

Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern
Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern
Band: - (1906)
Heft: 1609-1628

Artikel: Ueber die Integrale $x^m \cos nx \, dx$ und $x^m \sin nx \, dx$ (m und n ganze Zahlen) [mit den Integralgrenzen von 0 bis]
Autor: Bohren, A.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-319165>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 30.01.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

A. Bohren.

Ueber

die Integrale $\int_0^\pi x^m \cos nx \, dx$ und $\int_0^\pi x^m \sin nx \, dx$
(m und n ganze Zahlen)

(Eingereicht den 5. Juli 1906).

In Tabellen über bestimmte Integrale finden sich¹⁾

$$\int_0^\pi x \sin nx \, dx = \frac{(-1)^{n+1} \pi}{n}$$

$$\int_0^\pi x \cos nx \, dx = -\frac{1}{n^2} [1 + (-1)^{n+1}]$$

$$\int_0^\pi x^2 \sin nx \, dx = \frac{2}{n^3} \left[-1 + (-1)^n \left(1 - \frac{n^2 \pi^2}{2} \right) \right]$$

$$\int_0^\pi x^2 \cos nx \, dx = (-1)^n \frac{2\pi}{n^2}$$

Mit Hilfe dieser Spezialfälle lassen sich nun auch die oben angegebenen Integrale leicht ausführen.

Durch partielle Integration erhalten wir zunächst

$$\begin{aligned} F(m) = \int_0^\pi x^m \sin nx \, dx &= -\left(\frac{1}{n} x^m \cos nx \right)_0^\pi + \frac{m}{n} \int_0^\pi x^{m-1} \cos nx \, dx \\ &= (-1)^{n+1} \frac{\pi^m}{n} + \frac{m}{n} \int_0^\pi x^{m-1} \cos nx \, dx \end{aligned}$$

$$f(m) = \int_0^\pi x^m \cos nx \, dx = -\frac{m}{n} \int_0^\pi x^{m-1} \sin nx \, dx$$

¹⁾ Nouvelles tables d'intégrales définies de Bierens de Haan.
Meyer, Bestimmte Integrale.

also
$$F(m) = (-1)^{n+1} \frac{\pi^m}{n} + \frac{m}{n} f(m-1)$$

$$f(m) = -\frac{m}{n} F(m-1)$$

Mit Hilfe dieser Rekursionsformeln gelangen wir auf $F_{(1)}$ und $f_{(1)}$, mit den oben angegebenen Werten.

Es ist demnach

$F_1 = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{n}$	$f_1 = -\left[1 + (-1)^{n+1}\right] \frac{1}{n^2}$
$F_2 = \pi F_1 + \frac{2}{n} f_1$	$f_2 = -\frac{2}{n} F_1$
$F_3 = \pi^2 F_1 + \frac{3}{n} f_2$	$f_3 = -\frac{3}{n} F_2$
$F_4 = \pi^3 F_1 + \frac{4}{n} f_3$	$f_4 = -\frac{4}{n} F_3$
.
$F_m = \pi^{m-1} F_1 + \frac{m}{n} f_{m-1}$	$f_m = -\frac{m}{n} F_{m-1}$

Werden die entsprechenden Werte eingesetzt, so erhalten wir für die F_1 nach geraden und ungeraden Indices geordnet:

$$F_1 = F_1$$

$$F_2 = \pi F_1 + \frac{2}{n} f_1$$

$$F_3 = \pi^2 F_1 - \frac{2.3}{n^2} F_1$$

$$F_4 = \pi^3 F_1 - \frac{3.4}{n^2} \pi F_1 - \frac{2.3.4}{n^3} f_1$$

$$F_5 = \pi^4 F_1 - \frac{4.5}{n^2} \pi^2 F_1 + \frac{2.3.4.5}{n^4} F_1$$

$$F_6 = \pi^5 F_1 - \frac{5.6}{n^2} \pi^3 F_1 + \frac{3.4.5.6}{n^4} \pi F_1 + \frac{2.3.4.5.6}{n^5} f_1$$

$$F_7 = \pi^5 F_1 - \frac{6.7}{n^2} \pi^4 F_1 + \frac{4.5.6.7}{n^4} \pi^2 F_1 - \frac{2.3.4.5.6.7}{n^6} F_1$$



Für F_{2m+1} ergibt sich, wenn wir das Gesetz allgemein annehmen

$$\begin{aligned} F_{2m+1} &= F_1 \sum_{\lambda=0}^{\lambda=m} (-1)^{m-\lambda} \frac{(2m+1)!}{(2\lambda+1)!} \frac{\pi^{2\lambda}}{n^{2(m-\lambda)}} \\ &= \frac{(2m+1)!}{n^{2m}} F_1 \sum_{\lambda=0}^{\lambda=m} (-1)^{m-\lambda} \frac{(\pi n)^{2\lambda}}{(2\lambda+1)!} \\ F_{2m+1} &= \frac{(2m+1)!}{n^{2m+2}} \sum_{\lambda=0}^m (-1)^{m+n+1-\lambda} \frac{(n\pi)^{2\lambda+1}}{(2\lambda+1)!} \quad \text{oder} \end{aligned}$$

$$1. \quad \underline{F_{2m+1} = \frac{(2m+1)!}{n^{2m+2}} \cdot (-1)^{m+n+1} \sum_{\lambda=0}^m (-1)^\lambda \frac{(n\pi)^{2\lambda+1}}{(2\lambda+1)!}}$$

Die Σ ist die Sinusreihe von $(n\pi)$.

