$

$$q = m(m+2)\left\{4a(a+m+1) + m(m+2)\right\}.$$

[1]) Theorie der Besselschen Funkt. II. Art. S. 99. Bern.

Die weitern Schlüsse von Hurwitz basieren auf einem bekannten Sturmschen Satz über den Zeichenwechsel innerhalb einer Funktionsreihe bei Variationen des Arguments. Der Vollständigkeit halber wollen wir diesen kurz vorführen.

Es sei folgende Funktionsreihe gegeben:

$$V_m,\ V_{m-1}, \cdots V_{\mu+1},\ V_\mu,\ V_{\mu-1} \cdots V_1,\ V_0.$$

V_i sei eine ganze rationale Funktion der komplexen Variablen z vom Grade i. Der Koeffizient von z^i sei positiv. Ferner erfülle V_i die Bedingungen:

1. Wenn $i \lessgtr \mu$, so besitzen, wenn V_i verschwindet, die Funktionen V_{i+1} und V_{i-1} von Null verschiedene Werte von ungleichem Vorzeichen, dagegen wenn $i = \mu$, so sollen sie gleiche Vorzeichen haben.
2. Geht z von $-\infty$ bis $+\infty$, so geht $\frac{V_m}{V_{m-1}}$ überall, wo der Quotient $= 0$ wird, von negativen zu positiven Werten über; oder mit andern Worten: Zwischen 2 aufeinanderfolgenden Nullstellen von V_m muss stets eine ungerade Zahl von Nullstellen von V_{m-1} liegen.
3. Die Gleichung $V_m = 0$ hat keine mehrfachen reellen Wurzeln.

Unter diesen Voraussetzungen hat die Reihe $V_\mu,\ V_{\mu-1} \cdots V_1,\ V_0$ für $z = -\infty$ μ Zeichenwechsel, während sie für $z = +\infty$ μ Zeichenfolgen aufweist. Geht daher z von $-\infty$ bis $+\infty$, so gehen μ Zeichenwechsel verloren. Es ist klar, dass ein solcher Verlust nur stattfinden kann, wenn eine der Funktionen V durch 0 hindurch geht, und durch die Voraussetzung 1) beschränkt sich dieser Verlust auf diejenigen Nullstellen von V_μ, wo $\frac{V_\mu}{V_{\mu-1}}$ von negativen zu positiven Werten übergeht. Es muss deshalb V_μ wenigstens μ reelle Wurzeln haben. Da diese Funktion aber vom Grade μ ist, so folgt der Satz: *Die Gleichung $V_\mu = 0$ hat nur reelle Wurzeln, und es geht der Quotient $\frac{V_\mu}{V_{\mu-1}}$ jedesmal, wenn er verschwindet, von negativen zu positiven Werten über.*

Auf gleiche Weise ziehen wir Schlüsse aus der Reihe $V_m,\ V_{m-1}, \cdots V_{\mu+1},\ V_\mu,\ V_{\mu-1}, \cdots V_1,\ V_0$; durchläuft z alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$, so gehen m Zeichenwechsel verloren. Ein solcher Verlust kann hier eintreten erstens, wenn $V_m = 0$, und zweitens, wenn $V_\mu = 0$. Im letztern Falle gehen immer gleichzeitig zwei Zeichenwechsel verloren. Da $V_\mu = 0$ μ reelle Wurzeln besitzt, so ist die Zahl dieser Verluste 2μ. Es bleiben deshalb noch $m - 2\mu$ Verluste an Zeichenwechseln, die vom Verschwinden der Funktion V_m herrühren. Es muss diese somit *$m - 2\mu$ reelle und 2μ imaginäre Nullstellen besitzen.*

Die Bedingungen, denen die Funktionen V unterworfen sind, werden durch die g-Funktionen erfüllt, wie aus der Summenformel[1])

$$\overset{a}{g}_{2\nu} = \sum_{r=0} \binom{2\nu - r}{r} \frac{\Gamma(a + 2\nu - r)}{\Gamma(a + r)} z^r$$

und der daraus abgeleiteten Beziehung

$$(a + 2\nu - 1)\, g_{2\nu+2} = C_{2\nu}\, g_{2\nu} - (a + 2\nu + 1)\, z^2\, g_{2\nu-2},$$

wobei $C_\nu = (a + \nu)\{(a + \nu - 1)(a + \nu + 1) + 2z\}$,

leicht ersichtlich ist. Wenn $g_{2\nu} = 0$, so müssen $g_{2\nu+2}$ und $g_{2\nu-2}$ ungleiche Vorzeichen besitzen, so lange sowohl $(a + 2\nu - 1)$ als $(a + 2\nu + 1)$ positiv ist. Da ν von 1 an zählt, so ist dies sicher der Fall, sobald $a > -1$. Es kann deshalb in der Reihe $g_{2\nu}$, $g_{2\nu-2} \cdots g_2$, g_0 nur ein Zeichenwechsel verloren gehen, wenn $g_{2\nu} = 0$ wird. Da im ganzen ν solcher Verluste erfolgen und dies zugleich die Zahl der Nullstellen von $g_{2\nu}$ ist, so gilt folgender Satz: *Ist $a > -1$, so besitzen die Gleichungen $\overset{a}{g}_{2\nu}(z) = 0$ für jedes ν nur reelle Wurzeln, und es geht der Quotient $\dfrac{\overset{a}{g}_{2\nu}(z)}{\overset{a}{g}_{2\nu-2}(z)}$ jedesmal, wenn z eine Nullstelle von $g_{2\nu}(z)$ passiert, von negativen zu positiven Werten über.*

Die Zahl der positiven Wurzeln erhalten wir, indem wir z von 0 bis $+\infty$ wachsen lassen und die Zahl der eintretenden Verluste an Zeichenwechseln bestimmen. Für $z = 0$ ist aber:

$$g_0 = 1, \quad g_2 = a(a+1), \quad g_4 = (a+2)(a+3)\, g_2$$

allgemein: $\quad g_{2\nu+2} = (a + 2\nu)(a + 2\nu + 1)\, g_{2\nu}$.

[1]) Der Einfachheit halber betrachten wir nur die geraden g-Funktionen.

Für positive a sind alle diese Ausdrücke positiv, es tritt somit kein Zeichenwechsel ein, wenn z von 0 bis $+\infty$ wächst und deshalb haben die Gleichungen $\overset{a}{g}_{2\nu}(z) = 0$ keine positiven Wurzeln. Liegt dagegen a zwischen 0 und -1, so ist $|\overset{a}{g}_2(z)|_{z=0}$ negativ, und es geht mit wachsendem z ein Zeichenwechsel verloren. Wir erhalten somit den Satz:

Die Gleichung $\overset{a}{g}_{2\nu}(z) = 0$ *hat eine positive und* $\nu - 1$ *negative Wurzeln, wenn a zwischen* -1 *und 0 liegt, dagegen sind alle Wurzeln negativ, wenn* $a > 0$. Ist aber $a < -1$, liegt es z. B. zwischen $-(2\mu - 1)$ und $-(2\mu + 1)$, wo μ eine ganze positive Zahl bedeutet, so folgt aus

$$(a + 2\nu - 1)\, g_{2\nu+2} = c_{2\nu}\, g_{2\nu} - (a + 2\nu + 1)\, z^2\, g_{2\nu-2},$$

dass in der Funktionsreihe

$$g_{2\nu},\ g_{2\nu+2},\ \dots\ g_{2\mu+2},\ g_{2\mu},\ g_{2\mu-2},\ \dots\ g_0$$

immer, wenn eine der Funktionen verschwindet, die benachbarten gleiches Vorzeichen besitzen, ausgenommen dann, wenn $g_{2\mu}$ zu Null wird.

Ferner lässt sich zeigen, dass für grosse ν der Differentialquotient von $\dfrac{g_{2\nu}}{g_{2\nu-2}}$ einen positiven, von Null verschiedenen Wert besitzt und somit erfüllt die Funktionsreihe

$$g_{2\nu},\ g_{2\nu-2} \dots\ g_{2\mu} \dots\ g_0$$

für grosse ν alle Bedingungen, die wir für die Reihe

$$V_m,\ V_{m-1} \dots\ V_\mu \dots\ V_0$$

aufgestellt haben, und so können wir den für die Funktion V_m ausgesprochenen Satz auf unsere Funktion $\overset{a}{g}_{2\nu}$ anwenden.

Wir untersuchen wieder die Zahl der positiven Wurzeln. Für $z = 0$ ist $\overset{a}{g}_{2\nu+2} = (a + 2\nu)(a + 2\nu + 1)$. Liegt a zwischen $-(2\mu - 1)$ und $-(2\mu)$, so hat $\overset{a}{g}_{2\nu+2}$ für jedes ν das positive Zeichen, während, wenn a zwischen $-(2\mu + 1)$ und -2μ gelegen ist, $\overset{a}{g}_{2\mu+2}(z)$ das einzige Glied ist, das für $z = 0$ negativ wird. Wir erhalten also im letztern Falle einen einzigen Verlust an Zeichenwechseln, wenn z von 0 bis $+\infty$ wächst. Dies ergibt den Satz: *Liegt a zwischen* $-(2\mu+1)$ *und* $-(2\mu-1)$, *so besitzt die Gleichung* $\overset{a}{g}_{2\nu}(z)=0$ *genau* 2μ *imaginäre Wurzeln, falls* ν *eine gewisse Zahl N überschreitet. Zugleich ist von den reellen Wurzeln dieser Gleichung eine oder keine positiv, je nachdem a zwischen* $-(2\mu+1)$ *und* -2μ *oder zwischen* -2μ *und* $-(2\mu-1)$ *liegt.*

Da die Nullstellen der Besselschen Reihe $f_{a-1}(z)$ in den Verdichtungsstellen der Wurzeln der Gleichungen $\overset{a}{g}_{\nu}(z)=0$ liegen und diejenigen der Besselschen Funktion $\overset{a-1}{J}(x)$ gefunden werden, indem man setzt $-\frac{x^2}{4}=z$, so ergibt sich ohne weiteres:

Die Wurzeln der Gleichung $\overset{a}{J}(x)=0$ *sind sämtlich reell und paarweise entgegengesetzt gleich, wenn* $a>-1$. *Liegt aber a zwischen* -1 *und* -2, *so fallen 2 derselben auf die imaginäre Axe und liegen symetrisch zum Nullpunkt.*

Dagegen können wir die Sätze für den Fall, wo $a<-2$ nicht ohne weiteres anwenden, da die Verdichtungsstelle eines Systems komplexer Werte nicht notwendigerweise komplex sein muss. Um nachzuweisen, dass sie es in diesem Falle ist, gehen wir aus von der Gleichung

$$g_{2\nu}(z)+\lambda g_{(2\nu+1)}(z)=0,$$

wobei λ einen reellen variablen Parameter bedeutet. Für $\lambda=0$ hat diese Gleichung für ein genügend grosses ν sicher μ-Paare konjugiert komplexer Wurzeln. Variiert r, so kann ein solches Paar nur verschwinden, wenn sich die konjugierten Werte auf der Realitätsgeraden treffen und eine reelle Doppelwurzel bilden. In diesem Punkte würde aber, da $\frac{g_{2\nu+1}}{g_{2\nu}}=-\frac{1}{\lambda}$, der Differentialquotient dieses Bruches $=0$, was nach früherem nicht möglich ist. Durchläuft deshalb λ kontinuierlich alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$, so bewegen sich die komplexen Wurzeln der Gleichung $\overset{a}{g}_{2\nu}(z)+\lambda\overset{a}{g}_{2\nu+1}(z)=0$ auf einer Kurve, die aus 2μ getrennten Zügen besteht. Es lässt sich zeigen, dass diese ganz im Endlichen liegen und in sich geschlossene Ovale bilden, von denen keines das andere schneidet oder berührt. Dagegen wird jedes

Oval, das zur Gleichung $g_{2\nu} + \lambda g_{2\nu+1} = 0$ gehört, von Innen berührt durch ein Oval, auf dem die komplexen Wurzeln der Gleichung $g_{2(\nu+1)} + \lambda g_{2(\nu+1)+1} = 0$ liegen. Der Berührungspunkt liegt da, wo $g_{2\nu+1}(z) = 0$. Ferner müssen sich die Ovale mit wachsendem ν verkleinern, und jedes schrumpft für $\nu = \infty$ in einen Punkt zusammen, der nach früherem eine Nullstelle von $f(z)$ sein muss.

Da aber $$\overset{a}{J}(x) = \left(\frac{x}{2}\right) f_a \left(-\frac{x^2}{4}\right),$$
so erhält man die Nullstellen von $\overset{a}{J}(x)$, indem wir setzen
$$z = -\frac{x^2}{4}$$
und nach x auflösen.

