

# Neun Kreisscharen am Dreieck : allgemeiner Fall und Übertragung auf die Ankreise

Autor(en): **Schenker, O.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern**

Band (Jahr): - **(1907)**

Heft 1629-1664

PDF erstellt am: **24.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-319174>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## Neun Kreisscharen am Dreieck.

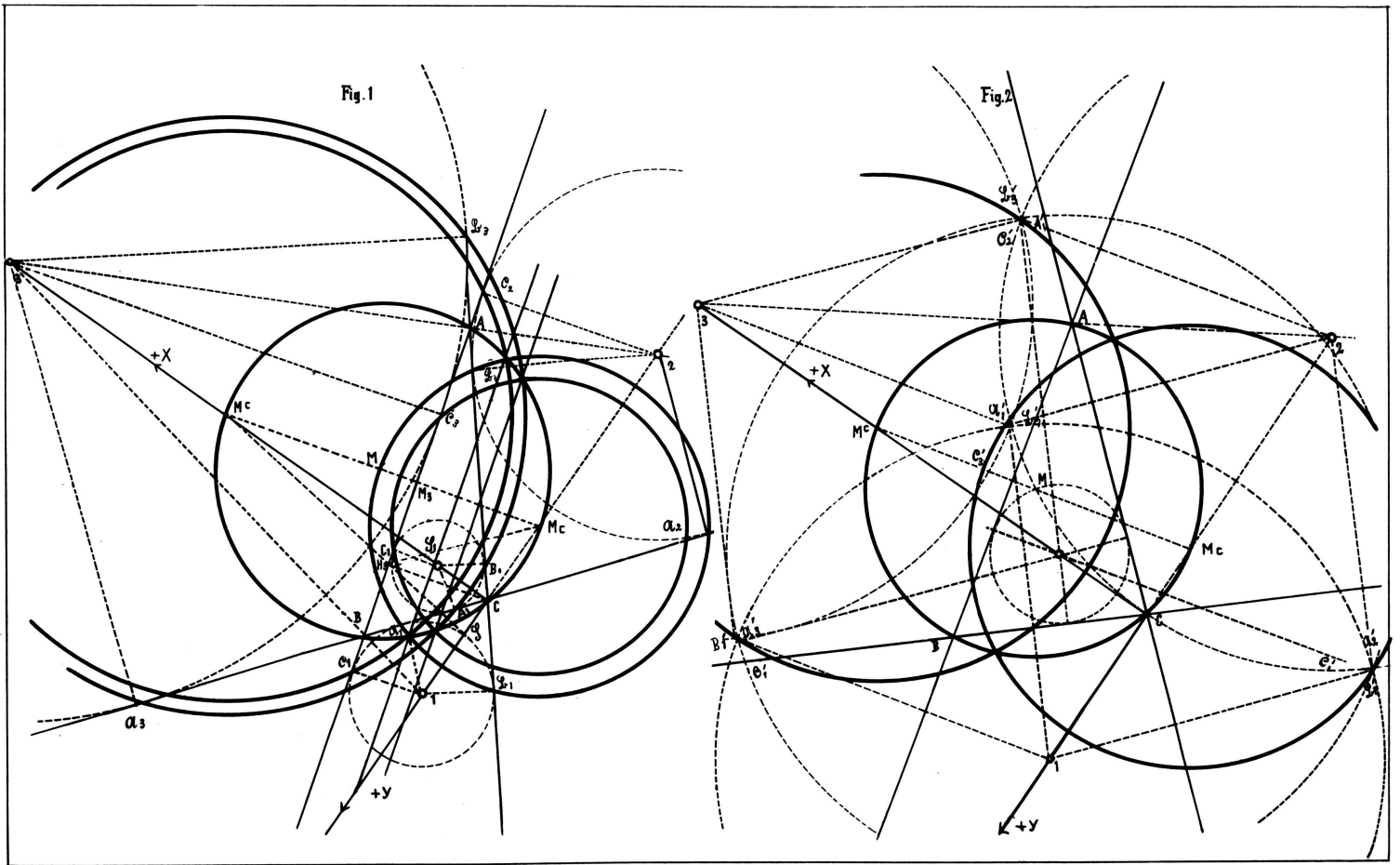
(Allgemeiner Fall und Übertragung auf die Ankreise).

(Eingereicht im Dezember 1906).

**1. Satz:** Im ebenen Dreieck  $ABC$  treffen die innern und äussern Winkelhalbierenden ( $CM^C$  und  $CM_C$ ) eines Winkels ( $C$ ) den Umkreis in zwei Punkten  $M^C$  und  $M_C$ , welchen die Eigenschaft zukommt, dass die Kreise mit  $M^C$  und  $M_C$  zu Zentren gezogen durch die zwei zugehörigen Berührungspunkte ( $A_1$  und  $B_1$ ), des Inkreises und durch seinen Berührungspunkt ( $C_1$ ) an der dritten Seite, sich im Umkreis schneiden.

**2. Satz:** Im ebenen Dreieck  $ABC$  treffen die innern und äussern Winkelhalbierenden  $CM^C$  und  $CM_C$  eines Winkels ( $C$ ) den Umkreis in zwei Punkten  $M^C$  und  $M_C$ , welchen die Eigenschaft zukommt, dass die Kreise mit  $M^C$  und  $M_C$  zu Zentren gezogen durch die zwei zugehörigen Berührungspunkte ( $\mathfrak{A}_3$  und  $\mathfrak{B}_3$ ) des vom Winkel  $C$  eingeschlossenen Ankreises und durch seinen Berührungspunkt ( $\mathfrak{C}_3$ ) an der dritten Seite, sich im Umkreis schneiden.