Für die F_{2m} ergibt sich das folgende allgemeine Bildungsgesetz

$$\begin{aligned} F_{2m} &= (-1)^{m-1} 2m! \frac{f_1}{n^{2m-1}} + \\ &\quad + F_1 \sum_{\lambda=1}^m (-1)^{m-\lambda+n+1} \frac{2m!}{2\lambda!} \cdot \frac{\pi^{2\lambda}}{n^{2(m-\lambda)}} \\ &= (-1)^m \frac{2m!}{n^{2m+1}} \left[1 + (-1)^{n+1} \right] + \\ &\quad + \frac{2m!}{n^{2n+1}} \sum_{\lambda=1}^m (-1)^{m+n-\lambda+1} \frac{(n\pi)^{2\lambda}}{2\lambda!} \\ &= \frac{2m!}{n^{2m+1}} \left[(-1)^m + (-1)^{m+n+1} + \sum_{\lambda=1}^m (-1)^{m+n+1-\lambda} \frac{(n\pi)^{2\lambda}}{2\lambda!} \right] \\ &= \frac{2m!}{n^{2m+1}} \left[(-1)^m + \sum_{\lambda=0}^m (-1)^{m+n+1-\lambda} \frac{(n\pi)^{2\lambda}}{2\lambda!} \right] \\ 2. \quad \underline{F_{2m} = \frac{2m!}{n^{2m+1}} \left[(-1)^m + (-1)^{m+n+1} \sum_{\lambda=0}^m (-1)^\lambda \frac{(n\pi)^{2\lambda}}{2\lambda!} \right]} \end{aligned}$$

Die Σ ist die Cosinusreihe von $(n\pi)$.

Die Integrale f ergeben sich wie folgt

$$f_m = -\frac{m}{n} F_{m-1}$$

$$m = 2m$$

$$f_{2m} = -\frac{2m}{n} F_{2m-1}$$

$$= \frac{2m!}{n^{2m+1}} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=m-1} (-1)^{m+n+1-\lambda} \frac{(n\pi)^{2\lambda+1}}{(2\lambda+1)!}$$

$$3. \quad \underline{f_{2m} = (-1)^{m+n+1} \frac{2m!}{n^{2m+1}} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=m-1} (-1)^\lambda \frac{(n\pi)^{2\lambda+1}}{(2\lambda+1)!}}$$

$$m = 2m + 1 \quad (\Sigma = \text{Sinusreihe von } n\pi).$$

$$f_{2m+1} = -\frac{2m+1}{n} F_{2m}$$

$$4. \quad \underline{f_{2m+1} = -\frac{(2m+1)!}{n^{2m+2}} \left[(-1)^m \right.$$

$$\left. + (-1)^{m+n+1} \sum_{\lambda=0}^m (-1)^\lambda \frac{(n\pi)^{2\lambda}}{2\lambda!} \right]}$$

$$(\Sigma = \text{Cosinusreihe von } n\pi).$$

Wir haben also:

$$I. \quad \int_0^\pi x^{2m+1} \sin nx = (-1)^{m+n+1} \frac{(2m+1)!}{n^{2m+2}} \sum_{\lambda=0}^m (-1)^\lambda \frac{(n\pi)^{2\lambda+1}}{(2\lambda+1)!}$$

$$II. \quad \int_0^\pi x^{2m} \sin nx = \frac{2m!}{n^{2m+1}} \left[(-1)^m + \right. \\ \left. + (-1)^{m+n+1} \sum_{\lambda=0}^m (-1)^\lambda \frac{(n\pi)^{2\lambda}}{2\lambda!} \right]$$

$$III. \quad \int_0^\pi x^{2m+1} \cos nx = -\frac{(2m+1)!}{n^{2m+2}} \left[(-1)^m + \right. \\ \left. + (-1)^{m+n+1} \sum_{\lambda=0}^m (-1)^\lambda \frac{(n\pi)^{2\lambda}}{2\lambda!} \right]$$

$$\text{IV. } \int_0^{\pi} x^{2m} \cos nx = (-1)^{m+n+1} \frac{2m!}{n^{2m+1}} \sum_{\lambda=0}^{m-1} (-1)^{\lambda} \frac{(n\pi)^{2\lambda+1}}{(2\lambda+1)!}$$

Für $m = 1$ erhalten wir aus I x III

$$\int_0^{\pi} x^3 \sin nx = (-1)^n \frac{3!}{n^4} \left[n\pi - \frac{(n\pi)^3}{3!} \right]$$

$$\int_0^{\pi} x^3 \cos nx = \frac{3!}{n^4} \left[1 + (-1)^{n+1} \left(1 - \frac{(n\pi)^2}{2!} \right) \right]$$

Für $n = 1$.

$$\int_0^{\pi} x^3 \sin x = \pi \frac{3}{3!} \pi$$

$$\int_0^{\pi} x^3 \cos x = 12 - 3\pi^2$$

etc.

Da die Integrale bei Entwicklungen von Funktionen nach trig. Reihen auftreten, so scheint mir ihre allgemeine Lösung von einigem Interesse zu sein.