Wir bekommen dann aus einem konjugierten Wurzelpaar von $f_a(z) = 0$ deren zwei für die Gleichung $\overset{a}{J}(x) = 0$. Die Resultate von Hurwitz auf die Besselschen Funktionen übertragen, lauten somit:

Die Gleichung $\overset{a}{J}(x) = 0$ hat für negative, zwischen $-(2\mu + 2)$ und -2μ liegende Werte von a genau 2μ-Paare konjugiert komplexer und übrigens unendlich viele reelle Wurzeln. Zur nähern Bestimmung der komplexen Wurzeln hat man eine unendliche Reihe algebraischer Kurven
$$\psi_\nu(x, y) = 0, \quad \psi_{\nu+1}(x, y) = 0 \ldots,$$
von denen jede einzelne aus 4μ im Endlichen und aussereinanderliegenden Ovalen besteht. Das einzelne Oval der Kurve $\psi_\nu = 0$ berührt und umschliesst je ein Oval der nächstfolgenden Kurve $\psi_{\nu+1} = 0$ und enthält zugleich in seinem Innern je eine imaginäre Nullstelle von $\overset{a}{J}(x)$. Auf diese Nullstelle zieht sich das Oval mit wachsendem ν immer mehr zusammen. Dazu kommen noch zwei auf der lateralen Axe liegende Wurzeln für den Fall, dass a zwischen $-(2\mu + 1)$ und $-(2\mu + 2)$ liegt.

Durch Anwendung von Integralsätzen bestimmt Hurwitz *die Lage der komplexen Wurzeln* von $f_a(z) = 0$ noch genauer; das Resultat spricht er aus in dem Satz: *Die komplexen Wurzeln der Gleichung $-f_{a-1}(z) = 0$ liegen in denjenigen Gebieten der Ebene, in denen die Funktion*

$$h_\nu(x, y) = \frac{g_\nu(z) \cdot g_{\nu-1}(z') - g_{\nu-1}(z) \cdot g_\nu(z')}{z - z'}$$

negativ ist.

Dabei bedeuten z und z′ 2 konjugierte Werte und ν eine ganze Zahl, die der Bedingung: $a + \nu > 0$, genügt. Ferner hat er den Fall untersucht, wenn *a eine komplexe Zahl* mit positivem reellem Bestandteil ist, und dabei folgendes gefunden:

Es sei a eine Zahl mit positivem reellem Bestandteil. Man ziehe durch den Punkt $-\frac{a^2}{4}$ *zwei Halbstrahlen, von welchen der erste parallel zur Axe der negativen reellen Zahlen läuft, während die Verlängerung des zweiten durch den Nullpunkt geht. Die sämtlichen Wurzeln der Gleichung* $f_a(z) = 0$ *liegen dann in dem von den genannten Strahlen begrenzten (konvexen) Winkelraum.*

Auf die Beweise dieser letzten Sätze können wir nicht eintreten, da sonst unsere Arbeit zu ausgedehnt würde; der Vollständigkeit halber haben wir sie trotzdem angeführt.

Das sind in kurzen Zügen die Resultate, die wir Hurwitz verdanken. Seine höchst interessante Methode gibt uns genauen Aufschluss über die Zahl der Nullstellen der Besselschen Funktion, lässt aber die Lage derselben ziemlich unbestimmt. Immerhin liefern diese Resultate eine erste Annäherung.

Wir wenden uns nun zur Besprechung einer Note von *Rudsky*.[1])

Eingangs derselben führt er einen Beweis, dass zwischen zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen von $\overset{a}{J}(x)$ stets eine, aber nur eine Nullstelle von $\overset{a+1}{J}(x)$ liegen kann. Dieser Beweis wurde später auch von Bocher[2]) gegeben, und wir wollen ihn kurz reproduzieren.

Es sei gegeben

$$y(z) = 1 - \frac{z}{a+1} + \frac{z^2}{2!(a+1)(a+2)} - \frac{z^3}{3!(a+1)(a+2)(a+3)} + \cdots,$$

---

1) Mém. de la Société Roy. d. Sciences de Liège (2) Bd. 18.

2) Bull. Americ. Math. Soc. (2) Bd. 3. 97.

$$\text{dann ist } \overset{a}{y}(z) = \Gamma(a+1)\left(\frac{x}{2}\right)^{-a}\overset{a}{J}(x), \text{ wenn}$$

$$z = +\frac{x^2}{4}.$$

$\overset{a}{y}\left(\frac{x^2}{4}\right)$ hat die gleichen Nullstellen wie $\overset{a}{J}(x)$.

$y(z)$ genügt der Differentialgleichung:

$$z\frac{d^2\overset{a}{y}}{dz^2} + (a+1)\frac{d\overset{a}{y}}{dz} + \overset{a}{y} = 0 \tag{1}$$

und aus der Reihe folgt die Beziehung:

$$\overset{a+1}{y}(z) = -(a+1)\frac{d\overset{a}{y}}{dz}. \tag{2}$$

Für $z = 0$ ist $\overset{a}{y}(z) = 1$

und $\frac{d\overset{a}{y}(z)}{dz}$ negativ für a, die grösser sind als -1.

Es muss somit $\overset{a}{y}(z)$ mit wachsendem z abnehmen und wenn es die Nulllinie passiert, so ist $\frac{d\overset{a}{y}(z)}{dz}$ immer noch negativ und somit nach (2) $\overset{a+1}{y}(z)$ positiv. Die erste Nullstelle von $\overset{a+1}{y}(z)$ muss also *nach* derjenigen von $\overset{a}{y}(z)$ liegen.

Nehmen wir zwei beliebige benachbarte Werte α und β, welche $\overset{a}{y}(z)$ zu Null machen, so muss, nach derselben Gleichung (2), zwischen diesen sich sicher *wenigstens eine* Nullstelle von $\overset{a+1}{y}(z)$ befinden.

Wären es mehr als eine, z. B. k, so müsste in dem Intervall (α, β) die zweite Ableitung $(k-1)$mal verschwinden. Die Differentialgleichung (1) zeigt uns aber, dass $\overset{a}{y}(z)$ sein Zeichen ebenso oft wechselt als $\frac{d^2\overset{a}{y}(z)}{d^2 z}$.

$$\text{Somit ist } k - 1 = 0$$
$$k = 1,$$

d. h. *zwischen zwei beliebigen aufeinanderfolgenden Wurzeln der Gleichung $\overset{a}{y}(z) = 0$ liegt eine, aber nur eine Wurzel von $\overset{a+1}{y}(z) = 0$.*

Rudski wendet sich nun speziell zur Untersuchung der Wurzeln von $J^{n+\frac{1}{2}}(x)$, wo n eine ganze Zahl bedeutet.

Nach *Poisson* lässt sich setzen:

$$y^{n+\frac{1}{2}}(x) = \frac{c}{x^{2n+1}} \left\{ X_n \sin x - X'_n \cos x \right\}.$$

Dabei bedeutet c eine Konstante, und X_n sowie X'_n sind ganze rationale Funktionen in x vom Grade n oder $n-1$, je nachdem n gerade oder ungerade ist.

Für $y^{n+\frac{1}{2}}(x) = 0$ folgt

$$\cot x = \frac{X_n}{X'_n}.$$

Die Nullstellen von $y^{n+\frac{1}{2}}(x)$ liegen somit in den Schnittpunkten der beiden Kurven

$$v = \frac{X_n}{X'_n}; \qquad w = \cot x.$$

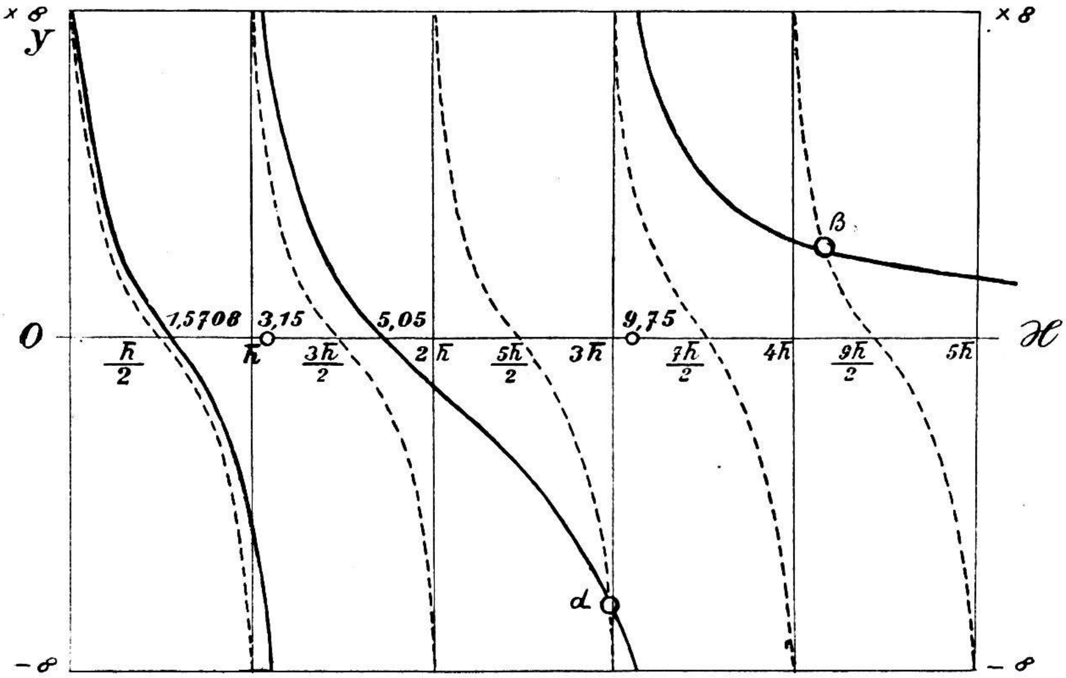
Es lässt sich nun zeigen, dass, sobald x grösser ist als die grösste Wurzel von $X_n = 0$ und $X'_n = 0$, der Quotient $\frac{X_n}{X'_n}$ stets einen endlichen Wert besitzt, der

positiv ist für *ungerade* n und
negativ » gerade n.

Die Schnittpunkte der beiden Kurven liegen somit nur in ungeraden oder nur in geraden Quadranten; es gilt also der Satz:

Nachdem x den Wert der grössten Wurzel der Polynome X_n und X'_n überschritten hat, liegen die Wurzeln der Gleichung $J^{n+\frac{1}{2}}(x) = 0$ nur in den geraden resp. ungeraden Quadranten, wenn n gerade resp. ungerade ist.

Soweit sind die Resultate von Rudski ganz richtig. Er sucht nun aber den obigen Satz auch auszudehnen auf die *ersten* Wurzeln von $J^{n+\frac{1}{2}}(x) = 0$ und führt zu diesem Zweck einen Schluss von n auf $n+1$ durch, macht aber mitten im Beweis eine Annahme, deren Richtigkeit weder vorausgesetzt noch bewiesen ist, die sich im Gegenteil als falsch erweist. Er setzt stillschweigend voraus, dass die beiden Kurven $v = \frac{X_n}{X'_n}$ und $w = \cot x$ sich innerhalb des Gebietes, in welchem die Nullstellen der beiden Polynome X_n und X'_n liegen, niemals schneiden. Dies ist ganz richtig für $n = 1, 2, 3$ und 4. Dagegen stimmt es bereits nicht mehr für $n = 5$. Gerade für diesen Fall hat Herr Rudski in seiner Arbeit ein Schema gegeben, dessen genaue Ausführung ihn von der Unrichtigkeit seiner Behauptung hätte überzeugen können. Die Nullstellen von X_5 liegen nämlich bei 1,5708 und 5,053 und diejenigen von X_5' bei 3,15 und 9,75.