**3. Satz:** Im Dreieck  $ABC$  treffen die äussern und innern Winkelhalbierenden ( $CM_C$  und  $CM^C$ ) eines Winkels ( $C$ ) den Umkreis in zwei Punkten ( $M_C$  und  $M^C$ ), welche an die Eigenschaft gebunden sind, dass die Kreise mit  $M_C$  und  $M^C$  zu Zentren gezogen durch die zugehörigen Berührungspunkte ( $\mathfrak{A}_1$  und  $\mathfrak{B}_1$  bzw.  $\mathfrak{A}_2$  und  $\mathfrak{B}_2$ ) eines der beiden Ankreise, welche dem Winkel  $A$  bzw. dem Winkel  $B$  gegenüber liegen, und durch seinen Berührungspunkt ( $\mathfrak{C}_1$  resp.  $\mathfrak{C}_2$ ) an der dritten Seite, sich im Umkreis schneiden.



O. Schenker.

### Festlegung des Koordinatensystems.

Als Koordinatenachsen, wählen wir die Winkelhalbierenden von C mit der angegebenen Richtung (S. Figur). Der Umkreisdurchmesser sei die Längeneinheit, so sind die Dreiecksseiten  $\sin A$ ,  $\sin B$  und  $\sin C$  und der Inkreis hat den Radius:

$$\varrho = 2 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}$$

$$\left( \text{denn } \triangle ABC = \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{2} \cdot \varrho = \right.$$

$$\frac{\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C}{2} \text{ woraus } \varrho = 8 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \cdot$$

$$\cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} : 4 \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}$$

$$\text{wegen } \sin A + \sin B + \sin C = 4 \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}$$

$$\text{oder } \varrho = 2 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \left. \right)$$

Der Ankreis (Zentrum  $O_3$ ), welcher C gegenüberliegt, hat

$$\text{den Radius: } \varrho_3 = 2 \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}$$

$$\left( \text{denn } \triangle ABC = \frac{\sin A + \sin B - \sin C}{2} \cdot \varrho_3 \right.$$

$$= \frac{\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C}{2}$$

woraus

$$\varrho_3 = 8 \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}$$

$$: 4 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}$$

wegen

$$\sin A + \sin B - \sin C = 4 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}$$

oder

$$\varrho_3 = 2 \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \left. \right)$$

Der Ankreis (Zentrum  $O_1$ ), welcher A gegenüberliegt, hat

den Radius: 
$$\varrho_1 = 2 \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} \cdot \sin \frac{A}{2}$$

(denn  $\triangle ABC = \frac{\sin B + \sin C - \sin A}{2} \cdot \varrho_1 = \frac{\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C}{2}$ ,

woraus  $\varrho_1 = 8 \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}$

:  $4 \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{A}{2}$ , wegen  $\sin B + \sin C - \sin A$

$$= 4 \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{A}{2}$$
)

M und O seien die Zentren des Umkreises, bzw. des Inkreises und die Berührungspunkte der Kreise O,  $O_1$  und  $O_3$  an den Seiten BC, CA und AB,  $A_1, B_1, C_1$  | bzw.  $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{C}_1$  | bzw.  $\mathfrak{A}_3, \mathfrak{B}_3, \mathfrak{C}_3$  |.

Berücksichtigt man, dass  $\sphericalangle (MC + X)$

$$= \sphericalangle \frac{B - A}{2} = \sphericalangle (+ XOC_1),$$

(Man denkt sich dabei einen positiven Winkel durch Drehung eines Strahls um seinen Anfangspunkt im entgegengesetzten Sinne des Uhrzeigers entstanden oder auch im Sinne der Bewegung der Erde um ihre Axe oder um die Sonne), so leitet man an Hand der Figur 1 die Koordinaten ab, wie sie in der folgenden Tabelle zusammengestellt sind:

	x	y
$A_1$	$2 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \cos^2 \frac{C}{2}$	$2 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}$
$B_1$	$2 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \cos^2 \frac{C}{2}$	$-2 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}$
$C_1$	$2 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} + 2 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2}$	$-2 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \cdot \sin \frac{A-B}{2}$
$\mathcal{A}_1$	$2 \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}$	$2 \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}$
$\mathcal{B}_1$	$-2 \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}$	$2 \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}$
$\mathcal{C}_1$	$2 \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2}$	$2 \cos \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} - 2 \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{A-B}{2}$
$\mathcal{A}_3$	$2 \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos^2 \frac{C}{2}$	$2 \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}$
$\mathcal{B}_3$	$2 \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos^2 \frac{C}{2}$	$-2 \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}$
$\mathcal{C}_3$	$2 \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} - 2 \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2}$	$2 \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \cdot \sin \frac{A-B}{2}$

Hieran schliessen sich noch die Koordinaten von  $M$ ,  $M_C$  und  $M^C$ :

	x	y
$M$	$\frac{1}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2}$	$\frac{1}{2} \sin \frac{A-B}{2}$
$M_C$	0	$\sin \frac{A-B}{2}$
$M^C$	$\cos \frac{A-B}{2}$	0