Der Verlauf der beiden Kurven $v = \frac{X_5}{X_5'}$ und $w = \cot x$ ist in dem vorliegenden Schema veranschaulicht. Es bedeuten darin die punktierten Linien die Kurve der cotg., die ganz ausgezogenen diejenige von $\frac{X_5}{X_5'}$. Die cotg. verlaufen in jedem Halbkreis gleich. $\frac{X_5}{X_5'}$ bleibt bis zu $x = 1{,}5708$, was $> \frac{\pi}{2}$, positiv, dann wird der Zähler und damit der ganze Bruch negativ und behält das Vorzeichen bis $x = 3{,}15$, wo der Nenner zu 0 und der Bruch dadurch $= -\infty$ wird. Mit wachsendem x wird auch der Nenner negativ, der Wert des Bruches damit positiv bis X_5 bei 5,05 zum zweitenmale verschwindet und zu positiven Werten übergeht. Der Nenner bleibt noch negativ bis zu $x = 9{,}75$, was $> 3\pi$, und erst von diesem Werte an bleibt der Quotient $\frac{X_5}{X'_5}$ immer positiv. Es muss deshalb bereits im 6. Quadranten ein Schnitt erfolgen zwischen den beiden Kurven, also die erste Wurzel α von $\overset{5+\frac{1}{2}}{J}(x) = 0$ schon im 6. Quadranten liegen. Dafür befindet sich dann keine im 7. und 8. Quadranten, die zweite Wurzel β liegt im neunten. Für grössere n findet man, dass die erste Nullstelle relativ immer weiter hineinrückt, und dass in das Gebiet, innerhalb welchem die Wurzeln von $X_n = 0$ und $X'_n = 0$ liegen, mehr als eine Nullstelle von $\overset{n+\frac{1}{2}}{J}(x)$ fällt. Dies stimmt überein mit dem von *Schafheitlin* gefundenen Resultat, dass die erste Nullstelle von $\overset{a}{J}(x)$ sicher vor $\sqrt{2(a+1)(a+3)}$ liegt.

Wir können somit nur den ersten Teil der Arbeit *Rudskis* anerkennen, der zweite ist, der falschen Voraussetzung halber, unrichtig.

Wir wenden uns jetzt zu den Resultaten, die wir *Paul Schafheitlin* [1]) verdanken. Er stellt folgende Integralform auf:

$$\overset{n}{J}(x) = \frac{2^{n+1} x^n}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{n-\frac{1}{2}}\omega \cdot \sin\left(x - \frac{2n-1}{2}\omega\right) e^{-2x\cot g\,\omega}}{\sin^{2n+1}\omega}\, d\omega.$$

Bezeichnen wir das Integral mit $\overset{n}{Y}(x)$ und setzen darin

$$x = k\pi + \varepsilon,$$

wobei k eine ganze Zahl und $0 < \varepsilon \leqq \pi$, so bekommen wir die Gleichung:

$$(-1)^k \overset{n}{Y}(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{n-\frac{1}{2}}\omega \cdot \sin\left(\varepsilon - \frac{2n-1}{2}\omega\right) e^{-2x\cot g\,\omega}}{\sin^{2n+1}\omega}\, d\omega.$$

Mit wachsendem ω ändert nur der Faktor $\sin\left(\varepsilon - \frac{2n-1}{2}\omega\right)$

[1]) Crelle Journal. Bd. 122.

sein Zeichen. Die Grenzen, innerhalb denen das Vorzeichen konstant bleibt, können allgemein dargestellt werden durch

$$g_\nu = \frac{2\varepsilon + 2(\nu+1)\pi}{2n-1}; \qquad g_{\nu+1} = \frac{2\varepsilon + 2\nu\pi}{2n-1}.$$

Zerlegen wir nach diesem Prinzip das Integral $\overset{n}{Y}(x)$ in Teilintegrale, so haben diese abwechselndes Vorzeichen.

Lässt man ν von 1 aus alle ganzen Zahlen durchlaufen, so ist der absolute Wert jedes nachfolgenden Integrals *unter bestimmten Bedingungen* stets grösser, als derjenige des vorangehenden. Das Vorzeichen von $\overset{n}{Y}(x)$ hängt somit nur noch ab von der Zahl der Integrale, und diese wird bestimmt durch die Grössen n und ε.

Die Schwierigkeit dieser Methode liegt in der Bestimmung der oben erwähnten Bedingungen. Da diese ziemlich mühsam und von keinem allgemeinen Interesse ist, so wollen wir sie hier übergehen und nur die Resultate uns merken. Sie lassen sich in folgenden Satz zusammenfassen:

Ist $x > \dfrac{4n^2-1}{(2\mu-1)\pi - 4\varepsilon}$, *so haben sämtliche Funktionen* $\overset{n-4p}{J}(x)$, *wo p eine positive ganze Zahl bedeutet, dasselbe Vorzeichen wie* $\overset{n}{J}(x)$. μ bedeutet den Rest, den man erhält, wenn wir n durch 4 dividieren. Ist n ein Vielfaches von 4, so ist $\mu = 4$ zu setzen.

Macht man sich von ε unabhängig, indem man seinen Grenzwert einsetzt oder es auf ein kleines Intervall beschränkt, so erhält man speziell:

$$(-1)^k \overset{n}{Y} \text{ für } \mu = 0 \text{ und } x > \frac{4n^2-1}{3\pi} \text{ negativ für } \varepsilon \geqq \frac{3\pi}{4},$$

$$(-1)^k \overset{n}{Y} \text{ » } \mu = 2 \text{ » } x > \frac{4n^2-1}{\pi} \text{ » » } \varepsilon < \frac{\pi}{2},$$

$$(-1)^k \overset{n}{Y} \text{ » } \mu = 3 \text{ » } x > \frac{4n^2-1}{\pi} \text{ » » } \varepsilon \geqq \frac{\pi}{4}.$$

Aus der wohlbekannten Formel:

$$(n+1)\overset{n-1}{J} + 2n\left\{1 - \frac{2(n+1)(n-1)}{x^2}\right\}\overset{n}{J} + (n-1)\overset{n+2}{J}(x) = 0$$

und dem vorhin angeführten Satz über das Vorzeichen von $\overset{n}{J}$ und $\overset{n-4}{J}$ folgt:

$(-1)^k \overset{n}{Y}$ ist für $\mu = 0$ und $x > \dfrac{4(n+2)^2-1}{\pi}$ positiv für $\varepsilon < \dfrac{\pi}{2}$,

$(-1)^k \overset{n}{Y}$ » » $\mu = 2$ » $x > \dfrac{4(n+2)^2-1}{\pi}$ » » $\varepsilon \geqq \dfrac{3}{4}\pi$,

$(-1)^k \overset{n}{Y}$ » » $\mu = 1$ » $x > \dfrac{4(n+2)^2-1}{\pi}$ » » $\varepsilon \geqq \dfrac{\pi}{4}$.

Deshalb gilt der Satz:

Ist $x > \dfrac{4(n+2)^2-1}{\pi}$, *so liegen die Nullstellen von* $\overset{n}{J}(x)$ *in den Intervallen* $\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\pi$ *und* $\left(k+\dfrac{3}{4}\pi\right)$ *resp.* $k\pi$ *und* $\left(k+\dfrac{1}{4}\right)\pi$, *je nachdem n gerade oder ungerade ist.*

Ferner sieht man, dass zwei Funktionen, deren Parameter sich um zwei unterscheiden, nur in den Intervallen $\dfrac{\pi}{2}$ bis $\dfrac{3\pi}{4}$ resp. 0 bis $\dfrac{\pi}{4}$ gleiches Vorzeichen haben können. Daher folgt mit Hilfe der Relation

$$2\frac{d\overset{n}{J}}{dx} = \overset{n-1}{J} - \overset{n+1}{J}.$$

Ist $x > \dfrac{4(n+3)^2-1}{\pi}$, *so liegen die Maxima und Minima von* $\overset{n}{J}(x)$ *in den Intervallen* $k\pi$ *und* $\left(k+\dfrac{1}{4}\right)\pi$ *resp.* $\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\pi$ *und* $\left(k+\dfrac{3}{4}\right)\pi$, *je nachdem n gerade oder ungerade ist.*

n ist hier immer als ganzzahlig vorausgesetzt, doch lassen sich die hergeleiteten Sätze leicht auf Funktionen mit gebrochenem Index übertragen.

Schafheitlin beschäftigt sich im weitern auch mit der Funktion

$$\overset{a}{K}(x) = \frac{1}{\sin a\pi}\overset{a}{J}(x) - \operatorname{cotg} a \overset{-a}{J}(x).$$

Er stellt sie durch das Integral dar:

$$\overset{n}{K}(x) = \frac{2^{n+1}x^n}{\sqrt{\pi}\cdot\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{n-\frac{1}{2}}\omega\cdot\cos\left(x-\frac{2n-1}{2}\omega\right)}{\sin^{2n+1}\omega}e^{-2x\operatorname{cotg}\omega}d\omega.$$

Setzt man hier $x = \left(k - \frac{1}{2}\right)\pi + \varepsilon'$, wo

$$0 < \varepsilon' \leqq \pi,$$

so geht das Integral in $(-1)^k \overset{n}{Y}(x)$ über. Will man jedoch dieselbe Substitution anwenden wie früher, nämlich $x = k\pi + \varepsilon$, so braucht man in den oben für $\overset{n}{Y}$ entwickelten Sätzen nur $\frac{\pi}{2}$ von ε abzuziehen. Man erhält dann z. B.:

Ist $x > \frac{4(n+2)^2 - 1}{\pi}$, *so liegen die Nullstellen von* $\overset{n}{K}(x)$ *in den Intervallen* $k\pi$ *und* $\left(k + \frac{1}{4}\right)\pi$ *resp.* $\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi$ *und* $\left(k + \frac{3}{4}\right)\pi$, *je nachdem* n *gerade oder ungerade ist.*

Diejenigen Fälle, wo $n < 4\frac{1}{2}$ erfordern eine spezielle Untersuchung, welche gestattet, die Nullstellen in etwas engere Grenzen einzuschliessen. Schafheitlin findet dadurch:

Sämtliche Nullstellen von $\overset{0}{J}(x)$ *liegen zwischen* $\left(k + \frac{3}{4}\right)\pi$ *und* $\left(k + \frac{7}{8}\right)\pi$ *und die von* $\overset{0}{K}(x)$ *zwischen* $\left(k + \frac{1}{4}\right)\pi$ *und* $\left(k + \frac{3}{8}\right)\pi$, *wo* k *alle positiven ganzen Zahlen mit Einschluss der Null zu durchlaufen hat.*

Erhöht man die hier angegebenen Grenzen um $\frac{3\pi}{8}$, *so bekommt man die Intervalle, in welchen die Nullstellen von* $\overset{1}{J}(x)$ *und* $\overset{1}{K}(x)$ *liegen. Die erste Nullstelle von* $\overset{1}{K}(x)$ *liegt zwischen* $\frac{\pi}{2}$ *und* $\frac{3\pi}{4}$.

Die Resultate für die Parameter 2, 3 und 4 stimmen mit den allgemeinen Sätzen überein, nur wird die Grenze für x *auf folgende Werte herabgesetzt:*

Für $\overset{2}{J}(x)$ und $\overset{2}{K}(x)$: $x > 5{,}2$,

» $\overset{3}{J}(x)$ » $\overset{3}{K}(x)$: $x > 10{,}75$,

» $\overset{4}{J}(x)$ » $\overset{4}{K}(x)$: $x > 14{,}5\,\pi$.

Diese hier angegebenen Grenzen sind immer noch ziemlich weit; wir werden sehen, dass sie sich auf andere Weise bedeutend enger ziehen lassen.

Zum Schlusse wollen wir noch einige Betrachtungen von *Schafheitlin* über die Funktion $\overset{n}{K}(x)$ und ihre Nullstellen anführen. Es lässt sich $\overset{n}{K}(x)$ darstellen durch[1]):

$$\frac{\pi}{2}\overset{n}{K}(x) = \left\{\psi(n) - \log\frac{x}{2}\right\}\overset{n}{J}(x) + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n}\frac{\Gamma(n)}{p\,\Gamma(n-p)}\left(\frac{2}{x}\right)^{p}\overset{n-p}{J}(x)$$
$$+\sum_{p=1}^{\infty}(-1)^{p}\frac{n+2p}{p(n+p)}\overset{n+2p}{J}(x), \qquad (1)$$

wobei ψ die bekannte Gausssche Transzendente bedeutet. Wegen dem auftretenden Logarithmus ist $\overset{n}{K}(x)$ keine eindeutige Funktion mehr, sondern besitzt unendlich viele Werte, wie der Logarithmus. Schafheitlin bezeichnet denjenigen als Hauptwert, wofür das Argument von x zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ liegt, entsprechend der Bezeichnung beim Logarithmus. Die andern Werte unterscheiden sich dann vom Hauptwert durch die additive Grösse $-2mi\overset{n}{J}(\varrho,\varphi)$, wenn $x=\varrho e^{i\varphi}$, wie aus der Summenformel ohne weiteres ersichtlich ist.

Es lässt sich zeigen, *dass diese Hauptwerte für keine komplexen Grössen zu Null werden, sobald $n=0$, oder $n=1$ ist.*

Der Beweis stützt sich auf die bekannte Formel von Lommel[2])

$$\int_a^b x\overset{n}{y}(rx)\overset{n}{y}(sx)\,dx = \frac{x}{r^2-s^2}\left\{r\overset{n}{y}(sx)\overset{n+1}{y}(rx) - s\overset{n}{y}(rx)\overset{n+1}{y}(sx)\right\},$$

wobei y ein partikuläres Integral der Besselschen Differentialgleichung, und r und s zwei verschiedene Parameter bedeuten. Wir treten jedoch nicht näher darauf ein, sondern verweisen auf die Arbeit von Schafheitlin.[3])

Wir stehen damit am Schlusse unseres ersten Abschnittes. Wir haben in demselben alle uns bekannt gewordenen Publikationen über die Zahl und Lage der Nullstellen der Besselschen

1) Programm des Sophien-Realgymnasiums, Berlin 1895.
2) Zur Theorie der Besselschen Funktion V, Math. Annalen 14.
3) Archiv der Mathematik und Physik. III. Reihe I.

Funktionen einer kurzen Besprechung unterworfen und vor allem immer die bis dahin bekannten Resultate hervorgehoben. Im folgenden wollen wir zeigen, wie man durch die konsequente Anwendung einer von Sturm gegebenen Methode auf die Bessel-sche Differentialgleichung in leichter und eleganter Weise die gleichen Resultate ebenfalls erhält, ja dass es damit gelingt, die Nullstellen der Funktionen $\overset{a}{J}(x)$ und $\overset{a}{K}(x)$ in noch engere Grenzen einzuschliessen.

II. Die Methode von Sturm.[1])

Es sei die Differentialgleichung gegeben:

$$M \frac{d^2 V}{dx^2} + L \frac{dV}{dx} + NV = 0.$$

M, L und N sind Funktionen von x und allfälligen Parametern.

Sie lässt sich in die Form bringen

$$\frac{d\left(K \frac{dV}{dx}\right)}{dx} + GV = 0 \qquad (1)$$

oder

$$K \frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{dK}{dx} \frac{dV}{dx} + GV = 0. \qquad (1a)$$

Es wird

$$K = e^{\int \frac{M}{L} dx}; \qquad G = \frac{N}{L} K.$$

Aus (1a) sieht man, dass V und $\frac{dV}{dx}$ nicht gleichzeitig verschwinden dürfen in einem Punkt, in dem K nicht zu Null wird. Denn alsdann müsste auch $\frac{d^2 V}{dx^2} = 0$ sein, und ebenso alle folgenden Ableitungen der Funktion V, wie man durch fortgesetztes Differenzieren sieht. V müsste eine Konstante sein, was der Voraussetzung widerspricht. Daraus schliessen wir:

Die Funktion V hat keine reellen Doppelwurzeln; sie geht jedesmal, wenn sie den Wert 0 passiert, von positiven zu negativen Werten über, wenn $\frac{dV}{dx}$ negativ ist, und umgekehrt im andern Fall.

---

[1]) Liouville Journal. Vol. 1831.

Wir setzen voraus, es seien K und G nicht Funktionen von x allein, sondern ausserdem abhängig von einem willkürlich variablen Parameter m. Dann ist auch V von m abhängig. Wir haben also:

$$K = K(x, m); \quad G = G(x, m), \quad V = V(x, m).$$

Wir differentieren die Differentialgleichung nach m und kombinieren die beiden Gleichungen auf folgende Weise:

$$\begin{array}{l|l} \dfrac{\partial\left(K\dfrac{\partial V}{\partial x}\right)}{dx} + GV = 0 & \dfrac{\partial V}{\partial m}dx \\ \dfrac{\partial^2\left(K\dfrac{\partial V}{dx}\right)}{dx\cdot dm} + G\dfrac{\partial V}{\partial m} + V\dfrac{\partial G}{\partial m} = 0 & -V dx \end{array}$$

$$\frac{\partial V}{\partial m}\cdot\frac{\partial\left(K\dfrac{\partial V}{\partial x}\right)}{\partial x}dx + G\cdot V\frac{\partial V}{\partial m}dx - V\frac{\partial^2\left(K\dfrac{\partial V}{\partial x}\right)}{\partial x\cdot dm}dx$$

$$- GV\frac{\partial V}{\partial m}dx - V^2\frac{\partial G}{\partial m}dx = 0.$$

$$\frac{\partial V}{\partial m}\cdot\frac{\partial\left(K\dfrac{\partial V}{\partial x}\right)}{\partial x} - V\frac{\partial^2\left(K\dfrac{\partial V}{\partial x}\right)}{\partial x\cdot\partial m} = V^2\frac{\partial G}{\partial m}.$$

Wir integrieren zwischen den Grenzen x_1 und x und erhalten

$$K\frac{\partial V}{\partial m}\cdot\frac{\partial V}{\partial x} - V\frac{\partial\left(K\dfrac{\partial V}{\partial x}\right)}{\partial m}$$

$$= C + \int_{x_1}^{x}\left\{V^2\frac{\partial G}{\partial m} - \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\frac{\partial K}{\partial m}\right\}dx. \qquad (2)$$

C ist der Wert der linken Seite für

$$x = x_1.$$

Unter der Voraussetzung, dass sowohl x als m reelle Variable bedeuten, lassen sich aus der vorstehenden Gleichung (2) verschiedene Schlüsse ziehen auf die reellen Nullstellen der Funktion V. Wir werfen vorerst die Frage auf, unter welchen Bedingungen die linke Seite negativ werde?

Dies ist sicher der Fall, wenn gleichzeitig:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ \text{C negativ und} \\ 2.\ \dfrac{\partial G}{\partial m}\ \text{negativ und} \\ 3.\ \dfrac{\partial K}{\partial m}\ \text{positiv ist.} \end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{im ganzen} \\ \text{zu betrachtenden Intervall.}\end{array}$$

(Es dürfen natürlich auch eine oder zwei dieser Grössen zu Null werden.)

$$\text{Da}\quad K\frac{\partial V}{\partial m}\cdot\frac{\partial V}{\partial x} - V\,\frac{\partial\left(K\dfrac{\partial V}{\partial m}\right)}{\partial m} = -V^2\frac{\partial}{\partial m}\left(\frac{K\dfrac{\partial V}{\partial x}}{V}\right),$$

so ist die Bedingung (1) gleichbedeutend mit der Forderung:

$$\left(\frac{K\dfrac{\partial V}{\partial x}}{V}\right)_{x=x_1}\ \text{soll mit wachsendem m zunehmen.}$$

Sind die drei Bedingungen erfüllt, so bleibt der Ausdruck $-V^2\dfrac{\partial}{\partial m}\left(\dfrac{K\dfrac{\partial V}{\partial x}}{V}\right)$ im ganzen Intervall negativ. Wir können somit folgenden Satz aufstellen:

Nimmt innerhalb der Grenzen x_1 und x die Funktion K mit wachsendem m zu und zugleich G ab, so nimmt der Wert von $\dfrac{K\dfrac{\partial V}{\partial x}}{V}$ mit wachsendem m ebenfalls zu im ganzen Intervall, sobald es an der untern Grenze zunimmt.

Wir denken uns für ein bestimmtes x und m die Gleichung erfüllt:

$$V(x_1\, m) = 0.$$

Lassen wir die Variablen um dx resp. dm zunehmen, so erhalten wir den Zuwachs:

$$\frac{\partial V}{\partial x}\,dx + \frac{\partial V}{\partial m}\,dm.$$

Soll für die neuen Werte der Variablen der Wert der Funktion ebenfalls Null sein, so muss der Zuwachs verschwinden. Dies ist der Fall, wenn

$$\frac{dm}{dx} = - \frac{\frac{\partial V}{\partial x}}{\frac{\partial V}{\partial m}}.$$

Aus der Gleichung (2) folgt aber, dass, wenn $V = 0$ $\frac{\partial V}{\partial x}$ und $\frac{\partial V}{\partial m}$ entgegengesetztes Vorzeichen besitzen müssen, so bald die drei aufgestellten Bedingungen erfüllt sind. Folglich ist $\frac{dm}{dx}$ positiv, also besitzen dm und dx gleiches Zeichen.

Mit kontinuierlich wachsendem Parameter m wachsen auch die Nullstellen der Funktion $V(x, m)$.

Es sei auf der reellen Axe ein Intervall x_1 bis x_2 gegeben, innerhalb welchem die obigen Voraussetzungen gelten, und die Funktion V p verschiedene Nullstellen besitzt. An der untern Grenze bleibe V stets positiv, wenn wir den Parameter m von m_1 bis m_2 wachsen lassen.

Die p-Nullstellen werden sich mit wachsendem m in positiver Richtung verschieben, und es muss ein bestimmtes m geben, für welches die grösste derselben α_p mit x_2 zusammenfällt.

Lassen wir m weiter wachsen, so rückt α_p ausser das Intervall, das wir betrachten, und deshalb wird die Zahl der Nullstellen von

$$V(x, m),$$

die zwischen x_1 und x_2 zu liegen kommen, um eine vermindert. Dieser Verlust wiederholt sich jedesmal, wenn mit wachsendem m eine der Nullstellen von

$$V(x, m)$$

mit x_2 zusammenfällt. Deshalb ist *die Differenz zwischen der Zahl der Nullstellen von*

$$V(x, m_1) \text{ und } V(x, m_2)$$

m Intervall x_1 bis x_2 gleich der Zahl der Nullstellen von

$$V(x_2, m),$$

wenn m von m_1 bis m_2 wächst.

Wir wollen diese Resultate auf die Besselschen Funktionen anwenden. Ihre Differentialgleichung lautet:

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - a^2)\, y = 0.$$

Setzen wir
$$K = x$$
$$G = \frac{x^2 - a^2}{x},$$
so erhalten wir die Form (1).

$$\frac{d\left(x\frac{dy}{dx}\right)}{dx} + \frac{x^2 - a^2}{x}\,y = 0. \tag{3}$$

Als Grenzen x_1 und x_2 wählen wir 0 und ∞, welche alle positiven Wurzeln einschliessen. Innerhalb dieser Grenzen genügt die Differentialgleichung (3) allen drei früher aufgestellten Bedingungen. Denn:

1. Nach der Gleichung

$$\frac{d\overset{a}{J}(x)}{dx} = \frac{a}{x}\overset{a}{J}(x) - \overset{a+1}{J}(x),$$ wird

$$\frac{K\frac{dV}{dx}}{V} = \frac{x\frac{d\overset{a}{J}(x)}{dx}}{\overset{a}{J}(x)} = a - x\frac{\overset{a+1}{J}(x)}{\overset{a}{J}(x)},$$

was an der untern Grenze $x = 0$ in den Wert a übergeht.

Betrachten wir a als den variablen Parameter m, so ist sicher die erste Bedingung erfüllt.

2. $\frac{\partial K}{\partial m} = \frac{\partial x}{\partial a} = 0.$

3. $\frac{\partial G}{\partial m} = \frac{\partial\left(\frac{x^2-a^2}{x}\right)}{\partial a}$ = negativ für positive a.

Wir können somit die für die Funktionen V aufgestellten Sätze ohne weiteres auf die Besselschen Funktionen anwenden und erhalten:

1. Der Wert des Quotienten $\dfrac{x\frac{d\overset{a}{J}(x)}{dx}}{\overset{a}{J}(x)}$ *nimmt für jedes positive x mit wachsendem Parameter a zu.*

2. Die reellen, positiven Wurzeln der Gleichung $\overset{a}{J}(x) = 0$ *nehmen mit wachsendem Parameter a kontinuierlich zu.*

3. Es sei N eine sehr grosse positive Zahl. Dann ist die Differenz zwischen der Zahl der Nullstellen von

$$\overset{a}{J}(x) \text{ und } \overset{a+2m}{J}(x),$$

die in dem Intervall 0 bis N liegen, genau gleich der Zahl der Nullstellen von $\overset{p}{J}(N)$, *wenn p von a bis* $a+2m$ *wächst.*

Nach *Poisson* gilt für grosse x

$$\overset{p}{J}(N) = \sqrt{\frac{2}{\pi N}} \cos\left[N - \left(p + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right].$$

Wenn p von a bis $a+2m$ geht, so passiert dieser Ausdruck den Wert Null m-mal. Deshalb können wir sagen:

Die Funktion $\overset{a+2m}{J}(x)$ *hat in dem Intervall 0 bis N, wo N eine sehr grosse positive Zahl bedeutet, genau m-Nullstellen weniger als die Funktion* $\overset{a}{J}(x)$ oder mit andern Worten:

Es gibt auf der positiven X-Axe m-Intervalle, die von je zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen der Funktion $\overset{a}{J}(x)$ *gebildet werden, innerhalb welchen keine Nullstelle der Funktion* $\overset{a+2m}{J}(x)$ *liegt; in allen übrigen Intervallen liegt jedoch je eine Nullstelle dieser Funktion.*

Nun ist $\overset{1/2}{J}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \sin x.$

Die Nullstellen von $\overset{1/2}{J}(x)$ fallen mit den Vielfachen von π zusammen.