**Beweis zu Satz 1.**

Der Kreis aus  $M_C$  durch  $C_1$  hat die Gleichung:

$$x^2 + \left( y - \sin \frac{A-B}{2} \right)^2 = \left[ 2 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} + 2 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2} \right]^2 + \sin^2 \frac{A-B}{2} \left( 1 + 2 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \right)^2$$

und der Kreis aus  $M^C$  durch  $A_1$ :

$$\left( x - \cos \frac{A-B}{2} \right)^2 + y^2 = \left( \cos \frac{A-B}{2} - 2 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \cos^2 \frac{C}{2} \right)^2 + 4 \left( \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} \right)^2$$

daher lautet die Gleichung der gemeinsamen Sehne:

$$2x \cos \frac{A-B}{2} - 2y \cdot \sin \frac{A-B}{2} = 4 \sin^2 \frac{A}{2} \cdot \sin^2 \frac{B}{2} - 4 \sin^2 \frac{A}{2} \cdot \sin^2 \frac{B}{2} \cdot \cos^4 \frac{C}{2} - 4 \cdot \sin^2 \frac{A}{2} \cdot \sin^2 \frac{B}{2} \cdot \cos^2 \frac{C}{2} \cdot \sin^2 \frac{C}{2}$$

$$\begin{aligned}
 & + 4 \sin^2 \frac{A}{2} \cdot \sin^2 \frac{B}{2} \cdot \sin^2 \frac{C}{2} + 8 \cdot \sin^2 \frac{A}{2} \cdot \sin^2 \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2} \\
 & \qquad \qquad \qquad + 4 \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \cdot \sin^2 \frac{A-B}{2} \\
 & \qquad \qquad \qquad + 4 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \cos^2 \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2} \\
 = & 4 \sin^2 \frac{A}{2} \cdot \sin^2 \frac{B}{2} \cdot \sin^2 \frac{C}{2} + 4 \cdot \sin^2 \frac{A}{2} \cdot \sin^2 \frac{B}{2} \cdot \sin^2 \frac{C}{2} \\
 & + 8 \sin^2 \frac{A}{2} \cdot \sin^2 \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2} \\
 & \qquad \qquad \qquad + 4 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \cdot \sin^2 \frac{A-B}{2} \\
 & \qquad \qquad \qquad + 4 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \cos^2 \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} \\
 = & 8 \sin^2 \frac{A}{2} \cdot \sin^2 \frac{B}{2} \cdot \sin^2 \frac{C}{2} + 8 \cdot \sin^2 \frac{A}{2} \cdot \sin^2 \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2} \\
 & + 4 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \cdot \sin^2 \frac{A-B}{2} \\
 & \qquad \qquad \qquad + 4 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \cos^2 \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} \\
 = & 16 \sin^2 \frac{A}{2} \cdot \sin^2 \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \\
 & + 4 \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \cdot \sin^2 \frac{A-B}{2} \\
 & \qquad \qquad \qquad + 4 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \cos^2 \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2} \\
 = & 8 \cdot \sin^2 \frac{A}{2} \cdot \sin^2 \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \\
 & + 8 \sin^2 \frac{A}{2} \cdot \sin^2 \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \\
 & + 4 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \cdot \sin^2 \frac{A-B}{2} \\
 & \qquad \qquad \qquad + 4 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \cos^2 \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= 4 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \left[ \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \right. \\
 &\quad + \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \\
 &\quad + \sin \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \\
 &\quad \left. + \cos \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \right] \\
 &\quad + 8 \cdot \sin^2 \frac{A}{2} \cdot \sin^2 \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \\
 &\quad - 8 \sin^2 \frac{A}{2} \cdot \sin^2 \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \\
 &\quad + 4 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \cos^2 \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2} \\
 &= 4 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \left[ \sin \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} \right. \\
 &\quad \left. + \sin \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} \right] \\
 &\quad + 4 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \cos^2 \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2} \\
 &= 4 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \cdot \cos^2 \frac{C}{2} + 4 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \cos^2 \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2} \\
 &= 4 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \cos^2 \frac{C}{2} \left[ \cos \frac{A+B}{2} + \cos \frac{A-B}{2} \right] \\
 &= 8 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos^2 \frac{C}{2}
 \end{aligned}$$

Die Gleichung der gemeinsamen Sehne hat also die endgültige Gestalt:

$$\begin{aligned}
 &2x \cos \frac{A-B}{2} - 2y \cdot \sin \frac{A-B}{2} \\
 &\hline
 &= 8 \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos^2 \frac{C}{2} \qquad (1)
 \end{aligned}$$

Die Gleichung des Umkreises ist:

$$\left(x - \frac{1}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2} \sin \frac{A-B}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

und daher lautet die Gleichung der gemeinsamen Sehne für die Kreise  $M^C$  und  $M$ :

$$\begin{aligned} & - x \cdot \cos \frac{A-B}{2} + y \cdot \sin \frac{A-B}{2} = 4 \sin^2 \frac{A}{2} \cdot \sin^2 \frac{B}{2} \cdot \cos^2 \frac{C}{2} \\ & - 4 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \cos^2 \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2} \\ & = 4 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \cos^2 \frac{C}{2} \left[ \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} - \cos \frac{A-B}{2} \right] \\ & = - 4 \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos^2 \frac{C}{2} \quad \text{oder} \\ & \frac{2x \cdot \cos \frac{A-B}{2} - 2y \cdot \sin \frac{A-B}{2}}{\phantom{=}} \\ & \phantom{=} = 8 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos^2 \frac{C}{2} \quad (1') \end{aligned}$$

da (1) mit (1') identisch ist, so ist der erste Satz bewiesen.