Wir können also obigen Satz etwas bestimmter fassen und sagen:

Teilt man die positive Axe in ∞ *viele Abschnitte von der Grösse* π, *so gibt es unter diesen im ganzen m-Intervalle, in denen keine Nullstelle von* $\overset{a+\frac{1}{2}}{J}(x)$ *gelegen ist, wenn a zwischen* $2m$ *und* $2m+2$ *liegt. In allen übrigen Intervallen befindet sich je eine Nullstelle von* $\overset{a+\frac{1}{2}}{J}(x)$.

Als Spezialfall erhalten wir den von Bocher auf elementarem Wege bewiesenen Satz: Ist $0 < \mu < 2$, *so liegt zwischen zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen von* $\overset{a}{J}(x)$ *je eine und nur eine Nullstelle von* $\overset{a+\mu}{J}(x)$.

Aus der Summenformel von $\overset{a}{J}(x)$ ersieht man, dass *die negativen Nullstellen der Funktion dem absoluten Werte nach mit den positiven zusammenfallen,* somit lassen sich alle obigen Sätze auch auf die negativen Nullstellen anwenden.

Wir gehen nun über zur Untersuchung *der Besselschen Funktion mit negativem Parameter.*

$\overset{-a}{J}(x)$ ist ebenfalls eine Lösung der Besselschen Differentialgleichung und wenn wir auf diese Funktion die Sturmsche Methode anwenden wollen, so haben wir nur $+a$ durch $-a$ zu ersetzen.

Es wird dann

$$1.\quad \frac{K\dfrac{dV}{dx}}{V} = \frac{x\dfrac{d\overset{-a}{J}(x)}{dx}}{\overset{-a}{J}(x)} = -a - x\,\frac{\overset{-a+1}{J}(x)}{\overset{-a}{J}(x)},$$

was an der untern Grenze $x = 0$ in den Wert $-a$ übergeht, also mit wachsendem a abnimmt. Somit wird $\dfrac{\partial}{\partial m}\left(\dfrac{K\dfrac{dV}{dx}}{V}\right)_{x=x_1}$ negativ und der Wert der Konstanten C in der Gleichung (2) positiv.

$$2.\quad \frac{\partial K}{\partial m} = \frac{\partial x}{\partial a} = 0.$$

$$3.\quad \frac{\partial G}{\partial m} = \frac{\partial\left(\dfrac{x^2-a^2}{x}\right)}{\partial a} = \text{positiv}.$$

Wir erhalten also in diesem Falle für die linke Seite der Gleichung (2) einen positiven Wert, und es wird

$$\frac{da}{dx} \text{ für } \overset{-a}{J}(x) = 0 \textit{ negativ},$$

d. h. wenn der absolute Wert von a in der Funktion $\overset{-a}{J}(x)$ zunimmt. so wird der Wert ihrer Nullstellen kleiner. Oder mit andern Worten:

Bewegt sich der Parameter von $\overset{a}{J}(x)$ von einem beliebigen Punkte der negativen reellen Axe aus nach links, so bewegen sich auch die positiven Nullstellen der Funktion nach links. Erfolgt die Bewegung des Parameters nach rechts, so ist dies auch für die Nullstellen der Fall. Dieses ist aber genau das gleiche Gesetz, das wir bereits für die Besselschen Funktionen mit positivem Parameter gefunden haben. Wir dürfen somit die frühern Sätze erweitern zu folgendem allgemeinem Gesetz:

Die positiven Nullstellen der Funktion $\overset{a}{J}(x)$ *bewegen sich immer im gleichen Sinn wie der Parameter* a, *so lange er auf der reellen Axe bleibt.*

Für die negativen Nullstellen erfolgt die Bewegung natürlich in entgegengesetztem Sinn.

Aus diesem Gesetz lassen sich einige weitere Schlüsse ziehen.

1. Ueber die Lage der Nullstellen von $\overset{0}{J}(x)$ *und* $\overset{1}{J}(x)$.

$$\overset{1/2}{J}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\ \sin x.$$

$$\overset{-\frac{1}{2}}{J}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\ \cos x.$$

Die n^{te} Nullstelle von $\overset{1/2}{J}(x)$ liegt bei $n\pi$ und diejenige von $\overset{-\frac{1}{2}}{J}(x)$ bei $(2n-1)\frac{\pi}{2}$. *Folglich liegt die* n^{te} *positive Nullstelle von*

$$\overset{a}{J}(x), \text{ wobei } -\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2},$$

zwischen $\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi$ *und* $n\pi$.

Aus dem asymptotischen Wert

$$\overset{a}{J}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \left(a + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right)$$

lassen sich die Grenzen noch enger ziehen. Z. B. wird $\overset{0}{J}(x)$ für grosse x zu

$$\overset{0}{J}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right),$$

welcher Wert verschwindet für

$$x = (4n-1)\frac{\pi}{4},$$

wenn n eine ganze Zahl bedeutet. Die n^te^ positive Wurzel nähert sich also dem Wert $(4n-1)\frac{\pi}{4}$.

Da, wie wir später sehen werden, das Intervall zwischen zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen von $\overset{0}{J}(x)$ kleiner als π ist, so muss die Annäherung an den Grenzwert $(4n-1)\frac{\pi}{4}$ von oben erfolgen. Daher ist die n^{te} Nullstelle grösser als $(4n-1)\frac{\pi}{4}$, so lange n endlich bleibt. Es folgt somit:

Die n^{te} Nullstelle von $\overset{0}{J}(x)$ liegt zwischen $(4n-1)\frac{\pi}{4}$ und $n\pi$.

Kennt man die erste derselben, so kann man die Grenzen noch enger ziehen, so dass sie enger werden als die von Schafheitlin gegebenen.

Wendet man die gleiche Betrachtungsweise auf $\overset{1}{J}(x)$ an und berücksichtigt, dass das Intervall zwischen zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen grösser als π ist, so erhält man den Satz:

Die n^{te} Nullstelle von $\overset{1}{J}(x)$ liegt zwischen $n\pi$ und $(4n+1)\frac{\pi}{4}$.

Liegt die erste Nullstelle bei $\pi+\varepsilon$, so werden die Grenzen $n\pi+\varepsilon$ und $n\pi+\frac{\pi}{4}$.

2. Ueber die Lage und Realität der Nullstellen von $\overset{-a}{J}(x)$.

Wenn m eine ganze Zahl ist, so gilt

$$\overset{-m}{J}(x) = (-1)^m \overset{m}{J}(x).$$

Die Nullstellen von $\overset{-m}{J}(x)$ fallen also mit denjenigen von $\overset{m}{J}(x)$ zusammen. Rückt nun der Parameter a in $\overset{a}{J}(x)$ von $-m$ aus nach $-(m+1)$, so muss nach einem frühern Satz die n^{te} Nullstelle von $\overset{a}{J}(x)$ ebenfalls nach links rücken und zwar so weit, bis sie mit der $(n-1)^{ten}$ Nullstelle von $\overset{m+1}{J}(x)$ zusammenfällt. Wir erhalten somit den Satz:

Ist $m < a < m+1$, so liegt die n^{te} Nullstelle der Funktion $\overset{-a}{J}(x)$ zwischen der $(n-1)^{ten}$ Nullstelle von $\overset{m+1}{J}(x)$ und der n^{ten} von $\overset{m}{J}(x)$.

Aus dem allgemeinen Gesetz über die Verschiebung der Nullstellen bei variablem Parameter lässt sich auch *die Existenz und Zahl der komplexen Wurzeln von* $\overset{a}{J}(x)$ *nachweisen.*

Durchläuft der Parameter a von Null aus die negative reelle Axe, so verschieben sich die positiven Nullstellen der Funktion $\overset{a}{J}(x)$ nach links, die negativen nach rechts und da sie paarweise absolut gleich sind, so treffen sich je zwei im Nullpunkte, von wo aus sie ihre Wanderung auf der reellen Axe nicht mehr fortsetzen können und somit auf das komplexe Zahlenfeld übertreten müssen. Dieser Prozess findet jedesmal statt, wenn a eine negative ganze Zahl passiert, das erstemal bei -1. Da sich zwei konjugiert komplexe Nullstellen nie wieder in zwei reelle entgegengesetzte vereinigen können, so lange a seinen Weg auf der negativen reellen Axe fortsetzt, so bekommen wir folgenden Satz:

Ist $m < a < m + 1$ (wobei m eine positive ganze Zahl), *so hat die Funktion* $\overset{-a}{J}(x)$ *m-Paare komplexer Nullstellen.*

Dieses Resultat stimmt mit den von *Hurwitz* gefundenen Sätzen genau überein.

Die Tabelle, die sich am Schluss unserer Arbeit findet, gibt uns ein anschauliches Bild über den Verlauf der reellen Nullstellen von $\overset{a}{J}(x)$ bei Variation des Parameters.

Wir verweisen auf das Schlusswort.

Ueber die Nullstellen von $\overset{a}{K}(x)$.

Ein grosser Vorteil der Sturmschen Methode besteht darin, dass wir alle Sätze über die Nullstellen der Funktion $\overset{a}{J}(x)$ entweder wörtlich oder mit geringen Modifikationen auf das zweite partikuläre Integral der Besselschen Differentialgleichung $\overset{a}{K}(x)$ übertragen können.

$\overset{a}{K}(x)$ und $\overset{a}{J}(x)$ sind verwandte Funktionen und genügen deshalb teilweise den gleichen Relationen. So gilt z. B.:

$$\frac{d\overset{a}{J}(x)}{dx} = \frac{a}{x}\overset{a}{J}(x) - \overset{a+1}{J}(x) \qquad \text{und analog}$$

$$\frac{d\overset{a}{K}(x)}{dx} = \frac{a}{x}\overset{a}{K}(x) - \overset{a+1}{K}(x)$$ und es wird

$$\frac{x\dfrac{d\overset{a}{K}(x)}{dx}}{\overset{a}{K}(x)} = a - \frac{x\overset{a+1}{K}(x)}{\overset{a}{K}(x)},$$

was für $x = 0$ in den Wert 0 übergeht. Somit gilt das Gesetz über die Verschiebung der Nullstellen bei Variation des Parameters a auch für $\overset{a}{K}(x)$, d. h.: *Die positiven Nullstellen der Funktion $\overset{a}{K}(x)$ bewegen sich immer im gleichen Sinn wie der Parameter a.* Wie $\overset{a}{J}(x)$ besitzt auch $\overset{a}{K}(x)$ für ein grosses Argument einen asymptotischen Wert, der durch einen einfachen Ausdruck dargestellt wird. Es gilt:

$$\overset{a}{K}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left[x - \left(a + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right].$$

Somit erhalten wir den Satz:

Auf der positiven X-Axe gibt es m-Intervalle, die von je zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen der Funktion $\overset{a}{K}(x)$ gebildet werden, innerhalb welchen keine Nullstelle der Funktion $\overset{a+2m}{K}(x)$ liegt. In allen übrigen Intervallen befindet sich jedoch eine Nullstelle von $\overset{a+2m}{K}(x)$.

Ferner ist $\overset{-\frac{1}{2}}{K}(x) = \overset{1/2}{J}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$ und daraus folgt:

Teilt man die positive Axe in gleiche Abschnitte von der Grösse π, so gibt es unter diesen im ganzen m-Intervalle, in denen keine Nullstelle von $\overset{a-\frac{1}{2}}{K}(x)$ gelegen ist, wenn

$$2m < a < 2m + 2.$$

In allen übrigen Intervallen befindet sich je eine Nullstelle von $\overset{a-\frac{1}{2}}{K}(x)$.

Diese Gesetze lassen sich auch mit Leichtigkeit aus der Lommelschen Formel

$$\overset{a}{J}(x)\overset{a+1}{K}(x) - \overset{a}{K}(x)\overset{a+1}{J}(x) = -\frac{2}{\pi x}$$ ableiten.

Für $\overset{a}{J}(x) = 0$ müssen $\overset{a}{K}(x)$ und $\overset{a+1}{J}(x)$ immer gleiches Vorzeichen haben. Da $\overset{a+1}{J}(x)$ zwischen zwei aufeinanderfolgenden

Nullstellen von $\overset{a}{J}(x)$ das Zeichen einmal wechselt, so muss auch $\overset{a}{K}(x)$ in diesem Intervall wenigstens *einmal* den Wert Null annehmen. Da aber, wie wir später sehen werden, der Abstand zweier aufeinanderfolgenden Nullstellen der Funktion $\overset{a}{K}(x)$ etwas grösser ist als der entsprechende Abstand bei der Funktion $\overset{a}{J}(x)$, so kann dies *nur einmal* geschehen. Deshalb der Satz:

Zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen der Funktion $\overset{a}{J}(x)$ liegt stets eine und nur eine Nullstelle von $\overset{a}{K}(x)$.