### Beweis zu Satz 2.

Der Kreis aus  $M^C$  durch  $\mathfrak{A}_3$  hat die Gleichung

$$\begin{aligned} \left(x - \cos \frac{A-B}{2}\right)^2 + y^2 &= \left(2 \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos^2 \frac{C}{2} - \cos \frac{A-B}{2}\right)^2 \\ &+ 4 \left(\cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

und der Kreis aus  $M_C$  durch  $\mathfrak{C}_3$

$$\begin{aligned} x^2 + \left(y - \sin \frac{A-B}{2}\right)^2 &= \left(2 \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \right. \\ & \left. - 2 \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2}\right)^2 \\ &+ \sin^2 \frac{A-B}{2} \left(1 - 2 \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

und daher hat die gemeinsame Sehne die Gleichung:

$$\begin{aligned}
 & - 2x \cdot \cos \frac{A-B}{2} + 2y \cdot \sin \frac{A-B}{2} = 4 \cos^2 \frac{A}{2} \cdot \cos^2 \frac{B}{2} \cdot \cos^2 \frac{C}{2} \\
 & \quad + 4 \cos^2 \frac{A}{2} \cdot \cos^2 \frac{B}{2} \cdot \cos^2 \frac{C}{2} \cdot \sin^2 \frac{C}{2} \\
 & \quad - 4 \cdot \cos^2 \frac{A}{2} \cdot \cos^2 \frac{B}{2} \\
 & \quad - 4 \cdot \cos^2 \frac{A}{2} \cdot \cos^2 \frac{B}{2} \cdot \sin^2 \frac{C}{2} \\
 & - 4 \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos^2 \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2} \\
 & \quad + 8 \cdot \cos^2 \frac{A}{2} \cdot \cos^2 \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2} \\
 & + 4 \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \cdot \sin^2 \frac{A-B}{2} \\
 & = - 8 \cos^2 \frac{A}{2} \cdot \cos^2 \frac{B}{2} \cdot \sin^2 \frac{C}{2} \\
 & \quad + 8 \cdot \cos^2 \frac{A}{2} \cdot \cos^2 \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2} \\
 & \quad - 4 \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos^2 \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2} \\
 & \quad + 4 \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \cdot \sin^2 \frac{A-B}{2} \\
 & = 8 \cos^2 \frac{A}{2} \cdot \cos^2 \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \left[ \cos \frac{A-B}{2} - \cos \frac{A+B}{2} \right] \\
 & \quad - 4 \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos^2 \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2} \\
 & \quad + 4 \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \cdot \sin^2 \frac{A-B}{2} \\
 & = 16 \cdot \cos^2 \frac{A}{2} \cdot \cos^2 \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \\
 & \quad - 4 \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos^2 \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2} \\
 & \quad + 4 \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \cdot \sin^2 \frac{A-B}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 8 \cdot \cos^2 \frac{A}{2} \cdot \cos^2 \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \\
 &\quad + 8 \cdot \cos^2 \frac{A}{2} \cdot \cos^2 \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \\
 &\quad + 4 \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \cdot \sin^2 \frac{A-B}{2} \\
 &\quad - 4 \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos^2 \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2} \\
 &= 4 \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \left[ \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \right. \\
 &\quad \left. + \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \right. \\
 &\quad \left. + \sin \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \right] \\
 &\quad + 8 \cos^2 \frac{A}{2} \cdot \cos^2 \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \\
 &\quad - 8 \cos^2 \frac{A}{2} \cdot \cos^2 \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \\
 &\quad - 4 \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos^2 \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2} \\
 &= 4 \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \left[ \sin \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} \right. \\
 &\quad \left. + \cos \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} \right] \\
 &\quad + 8 \cdot \cos^2 \frac{A}{2} \cdot \cos^2 \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \\
 &\quad - 8 \cos^2 \frac{A}{2} \cdot \cos^2 \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \\
 &\quad - 4 \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos^2 \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2} \\
 &= 4 \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \cdot \cos^2 \frac{C}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - 4 \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos^2 \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2} \\
 = & 4 \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos^2 \frac{C}{2} \left[ \cos \frac{A+B}{2} - \cos \frac{A-B}{2} \right] \\
 = & - 8 \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos^2 \frac{C}{2}
 \end{aligned}$$

und die Gleichung der gemeinsamen Sehne hat endlich die Gestalt:

$$\begin{aligned}
 \underline{2x \cdot \cos \frac{A-B}{2} - 2y \cdot \sin \frac{A-B}{2}} \\
 = \underline{8 \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos^2 \frac{C}{2}} \quad (2)
 \end{aligned}$$

Da dem Umkreis die Gleichung zukommt:

$$\left( x - \frac{1}{2} \cos \frac{A-B}{2} \right)^2 + \left( y - \frac{1}{2} \sin \frac{A-B}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}$$

so ist die Gleichung der gemeinsamen Sehne für die Kreise  $M^C$  und  $M$ :

$$\begin{aligned}
 - x \cdot \cos \frac{A-B}{2} + y \cdot \sin \frac{A-B}{2} &= 4 \cos^2 \frac{A}{2} \cdot \cos^2 \frac{B}{2} \cdot \cos^2 \frac{C}{2} \\
 & - 4 \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos^2 \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2} \\
 = 4 \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos^2 \frac{C}{2} & \left[ \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} - \cos \frac{A-B}{2} \right] \\
 = - 4 \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos^2 \frac{C}{2} & \quad \text{oder} \\
 \underline{2x \cdot \cos \frac{A-B}{2} - 2y \cdot \sin \frac{A-B}{2}} \\
 = \underline{8 \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos^2 \frac{C}{2}} \quad (2')
 \end{aligned}$$

Die Übereinstimmung von (2) und (2') beweist den 2. Satz:

### Folgerung aus (1) und (2).

Die Gleichungen (1) und (2) stimmen miteinander überein und da sie die gemeinsamen Sehnen von Kreissystemen be-

stimmen, die einen Kreis (nämlich den Umkreis) gemein haben, so sind diese beiden Kreissysteme identisch.

Die Punkte  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $\mathfrak{A}_3$  und  $\mathfrak{B}_3$  liegen auf einem Kreis mit Zentrum  $M^C$ .

**Beweis zu Satz 3.**

Der Kreis von  $M_C$  durch  $\mathfrak{A}_1$  hat die Gleichung

$$x^2 + \left( y - \sin \frac{A-B}{2} \right)^2 = 4 \cos^2 \frac{B}{2} \cdot \sin^2 \frac{A}{2} \cdot \sin^2 \frac{C}{2} \cdot \cos^2 \frac{C}{2} \\ + \left( \sin \frac{A-B}{2} - 2 \cos \frac{B}{2} \sin \frac{A}{2} \sin^2 \frac{C}{2} \right)^2$$

und der Kreis aus  $M^C$  durch  $\mathfrak{C}_1$ :

$$\left( x - \cos \frac{A-B}{2} \right)^2 + y^2 \\ = \cos^2 \frac{A-B}{2} \left( 1 - 2 \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} \cdot \sin \frac{A}{2} \right)^2 \\ + \left( 2 \cos \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{A}{2} - 2 \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{A-B}{2} \right)^2$$

die gemeinsame Sehne hat daher die Gleichung:

$$2x \cdot \cos \frac{A-B}{2} - 2y \cdot \sin \frac{A-B}{2} = 4 \cdot \cos^2 \frac{B}{2} \cdot \sin^2 \frac{A}{2} \cdot \sin^2 \frac{C}{2} \\ - 4 \cdot \cos^2 \frac{B}{2} \cdot \sin^2 \frac{A}{2} \\ - 4 \cdot \cos^2 \frac{B}{2} \cdot \sin^2 \frac{A}{2} \cdot \cos^2 \frac{C}{2} \\ - 4 \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \sin^2 \frac{C}{2} \cdot \sin \frac{A-B}{2} \\ + 4 \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \cos^2 \frac{A-B}{2} \\ + 8 \cdot \cos^2 \frac{B}{2} \cdot \sin^2 \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} \cdot \sin \frac{A-B}{2} \\ = - 8 \cdot \cos^2 \frac{B}{2} \cdot \sin^2 \frac{A}{2} \cdot \cos^2 \frac{C}{2}$$

$$\begin{aligned}
 & + 8 \cos^2 \frac{B}{2} \cdot \sin^2 \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} \cdot \sin \frac{A-B}{2} \\
 & - 4 \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \sin^2 \frac{C}{2} \cdot \sin \frac{A-B}{2} \\
 & + 4 \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \cos^2 \frac{A-B}{2} \\
 = & 8 \cdot \cos^2 \frac{B}{2} \cdot \sin^2 \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} \left( \sin \frac{A-B}{2} - \sin \frac{A+B}{2} \right) \\
 & - 4 \cdot \cos \frac{B}{2} \sin \frac{A}{2} \cdot \sin^2 \frac{C}{2} \cdot \sin \frac{A-B}{2} \\
 & + 4 \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \cos^2 \frac{A-B}{2} \\
 = & - 16 \cos^2 \frac{B}{2} \cdot \sin^2 \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \\
 & - 4 \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \sin^2 \frac{C}{2} \cdot \sin \frac{A-B}{2} \\
 & + 4 \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \cos^2 \frac{A-B}{2} \\
 = & - 8 \cdot \cos^2 \frac{B}{2} \cdot \sin^2 \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \\
 & - 8 \cdot \cos^2 \frac{B}{2} \cdot \sin^2 \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \\
 & + 4 \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \cos^2 \frac{A-B}{2} \\
 & - 4 \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \sin^2 \frac{C}{2} \cdot \sin \frac{A-B}{2} \\
 = & 4 \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} \cdot \sin \frac{A}{2} \left[ \cos^2 \frac{A}{2} \cdot \cos^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{A}{2} \cdot \sin^2 \frac{B}{2} \right. \\
 & \left. - \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} - \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \right] \\
 & - 8 \cdot \cos^2 \frac{B}{2} \cdot \sin^2 \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 8 \cos^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \\
 & \quad - 4 \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \sin^2 \frac{C}{2} \cdot \sin \frac{A-B}{2} \\
 = & 4 \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} \cdot \sin \frac{A}{2} \left[ \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \right. \\
 & \quad \left. - \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \right] \\
 & \quad - 4 \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \sin^2 \frac{C}{2} \cdot \sin \frac{A-B}{2} \\
 = & 4 \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \sin^2 \frac{C}{2} \\
 & \quad - 4 \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \sin^2 \frac{C}{2} \cdot \sin \frac{A-B}{2} \\
 = & 4 \cos \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \sin^2 \frac{C}{2} \left( \sin \frac{A+B}{2} - \sin \frac{A-B}{2} \right) \\
 = & 8 \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \sin^2 \frac{C}{2}
 \end{aligned}$$

und die Gleichung der gemeinsamen Sehne gewinnt daher die Gestalt:

$$\begin{aligned}
 & \underline{2x \cdot \cos \frac{A-B}{2} - 2y \cdot \sin \frac{A-B}{2}} \\
 & \quad = \underline{8 \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \sin^2 \frac{C}{2}} \quad (3)
 \end{aligned}$$