Aus der Definitionsgleichung

$$\overset{a}{K}(x) = \frac{1}{\sin a\pi}\left(\cos a\pi\, \overset{a}{J}(x) - \overset{-a}{J}(x)\right) \qquad \text{folgt, dass}$$

$$\overset{a}{K}(x) = 0, \qquad \text{sobald}$$

$$\operatorname{cotg} a\pi\, \overset{a}{J}(x) = \frac{\overset{-a}{J}(x)}{\sin a\pi}.$$

Nun hat aber $\overset{-a}{J}(x)$ für $x = 0$ das Vorzeichen von $\sin a\pi$ und $\overset{a}{J}(x)$ ist für kleine x stets positiv. Wir müssen 3 Fälle unterscheiden:

1. $a = \frac{2n+1}{2}$; $\operatorname{cotg} a = 0$.

Die Nullstellen von $\overset{\frac{2n+1}{2}}{K}(x)$ fallen zusammen mit denjenigen von $\overset{-\frac{2n+1}{2}}{J}(x)$.

2. $\operatorname{cotg} a\pi =$ positiv.

Die n^{te} Nullstelle von $\overset{a}{K}(x)$ liegt vor der n^{ten} Nullstelle von $\overset{a}{J}(x)$ sowohl als derjenigen von $\overset{-a}{J}(x)$.

3. $\operatorname{cotg} a\pi =$ negativ.

Die n^{te} Nullstelle von $\overset{a}{K}(x)$ liegt zwischen den entsprechenden Nullstellen von $\overset{-a}{J}(x)$ und $\overset{a}{J}(x)$.

Aus den beiden asymptotischen Werten

$$\overset{a}{J}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left\{x - \left(a + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right\}$$

$$\overset{a}{K}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left\{x - \left(a + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right\}$$

folgt ferner, dass sich die höhern entsprechenden Wurzeln von $\overset{a}{J}(x)$ und $\overset{a}{K}(x)$ um $\frac{\pi}{2}$ unterscheiden. Bei den kleinern ist die Differenz grösser. Wir erhalten somit folgenden Satz:

Die Funktion $\overset{a}{K}(x)$ hat auf der reellen positiven x-Axe genau so viele Nullstellen wie die Funktion $\overset{a}{J}(x)$. Die n^{te} derselben ist um einen bestimmten Betrag Δ kleiner als die n^{te} Nullstelle von $\overset{a}{J}(x)$, wobei Δ sich mit wachsendem n dem Werte $\frac{\pi}{2}$ nähert.

Aus der bekannten Beziehung:

$$\overset{-m}{K}(x) = (-1)^m \overset{m}{K}(x)$$

folgt analog wie bei der $\overset{a}{J}(x)$-Funktion der Satz:

Ist $m < a < m+1$ (wobei m eine positive ganze Zahl), *so liegt die n^{te} Nullstelle der Funktion $\overset{-a}{K}(x)$ zwischen der $(n-1)^{sten}$ Nullstelle von $\overset{m+1}{K}(x)$ und der n^{ten} von $\overset{m}{K}(x)$.*

Während in Bezug auf die positiven Nullstellen der Funktionen $\overset{a}{J}(x)$ und $\overset{a}{K}(x)$ die weitgehendste Analogie besteht, hört dieselbe bei den *negativen Nullstellen* auf.

Das verschiedene Verhalten der beiden Funktionen in dieser Beziehung lässt sich sehr einfach zeigen, indem wir das Argument x den Nullpunkt umkreisen lassen. *Graf*[1]) hat gezeigt, dass folgende Beziehungen gelten:

$$\overset{a}{J}(e^{im\pi} \cdot x) = e^{im\pi a} \overset{a}{J}(x).$$

$$\overset{a}{K}(e^{im\pi} x) = \frac{2i\cos a\pi \cdot \sin m\pi a}{\sin a\pi} \overset{a}{J}(x) + e^{-im\pi a} \overset{a}{K}(x),$$

wobei m eine ganze Zahl.

Durch das Umkreisen des Nullpunktes erhält also $\overset{a}{J}(x)$ keinen additiven Zuwachs, während $\overset{a}{K}(x)$ einen imaginären Periodizitätsmodul besitzt.

$\overset{a}{J}(e^{im\pi} x)$ verschwindet somit jedesmal, wenn $\overset{a}{J}(x)$ zu Null wird, während aus der zweiten Gleichung folgt, dass die Null-

---

[1]) Einleitung in die Theorie der Besselschen Funktion I. Art. Bern 1898.

stellen von $\overset{a}{K}(e^{im\pi}x)$ im allgemeinen nicht mit denjenigen von $\overset{a}{K}(x)$ zusammenfallen. Dies kann für reelle x nur dann stattfinden, wenn gleichzeitig

$$\overset{a}{K}(x) \text{ und } \frac{\cos a\pi \cdot \sin m\pi a}{\sin a\pi} \overset{a}{J}(x)$$

verschwinden, was nur möglich, wenn

$$a = \frac{2n+1}{2}.$$

Da aber die Beziehung gilt

$$\overset{\frac{2n+1}{2}}{K}(x) = (-1)^{n-1} \overset{-\frac{2n+1}{2}}{J}(x),$$

so folgt, dass $\overset{\frac{2n+1}{2}}{K}(e^{im\pi}x)$ für jedes m unendlich viele reelle und dazu n-Paare konjugiert komplexe Wurzeln besitzt, welche mit denjenigen von $\overset{-\frac{2n+1}{2}}{J}(x)$ zusammenfallen.

$\overset{\frac{2n+1}{2}}{K}(x)$ besitzt somit auch negative reelle Nullstellen.

Ist aber a von $\frac{2n+1}{2}$ verschieden, so kann $\overset{a}{K}(x)$ ausser in den früher bestimmten Stellen der positiven X-Axe für keinen reellen Wert des Argumentes zu Null werden.

Da die negativen Nullstellen von $\overset{\frac{2n+1}{2}}{K}(x)$ nach früherem keine mehrfachen Nullstellen sein können, so sind sie nicht entstanden durch das Zusammenfallen von konjugiert komplexen Wurzelpaaren. Sie sind also nicht durch imaginäre Äste untereinander verbunden, sondern treten als isolierte Punkte auf.

Wir lassen die Frage nach der Zahl und Lage der *komplexen* Nullstellen von $\overset{a}{K}(x)$ unbeantwortet und begnügen uns mit einer möglichst genauen Bestimmung der reellen Wurzeln. Zu dem Zweck müssen wir uns nochmals dem Sturmschen Theorem zuwenden und dasselbe in seine allgemeine Fassung bringen.

Setzen wir in der Differentialgleichung

$$\frac{d\left(K\frac{dV}{dx}\right)}{dx} + GV = 0$$

$$V = \frac{y}{\sqrt{K}},$$

so geht sie über in

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + H y = 0,$$

wobei H von K und G abhängt.

Betrachten wir wieder y und H als Funktionen eines Parameters m, so können wir wie früher nachweisen, dass die Wurzeln der Gleichung $y = 0$ mit wachsendem m abnehmen, sobald gleichzeitig

$$\frac{\partial H}{\partial m} \text{ positiv und } \left| \frac{\partial}{\partial m} \left(\frac{\frac{\partial y}{\partial x}}{y} \right) \right|_{x = x_1} \text{ negativ}$$

ist. x_1 bedeutet die untere Grenze.

Wir denken uns im folgenden drei Differentialgleichungen gegeben:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2 y'}{dx^2} + H' y' = 0 \\ &\frac{d^2 y''}{dx^2} + H'' y'' = 0 \\ &\frac{d^2 y}{dx^2} + H y = 0 \end{aligned}\right\} \text{ giltig von } x_1 \text{ bis } x_2.$$

H′ und H″ sind voneinander unabhängige Funktionen in x, so dass aber im ganzen Intervall

$$H'' \geqq H'.$$

Ferner gelte:
$$\left| \frac{\frac{dy''}{dx}}{y''} \right|_{x = x_1} \leqq \left| \frac{\frac{dy'}{dx}}{y'} \right|_{x = x_1}$$

Die Funktionen y und H der dritten Differentialgleichung seien ausser von x noch von einem variablen Parameter m abhängig und zwar in der Weise, dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. $$\left.\begin{aligned} &\left| H(x, m) \right|_{m = m_1} \equiv H'(x) \\ &\left| H(x, m) \right|_{m = m''} \equiv H''(x) \end{aligned}\right\} \text{ wobei } m'' > m'.$$

2. H (x, m) nehme mit wachsendem Parameter innerhalb der Grenzen m′ und m″ kontinuierlich zu.

3. $$\left|\frac{\frac{dy}{dx}}{y}\right|_{\substack{x=x_1\\ m=m'}} = \left|\frac{\frac{dy'}{dx}}{y'}\right|_{x=x_1}; \quad \left|\frac{\frac{dy}{dx}}{y}\right|_{\substack{x=x_1\\ m=m''}}, = \left|\frac{\frac{dy''}{dx}}{y''}\right|_{x=x}$$

Dann müssen nach früherem die Wurzeln der Gleichung

$$y = 0$$

mit wachsendem m abnehmen.

Wählen wir ein m, das zwischen m′ und m″ gelegen ist, so muss jede zwischen x_1 und x_2 liegende Wurzel von

$$y = 0$$

sicher kleiner sein als die entsprechende von

$$y' = 0,$$

aber zugleich grösser als diejenige von

$$y'' = 0.$$

Die drei letzten Bedingungen, welchen die Funktion H(x, m) unterworfen ist, lassen sich aber leicht für jede beliebige Funktion H(x) erfüllen, sobald in einem bestimmten Intervall der reellen Axe die Beziehung gilt:

$$H''(x) > H(x) > H'(x).$$

Man kann immer auf beliebig viele Arten in die Funktion H(x) einen Parameter m so unterbringen, dass die gestellten Bedingungen erfüllt sind. Deshalb können wir das Sturmsche Theorem in folgenden Satz fassen:

Sind die drei Differentialgleichungen gegeben:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d^2y'}{dx^2} + H'y' = 0 \\[2ex] \dfrac{d^2y''}{dx^2} + H''y'' = 0 \\[2ex] \dfrac{d^2y}{dx^2} + Hy = 0 \end{array}\right| \text{ giltig zwischen } x_1 \text{ und } x_2,$$

die den Bedingungen genügen, dass

1. $$\mathbf{H'' \geqq H \geqq H'}$$

2. $$\left|\frac{\frac{dy''}{dx}}{y''}\right|_{x=x_1} \leqq \left|\frac{\frac{dy}{dx}}{y}\right|_{x=x_1} \leqq \left|\frac{\frac{dy'}{dx}}{y'}\right|_{x=x_1},$$

3. *alle drei Funktionen y'', y und y' an der untern Grenze das gleiche Vorzeichen besitzen.*

so liegt die n^{te} Wurzel der Gleichung

$$y = 0$$

zwischen den n^{ten} Wurzeln von

$$y'' = 0 \quad \textit{und} \quad y' = 0.$$

Dabei sind die Funktionen H'' und H' ganz willkürliche, einzig der Bedingung unterworfen

$$H'' \geqq H' \text{ für jedes } x.$$

Wir können sie also auch als Konstante betrachten. Die allgemeinen Integrale der Differentialgleichung lauten dann

$$y' = C' \sin\sqrt{H'}\,(x - c')$$
$$y'' = C'' \sin\sqrt{H''}\,(x - c'').$$

Die willkürlichen Konstanten lassen sich immer so wählen, dass die Bedingungen 2 und 3 erfüllt sind.

Wählen wir z. B. als untere Grenze x_1 eine Wurzel der Gleichung $y = 0$ und bezeichnen sie mit α, dann können wir c' und c'' so bestimmen, dass α auch eine Nullstelle wird für y'' und y'. Wir setzen zu diesem Zweck

$$y' = C' \sin\sqrt{H'}\,(x - \alpha)$$
$$y'' = C'' \sin\sqrt{H''}\,(x - \alpha).$$

Es wird dann

$$\left|\frac{\frac{dy''}{dx}}{y''}\right|_{x=x_1} = \left|\frac{\frac{dy'}{dx}}{y'}\right|_{x=x_1} = \left|\frac{\frac{dy}{dx}}{y}\right|_{x=x_1} = +\infty.$$

Wählen wir jetzt H' und H'' so, dass

$$H'' \geqq H \geqq H',$$

so ist sicher, dass die auf α folgende Nullstelle α_1 von y durch diejenigen von y' und y'' eingeschlossen wird. Diese letztern liegen aber bei

$$\alpha + \frac{\pi}{\sqrt{H''}} \quad \text{und}$$

$$\alpha + \frac{\pi}{\sqrt{H'}},$$

Es muss somit die Beziehung gelten

$$\frac{\pi}{\sqrt{H'}} > \alpha_1 - \alpha > \frac{\pi}{\sqrt{H''}}.$$

Die vorstehenden Entwicklungen wenden wir auf die Besselsche Differentialgleichung an.