Mit dem Umkreis:

$$\left( x - \frac{1}{2} \cos \frac{A-B}{2} \right)^2 + \left( y - \frac{1}{2} \sin \frac{A-B}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}$$

bestimmt der Kreis aus  $M_c$  die gemeinsame Sehne von der Gleichung:

$$x \cos \frac{A-B}{2} - y \cdot \sin \frac{A-B}{2}$$



$$\begin{aligned}
 &= 4 \cdot \cos^2 \frac{B}{2} \cdot \sin^2 \frac{A}{2} \cdot \sin^2 \frac{C}{2} - 4 \cos \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \sin^2 \frac{C}{2} \cdot \sin \frac{A-B}{2} \\
 &= 4 \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \sin^2 \frac{C}{2} \left[ \sin \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} - \sin \frac{A-B}{2} \right] \\
 &= 4 \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \sin^2 \frac{C}{2} \quad \text{oder} \\
 &\quad \frac{2x \cdot \cos \frac{A-B}{2} - 2y \cdot \sin \frac{A-B}{2}}{\phantom{=}} \\
 &\quad = \underline{\underline{8 \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \sin^2 \frac{C}{2}}} \quad (3')
 \end{aligned}$$

Da (3) mit (3') übereinstimmt, so ist auch dieser Satz bewiesen.

Folgerung: Wenn wir in (3) und (3') rechter Hand A mit B vertauschen, so erhalten wir die Gleichung für die gemeinsamen Sehnen zwischen dem Umkreis und dem Kreise aus  $M_C$  durch  $\mathfrak{A}_2$  und  $\mathfrak{B}_2$  bzw. dem Kreise aus  $M^C$  durch  $\mathfrak{C}_2$ . Da hierbei (3) und (3') ungeändert bleiben, so heisst das:

Die Kreissysteme, welche aus den Ankreisen  $O_1$  und  $O_2$  (nach Satz 3) abgeleitet werden können, sind identisch; ferner:

Die Punkte  $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{A}_2$  und  $\mathfrak{B}_2$  liegen auf einem Kreis mit Zentrum  $M_C$ :

### Konstruktion der durch Satz (1) und (3) bestimmten gemeinsamen Sehnen.

$$\begin{aligned}
 x \cdot \cos \frac{A-B}{2} - y \cdot \sin \frac{A-B}{2} \\
 &= 4 \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos^2 \frac{C}{2} \\
 &= \sin A \cdot \sin B \cdot \frac{1 + \cos C}{2}
 \end{aligned}$$

ist die Gleichung der durch Satz (1) und (2) gegebenen gemeinsamen Sehnen. Ihr Abstand vom Koordinatenanfang ist daher:

$$\sin A \cdot \sin B \cdot \frac{1 + \cos C}{2}$$

$$\begin{aligned} x \cdot \cos \frac{A - B}{2} - y \cdot \sin \frac{A - B}{2} \\ = 4 \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \sin^2 \frac{C}{2} \end{aligned}$$

ist die Gleichung der durch den dritten Satz bestimmten gemeinsamen Sehne und da  $4 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \sin^2 \frac{C}{2}$

$$= \sin A \cdot \sin B \cdot \frac{1 - \cos C}{2}$$

so ist die Entfernung vom Koordinatenanfang

$$\sin A \cdot \sin B \cdot \frac{1 - \cos C}{2}$$

um daher die Teilpunkte dieser Sehnen auf der Höhe  $CH_3$  ( $H_3 =$  Höhenfusspunkt zu  $C$ ) zu bestimmen, bezeichne man die Mitte von  $AB$  mit  $M_3$ , ziehe  $M^C H_3$  und  $M_C C$  und verbinde ihren Schnittpunkt  $S$  mit  $M_3$ , so erhalten wir den einen Teilpunkt; zieht man aber  $M^C C$  und  $M_C H_3$  und verbindet ihren Schnittpunkt  $S^1$  mit  $M_3$ , so bekommt man den andern Teilpunkt.

Besonderer Fall: Im Falle von  $C = 90^\circ$  stimmen die Gleichungen (1) und (3) mit einander überein, d. h. die beiden aus der Ecke  $C$  abgeleiteten Kreissysteme fallen zusammen.

Durch die bewiesenen Sätze wird die eine Wurzel von quadratischen Gleichungen geometrisch zur Darstellung gebracht. Im folgenden soll auch die andere Wurzel geometrisch anschaulich gemacht werden. Um uns kürzer ausdrücken zu können, geben wir folgende

### Definitionen.

Die Ergänzung eines Berührungsradius (zu Kreis  $O, O_1, O_2$  oder  $O_3$ ) zum Strahle heissen wir Berührungsstrahl (mit  $O, O_1, O_2$  oder  $O_3$  zum Anfangspunkt). Die Ergänzung eines Berührungsstrahls zur Geraden heissen wir Ergänzungsstrahl. Den Punkt auf einem Berührungsstrahl im Abstände 1 vom Anfangspunkt bezeichnen wir als Einheitspunkt und den Punkt auf dem Ergänzungsstrahl im Abstand 1 vom Anfangspunkt Ergänzungs- punkt. Alsdann haben wir folgende Sätze:

**4. Satz:** Im ebenen Dreieck  $ABC$  treffen die innern und äussern Winkelhalbierenden ( $CM^C$  und  $CM_C$ ) eines Winkels ( $C$ ) den Umkreis (Zentrum  $M$ ) in 2 Punkten ( $M^C$  und  $M_C$ ), welchen die Eigenschaft zukommt, dass die Kreise aus  $M^C$  und  $M_C$  durch die zugehörigen Ergänzungspunkte ( $A_1'$  und  $B_1'$ ) des Inkreises bzw. durch seinen Ergänzungspunkt ( $C_1'$ ) an der dritten Seite sich im Umkreis schneiden.