Setzen wir in derselben

$$y = \frac{z}{\sqrt{x}},$$

so geht sie in die Form über

$$\frac{d^2 z}{d x^2} + \left(1 - \frac{a^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\right) z = 0.$$

Es wird somit in diesem Falle

$$H = 1 - \frac{a^2 - \frac{1}{4}}{x^2}.$$

Es seien α_1 und α zwei aufeinanderfolgende Nullstellen der Funktion

$$z = \sqrt{x}\,\overset{a}{J}(x). \qquad \alpha_1 > \alpha.$$

Sobald der absolute Wert von a grösser als 1/2, so ist

$$H(\alpha_1) > H(\alpha).$$

Wir wählen nun

$$H'' = H(\alpha_1) \text{ und } H' = H(\alpha).$$

Im Intervall von α bis α_1 gilt dann

$$H'' \geqq H \geqq H'.$$

Wir können deshalb die oben abgeleitete Beziehung anwenden und schreiben

$$\frac{\pi}{\sqrt{1 - \frac{a^2 - \frac{1}{4}}{\alpha^2}}} > \alpha_1 - \alpha > \frac{\pi}{\sqrt{1 - \frac{a^2 - \frac{1}{4}}{\alpha_1^2}}}.$$

Die richtige Differenz

$$\Delta = \alpha_1 - \alpha$$

erhalten wir, wenn wir an Stelle von α resp. α_1 einen Wert ξ setzen, der zwischen α und α_1 gelegen und noch näher zu bestimmen ist.

Die obige Formel ist noch richtig für

$$a = \pm \frac{1}{2}.$$

Sie ergibt für Δ den Wert π.

Ist dagegen der absolute Wert von $a < \frac{1}{2}$, so wird

$$H'' \leqq H \leqq H'$$

und deshalb kehrt sich die Ungleichung um. Es gilt dann

$$\frac{\pi}{\sqrt{1-\frac{a^2-\frac{1}{4}}{\alpha^2}}} < \alpha_1 - \alpha < \frac{\pi}{\sqrt{1-\frac{a^2-\frac{1}{4}}{\alpha_1^2}}}.$$

Deshalb können wir folgenden Satz aufstellen:

Die Differenz Δ zwischen zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen α und α_1 von $\overset{a}{J}(x)$ ist gleich $\frac{\pi}{\sqrt{1-\frac{a^2-\frac{1}{4}}{\xi^2}}}$, wobei ξ einen noch näher zu bestimmenden Wert zwischen α_1 und α bedeutet. Es ist $\Delta \gtreqqless \pi$ je nachdem der absolute Wert von $a \gtreqqless \frac{1}{2}$ ist.

Das Intervall zwischen den grossen Wurzeln nähert sich für jedes endliche a dem Werte π.

Genau das gleiche Gesetz gilt selbstverständlich auch für die reellen Nullstellen der Funktionen $\overset{a}{K}(x)$. Es ist

$$\Delta_1 = \frac{\pi}{\sqrt{1-\frac{a^2-\frac{1}{4}}{\xi_1^2}}}.$$

Weil die erste Nullstelle von $\overset{a}{K}(x)$ vor derjenigen von $\overset{a}{J}(x)$ liegt, so ist

$$\xi_1 < \xi$$

und daher

$$\Delta_1 > \Delta \qquad \text{für endliche a.}$$

Auch für die Abstände der *Maxima* und *Minima* der beiden Funktionen $\overset{a}{J}(x)$ und $\overset{a}{K}(x)$ lassen sich ähnliche Grenzwerte aufstellen, indem man die Differentialgleichung von

$$\frac{d\overset{a}{J}(x)}{dx} \text{ resp. von } \frac{d\overset{a}{K}(x)}{dx}$$

aufstellt und auf sie das Sturmsche Theorem anwendet. Da aber sowohl die Methode als auch die Resultate nichts Neues bieten, so wollen wir von einer Ausführung absehen.

Die oben abgeleitete Beziehung

$$\frac{\pi}{\sqrt{1-\frac{a^2-\frac{1}{4}}{\alpha^2}}} < \Delta < \frac{\pi}{\sqrt{1-\frac{a^2-\frac{1}{4}}{\alpha_1^{\,2}}}}$$

gestattet uns, den Abstand von zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen der Funktionen $\overset{a}{J}(x)$ resp. $\overset{a}{K}(x)$ in zwei Grenzen einzuschliessen. Diese sind für die ersten Nullstellen allerdings ziemlich weit, werden aber für die höhern immer enger, so dass sie die betreffenden Δ ziemlich genau bestimmen. Kennt man daher die paar ersten Nullstellen, so lassen sich die höhern mit Hilfe obiger Beziehung auf leichte Weise annähernd berechnen. Die Genauigkeit ist um so grösser, je kleiner a.

Dabei existiert aber der Übelstand, dass man zur Berechnung der höhern Nullstellen immer auf die kleinern, ungenau bestimmten zurückgreifen muss. Diese Schwierigkeit kann man auf folgende Weise umgehen.

Die n^{te} Nullstelle α_n von $\overset{a}{J}(x)$ nähert sich dem Werte

$$\left(2n+a-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}$$

von unten. Wir setzen deshalb

$$\alpha_n = \left(2n+a-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2} - \eta_n$$

und bestimmen η_n.

η_n ist gleich der Summe all derjenigen Beträge, um welche

$$\Delta_\mu > \pi,$$

wenn μ von $n+1$ bis ∞ läuft.

Also

$$\eta_n = \sum_{\mu=n+1}^{\infty}(\Delta_\mu - \pi) = \pi\sum_{\mu=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{a^2-\frac{1}{4}}{\xi_\mu^2}}}-1\right).$$

Diese Summe lässt sich zwischen zwei Integrale fassen.

Es sei allgemein

$$y_\mu = f(x_\mu)$$

und

$$\delta_\mu = x_{\mu+1} - x_\mu$$

tendiere mit wachsendem μ gegen den endlichen Grenzwert g, so dass gilt

$$\delta_\mu \geqq g.$$

Ferner nehme y_μ mit wachsendem μ ab.

Es wird dann

$$\sum_{\mu=n+1}^{\infty} \delta_\mu \cdot y_\mu = \delta \sum_{\mu=n+1}^{\infty} y_\mu,$$

wobei
$$\delta_{n+1} > \delta > g$$

und im weitern gelten folgende zwei Beziehungen:

$$\int_{x_{n+1}}^{\infty} f(x)\, dx < \delta \sum_{\mu=n+1}^{\infty} y_\mu$$

$$\int_{x_{n+1}}^{\infty} f(x-\delta_n) > \delta \sum_{\mu=n+1}^{\infty} y_\mu.$$

Setzt man im letzten Integral für x den Wert $x + \delta_n$, so erhalten wir die Ungleichheit

$$\frac{1}{\delta}\int_{x_n}^{\infty} \mathbf{y\, dx} > \sum_{\mu=n+1}^{\infty} \mathbf{y}_\mu > \frac{1}{\delta}\int_{x_{n+1}}^{\infty} \mathbf{y\, dx}.$$

In unserem Fall ist

$$y = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{a^2-\frac{1}{4}}{x^2}}} - 1$$

$$x_\mu = \xi_\mu.$$

$$\int_{\xi_n}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{a^2-\frac{1}{4}}{x^2}}} - 1 \right) dx = \xi_n - \sqrt{\xi_n^2 - \left(a^2 - \tfrac{1}{4}\right)}.$$

Diese Werte in obiger Gleichung eingesetzt, ergibt

$$\frac{1}{\delta}\left(\xi_n - \sqrt{\xi_n^2 - \left(a^2-\tfrac{1}{4}\right)}\right) > \sum_{\mu=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{a^2-\frac{1}{4}}{\xi_\mu^2}}} - 1 \right)$$

$$> \frac{1}{\delta}\left(\xi_{n+1} - \sqrt{\xi_{n+1}^2 - \left(a^2-\tfrac{1}{4}\right)}\right).$$

Nun ist aber

$$\eta_n = \pi \sum_{\mu=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{a^2 - \frac{1}{4}}{\xi_\mu^2}}} - 1 \right).$$

Deshalb die Beziehung

$$\frac{\pi}{\delta}\left(\xi_n - \sqrt{\xi_n^2 - \left(a^2 - \tfrac{1}{4}\right)}\right) > \eta_n > \frac{\pi}{\delta}\left(\xi_{n+1} - \sqrt{\xi_{n+1}^2 - \left(a^2 - \tfrac{1}{4}\right)}\right).$$

Diese Formel gilt sowohl für die Nullstellen von $\overset{a}{J}(x)$ als für die von $\overset{a}{K}(x)$. Da man weder δ noch ξ_n und ξ_{n+1} kennt, so kann sie wiederum nur für die Berechnung der grössern Nullstellen verwendet werden und zwar wie folgt:

Der Grenzwert von δ_μ ist gleich π. Man kann daher ohne grossen Fehler $\frac{\pi}{\delta} = 1$ setzen.

Bei den grössern Nullstellen stehen ξ_n und ξ_{n+1} von dem gesuchten α_n um ungefähr $\frac{\pi}{2}$ nach links und rechts ab, so dass annähernd für $\overset{a}{J}(x)$ gilt:

$$\xi_n = \alpha_n - \frac{\pi}{2} = \left(2n + a - \frac{3}{2}\right)\frac{\pi}{2}$$

$$\xi_{n+1} = \alpha_n + \frac{\pi}{2} = \left(2n + a + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}.$$

Dies eingesetzt ergibt:

$$\left\{\left(2n + a - \tfrac{3}{2}\right)\tfrac{\pi}{2} - \sqrt{\left(2n + a - \tfrac{3}{2}\right)^2 \tfrac{\pi^2}{4} - \left(a^2 - \tfrac{1}{4}\right)}\right\}$$

$$> \eta_n > \left\{\left(2n + a + \tfrac{1}{2}\right)\tfrac{\pi}{2} - \sqrt{\left(2n + a + \tfrac{1}{2}\right)^2 \tfrac{\pi^2}{4} - \left(a^2 - \tfrac{1}{4}\right)}\right\}$$

und da $\alpha_n = \left(2n + a - \tfrac{1}{2}\right)\tfrac{\pi}{2} - \eta_n$, so folgt

$$\sqrt{\left(2n+a+\tfrac{1}{2}\right)^2\frac{\pi^2}{4}-\left(a^2-\tfrac{1}{4}\right)}-\frac{\pi}{2}$$

$$>\alpha_n>\sqrt{\left(2n+a-\tfrac{3}{2}\right)^2\frac{\pi^2}{4}-\left(a^2-\tfrac{1}{4}\right)}+\frac{\pi}{2}.$$

Die entsprechende Formel für $\overset{a}{K}(x)$ lautet:

$$\sqrt{\left(2n+a-\tfrac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{\pi^2}{4}-\left(a^2-\tfrac{1}{4}\right)}-\frac{\pi}{2}$$

$$>\alpha'_n>\sqrt{\left(2n+a-\tfrac{5}{2}\right)^2\frac{\pi^2}{4}-\left(a^2-\tfrac{1}{4}\right)}+\frac{\pi}{2}.$$

Diese Formeln sind natürlich nicht streng richtig und sind zur Bestimmung der ersten und mit wachsendem a auch für die zweite und dritte Nullstelle nicht anwendbar. Immerhin haben wir an Hand der Tabellen von *Lommel* konstatiert, dass sie noch richtig sind für die zweite Nullstelle von $\overset{8}{J}(x)$. Die höhern Nullstellen werden in so enge Grenzen eingeschlossen, dass für die meisten praktischen Zwecke die Resultate wohl genügend genau sind. So liefert z. B. die Formel für die 10. Nullstelle von $\overset{1}{J}(x)$ die Grenzen 32,1887 und
32,1890.

Exakte Werte würden wir dann erhalten, wenn es gelänge, die ξ und ξ_1 genau zu ermitteln.

Die Erfahrung hat uns gelehrt, dass die ξ sehr nahe zusammenfallen mit den Nullstellen von $\overset{a}{K}(x)$ und umgekehrt die ξ_1 mit den Nullstellen von $\overset{a}{J}(x)$. Wir wissen aber nicht, wie weit diese Übereinstimmung geht und ob sie eventuell von der zweiten Nullstelle an eine vollkommene ist.

In den beiliegenden *Tabellen* haben wir die Nullstellen α und α_1 von $\overset{a}{J}(x)$ und $\overset{a}{K}(x)$ als Funktionen des Parameters a dargestellt.

Tabelle I entspricht somit der Gleichung

$$\alpha = f(a)$$

und Tabelle II der entsprechenden

$$\alpha_1 = f_1(a).$$

Beide Funktionen f und f_1 besitzen unendlich viele voneinander isolierte Äste, entsprechend den unendlich vielen reellen Nullstellen. Von diesen haben wir nur je die 10 ersten dargestellt. Jeder Ast erstreckt sich ins Unendliche. Der senkrechte Abstand zwischen zwei benachbarten Ästen entspricht der Grösse $\varDelta$ und ist zwischen

$$a = -\frac{1}{2}$$

und

$$a = +\frac{1}{2}$$

kleiner als π,

für

$$a = \pm\frac{1}{2}$$

wird er gleich π, und im übrigen Teil der Ebene ist er grösser als π. Zwischen den zwei ersten Ästen ist er am grössten, nähert sich aber immer mehr dem Werte π, je weiter wir uns von der a-Achse entfernen.

Die horizontalen punktierten Geraden veranschaulichen die Beziehung

$$\overset{-n}{J}(x) = (-1)^n \overset{n}{J}(x) \text{ resp.}$$

$$\overset{-n}{K}(x) = (-1)^n \overset{n}{K}(x).$$

Wir haben absichtlich nur *einige* dieser Linien gezogen, um die Anschaulichkeit des Kurvensystems zu heben.

Die einzelnen Äste der Funktion f liegen symmetrisch zur a-Achse, weil zu jeder positiven Nullstelle von $\overset{a}{J}(x)$ eine gleich grosse negative gehört. Die Funktion f_1 dagegen besitzt auf der negativen Hälfte der Zahlenebene nur einzelne isolierte Punkte, welche mit den Nullstellen von $\overset{-\frac{2n+1}{2}}{J}(x)$ zusammenfallen.

Der Richtungskoeffizient der reellen Kurvenäste ist stets positiv. Dies folgt schon aus dem Sturmschen Theorem; doch ist sein Wert auch direkt bestimmt worden, wie *Graf und Gubler* in ihrem schon oft zitierten Werk auf Seite 108 u. folg. nachweisen.

Es gilt nämlich, wenn

$$\alpha = f(a)$$

$$\frac{d\alpha}{da} = \frac{2a}{\alpha\,[\overset{a+1}{J}(\alpha)]^2} \int_0^{\alpha} [\overset{a}{J}(t)]^2 \frac{dt}{t}$$

oder da

$$[\overset{a+1}{J}(\alpha)]^2 = \frac{2}{\alpha^2} \int_0^{\alpha} [\overset{a}{J}(t)]^2\, t \cdot dt$$

$$\frac{d\alpha}{da} = a\alpha \frac{\displaystyle\int_0^{\alpha} [\overset{a}{J}(t)]^2 \frac{dt}{t}}{\displaystyle\int_0^{\alpha} [\overset{a}{J}(t)]^2\, t\, dt} \quad \text{giltig für positive a.}$$

Dieser Wert ist immer positiv.

Für $\alpha = 0$ wird $\dfrac{d\alpha}{da} = +\infty$

Für $a = 0$ » $\dfrac{d\alpha}{da} = \dfrac{1}{\alpha[\overset{1}{J}(\alpha)]^2}$.

Da der Nullpunkt eine n-fache Nullstelle der Funktion $\overset{a}{J}(x)$ ist, wenn

$$n \leqq a < n+1,$$

so ist in der Tabelle I die ganze positive a-Achse eigentlich als der erste Kurvenast anzusehen.

Die komplexen Nullstellen von $\overset{a}{J}(x)$ könnten wir so veranschaulichen, dass wir eine dritte Achse, die i-Achse einführten und sie senkrecht zur aα-Ebene stellten. Die komplexen Äste würden dann im Raume verlaufen. Das Bild wäre folgendes:

Im Punkt -1 der Tabelle I treten zwei rein imaginäre Äste in den Raum und vereinigen sich wieder im Punkte -2. Zwischen -2 und -3 liegen 4 komplexe Äste, allgemein sind die Punkte $-n$ und $-(n+1)$ durch n-Paare konjugiert komplexer Kurvenäste verbunden.

Legen wir durch dieses Raumgebilde an irgend einer Stelle der a-Achse einen ebenen Schnitt parallel zur αi-Ebene, so ergeben uns die Schnittpunkte sämtliche reellen und imaginären Nullstellen der Funktion $\overset{a}{J}(x)$.

Tabelle I

Die Nullstellen von σ (x)

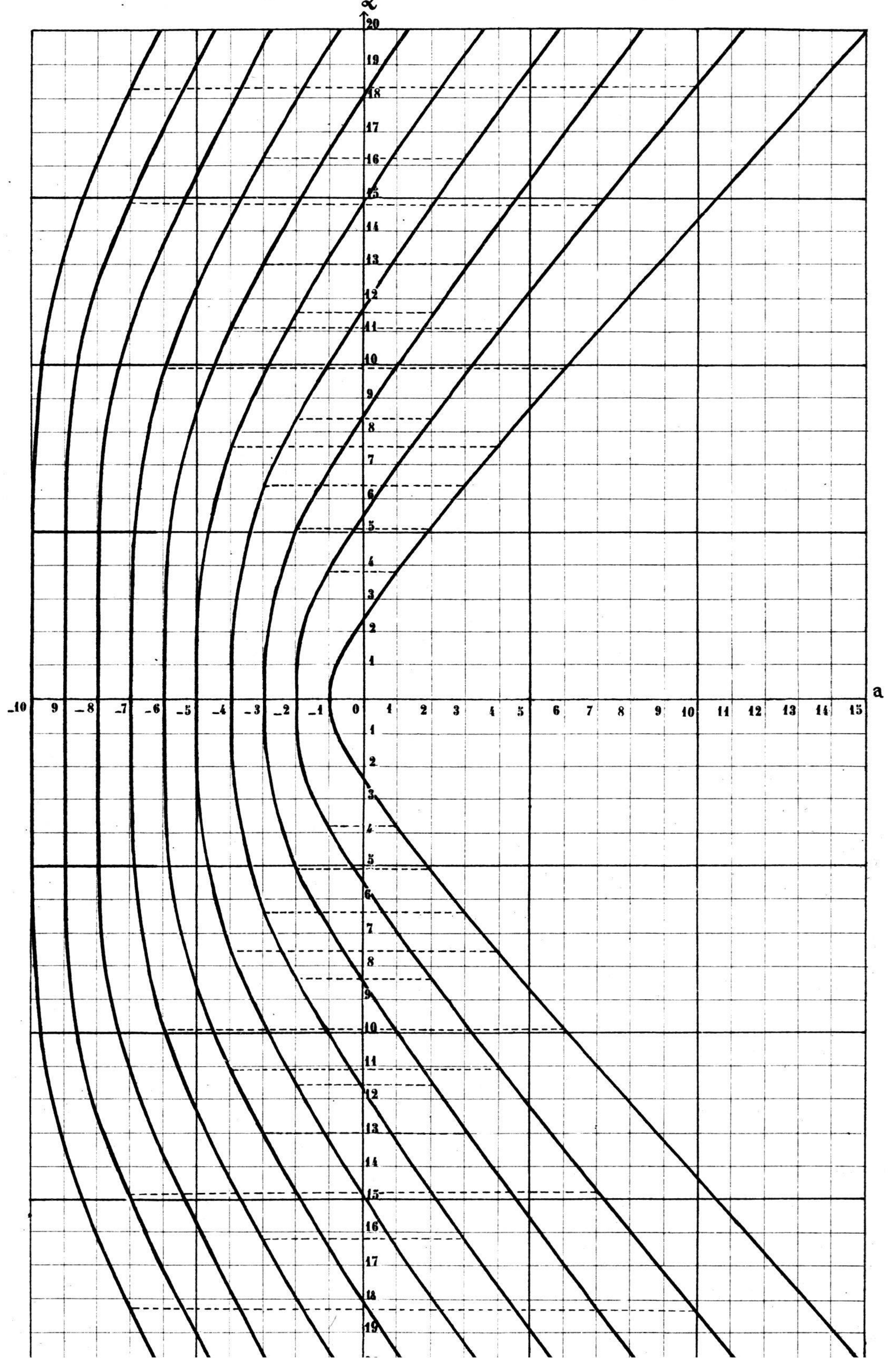
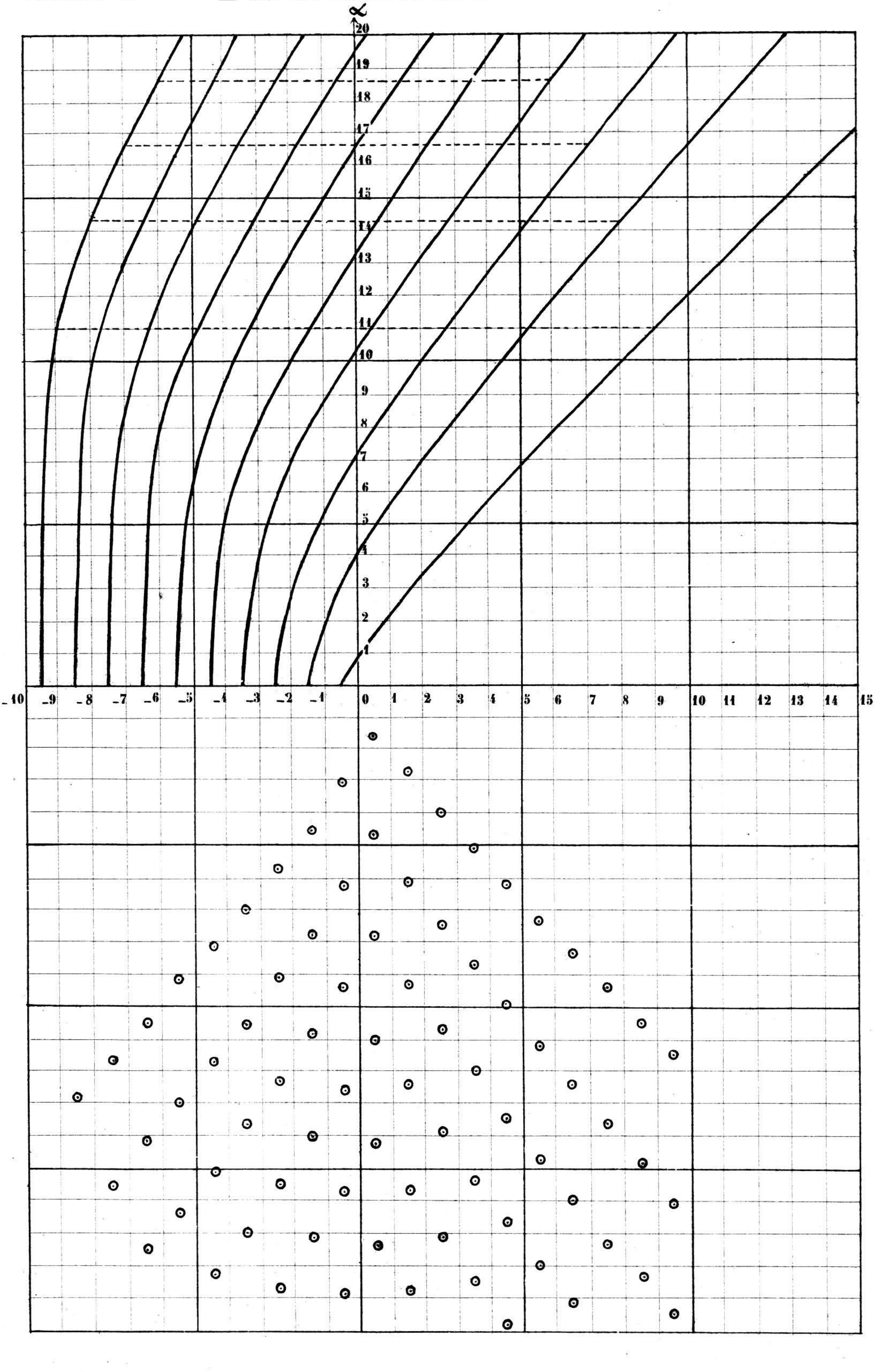


Tabelle II Die Nullstellen von K(x)



Die entsprechenden Verhältnisse für $\overset{a}{K}(x)$ haben wir nicht untersucht.

Zum Schlusse sei noch bemerkt, dass wir die Daten zur Erstellung der beiden Tabellen aus den Beziehungen berechnet haben, welche uns die Sturmsche Methode lieferte. Ein Vergleich mit den *Lommel*schen Tabellen ergab eine genügende Übereinstimmung.