**5. Satz:** Im Dreieck  $ABC$  treffen die innern und äussern Winkelhalbierenden ( $CM^C$  und  $CM_C$ ) eines Winkels ( $C$ ) den Umkreis in 2 Punkten ( $M^C$  und  $M_C$ ), welche durch die Eigenschaft ausgezeichnet sind, dass die Kreise aus  $M^C$  und  $M_C$  durch die zugehörigen Einheitspunkte ( $\mathfrak{A}_3'$  und  $\mathfrak{B}_3'$ ) des der Ecke  $C$  gegenüberliegenden Ankreises bzw. durch seinen Einheitspunkt ( $\mathfrak{C}_3'$ ) an der dritten Seite, sich im Umkreis schneiden.

**6. Satz:** Im Dreieck  $ABC$  treffen die äussern und innern Winkelhalbierenden ( $CM_C$  und  $CM^C$ ) eines Winkels ( $C$ ) den Umkreis in 2 Punkten ( $M_C$  und  $M^C$ ), welche die Eigenschaft zeigen, dass die Kreise aus  $M_C$  und  $M^C$  durch die zugehörigen Einheitspunkte ( $\mathfrak{A}_2'$  und  $\mathfrak{B}_2'$ ) des dem Winkel  $B$  gegenüberliegenden Ankreises bzw. durch seinen Einheitspunkt ( $\mathfrak{C}_2'$ ) an der dritten Seite, sich im Umkreis schneiden.

### Bestimmung der Koordinaten.

Seien  $A_1'$ ,  $B_1'$  und  $C_1'$  die Ergänzungspunkte des Inkreises,  $\mathfrak{A}_2'$ ,  $\mathfrak{B}_2'$ ,  $\mathfrak{C}_2'$  und  $\mathfrak{A}_3'$ ,  $\mathfrak{B}_3'$ ,  $\mathfrak{C}_3'$  die Einheitspunkte für die Ankreise  $O_2$  und  $O_3$ , so leiten sich aus der Figur 2 die Koordinaten ab, wie sie in der folgenden Tabelle zusammengestellt sind.

x	y
$A'_1$	$-\cos \frac{C}{2}$
$B'_1$	$\frac{C}{\cos \frac{C}{2}}$
$C'_1$	$\sin \frac{A-B}{2}$
$\mathfrak{A}'_2$	$-2 \cos \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} = \sin \frac{A-B}{2}$
$\mathfrak{B}'_2$	$\sin \frac{A-B}{2}$
$\mathfrak{C}'_2$	$-2 \cos \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} - \sin \frac{A-B}{2} = -\cos \frac{C}{2}$
$\mathfrak{A}'_3$	$\frac{C}{\cos \frac{C}{2}}$
$\mathfrak{B}'_3$	$-\cos \frac{C}{2}$
$\mathfrak{C}'_3$	$\sin \frac{A-B}{2}$

$$2 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} = \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\cos \frac{A-B}{2}$$

$$-\cos \frac{A-B}{2} + 2 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} = -\sin \frac{C}{2}$$

$$-\sin \frac{C}{2}$$

$$\sin \frac{C}{2}$$

$$\cos \frac{A-B}{2}$$

$$2 \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} - \sin \frac{C}{2} = \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\cos \frac{A-B}{2}$$

$$2 \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} - \cos \frac{A-B}{2} = \sin \frac{C}{2}$$

Hieran schliessen sich noch an die Koordinaten von M, M<sup>C</sup> und M<sub>C</sub>:

	x	y
M	$\frac{1}{2} \cdot \cos \frac{A - B}{2}$	$\frac{1}{2} \cdot \sin \frac{A - B}{2}$
M <sup>C</sup>	$\cos \frac{A - B}{2}$	0
M <sub>C</sub>	0	$\sin \frac{A - B}{2}$

**Beweis zu Satz 4.**

Der Kreis aus M<sup>C</sup> durch A<sub>1</sub>' hat die Gleichung:

$$\left(x - \cos \frac{A - B}{2}\right)^2 + y^2 = \cos^2 \frac{C}{2}$$

und derjenige aus M<sub>C</sub> durch C<sub>1</sub>' :

$$x^2 + \left(y - \sin \frac{A - B}{2}\right)^2 = \sin^2 \frac{C}{2}$$

Die Gleichung ihrer gemeinsamen Sehne lautet daher:

$$\begin{aligned} - 2x \cdot \cos \frac{A - B}{2} + 2y \cdot \sin \frac{A - B}{2} \\ = \cos^2 \frac{C}{2} - \sin^2 \frac{C}{2} - \cos^2 \frac{A - B}{2} + \sin^2 \frac{A - B}{2} \\ = \cos C - \cos(A - B) \quad \text{oder} \end{aligned}$$

$$- x \cdot \cos \frac{A - B}{2} + y \cdot \sin \frac{A - B}{2} = - \cos A \cdot \cos B \quad (4)$$

Der Umkreis aber hat zur Gleichung:

$$\left(x - \frac{1}{2} \cos \frac{A - B}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2} \sin \frac{A - B}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Seine gemeinsame Sehne mit dem Kreis aus  $M^C$  durch  $A_1'$  hat deshalb zur Gleichung:

$$\begin{aligned}
 - x \cdot \cos \frac{A-B}{2} + y \cdot \sin \frac{A-B}{2} & \\
 &= \cos^2 \frac{C}{2} - \cos^2 \frac{A-B}{2} \\
 &= \frac{1 + \cos C}{2} - \frac{1 + \cos(A-B)}{2} \quad \text{oder} \\
 - x \cdot \cos \frac{A-B}{2} + y \cdot \sin \frac{A-B}{2} &= -\cos A \cdot \cos B \quad (4')
 \end{aligned}$$

Die Übereinstimmung von (4) und (4') beweist den 4. Satz.

### Beweis zu Satz 5.

Der Kreis aus  $M_C$  durch  $\mathfrak{C}_3'$  hat zur Gleichung:

$$x^2 + \left( y - \sin \frac{A-B}{2} \right)^2 = \sin^2 \frac{C}{2}$$

und derjenige aus  $M^C$  durch  $\mathfrak{B}_3'$ :

$$\left( x - \cos \frac{A-B}{2} \right)^2 + y^2 = \cos^2 \frac{C}{2}$$

daher ist die Gleichung der gemeinsamen Sehne:

$$\begin{aligned}
 - 2x \cdot \cos \frac{A-B}{2} + 2y \cdot \sin \frac{A-B}{2} & \\
 &= \cos^2 \frac{C}{2} - \sin^2 \frac{C}{2} - \cos^2 \frac{A-B}{2} + \sin^2 \frac{A-B}{2} \\
 &= \cos C - \cos(A-B) \quad \text{oder} \\
 - x \cdot \cos \frac{A-B}{2} + y \cdot \sin \frac{A-B}{2} &= -\cos A \cdot \cos B \quad (5)
 \end{aligned}$$

Der Umkreis hat zur Gleichung:

$$\left( x - \frac{1}{2} \cos \frac{A-B}{2} \right)^2 + \left( y - \frac{1}{2} \sin \frac{A-B}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}$$

Seine gemeinsame Sehne mit dem Kreis aus  $M_C$  durch  $\mathfrak{C}_3'$  hat daher die Gleichung:

$$- x \cdot \cos \frac{A-B}{2} + y \cdot \sin \frac{A-B}{2} = \sin^2 \frac{A-B}{2} - \sin^2 \frac{C}{2}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1 - \cos(A - B)}{2} - \frac{1 - \cos C}{2} \\
 &= \frac{\cos C - \cos(A - B)}{2} \quad \text{oder} \\
 \underline{\underline{- x \cdot \cos \frac{A - B}{2} + y \cdot \sin \frac{A - B}{2} = - \cos A \cdot \cos B}} & \quad (5')
 \end{aligned}$$

Der Vergleich von (5) und (5') vollendet den Beweis zum 5. Satz.

Folgerung: Da die Gleichungen (4) und (5) miteinander übereinstimmen, so heisst das:

Die Kreissysteme von Satz (4) und (5) fallen zusammen.

### Beweis zu Satz 6.

Der Kreis aus  $M_C$  durch  $\mathfrak{A}'_2$  hat zur Gleichung:

$$x^2 + \left( y - \sin \frac{B - B}{2} \right)^2 = \sin^2 \frac{C}{2}$$

und derjenige aus  $M^C$  durch  $\mathfrak{C}'_2$ :

$$\underline{\underline{\left( x - \cos \frac{A - B}{2} \right)^2 + y^2 = \cos^2 \frac{C}{2}}}$$

und ihre gemeinsame Sehne bestimmt die Gleichung:

$$\begin{aligned}
 &- 2x \cdot \cos \frac{A - B}{2} + 2y \cdot \sin \frac{A - B}{2} \\
 &= \cos^2 \frac{C}{2} - \sin^2 \frac{C}{2} - \cos^2 \frac{A - B}{2} + \sin^2 \frac{A - B}{2} \\
 &= \cos C - \cos(A - B) \quad \text{oder} \\
 \underline{\underline{- x \cdot \cos \frac{A - B}{2} + y \cdot \sin \frac{A - B}{2} = - \cos A \cos B}} & \quad (6)
 \end{aligned}$$

Die Gleichung für den Umkreis ist wiederum:

$$\left( x - \frac{1}{2} \cos \frac{A - B}{2} \right)^2 + \left( y - \frac{1}{2} \sin \frac{A - B}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}$$

seine gemeinsame Sehne mit dem Kreis aus  $M_C$  durch  $\mathfrak{A}'_2$  hat daher zur Gleichung:

$$\begin{aligned}
 -x \cdot \cos \frac{A-B}{2} + y \cdot \sin \frac{A-B}{2} &= \sin^2 \frac{A-B}{2} - \sin^2 \frac{C}{2} \\
 &= \frac{1 - \cos(A-B)}{2} - \frac{1 - \cos C}{2} \quad \text{oder} \\
 -x \cdot \cos \frac{A-B}{2} + y \cdot \sin \frac{A-B}{2} &= -\cos A \cdot \cos B \quad (6')
 \end{aligned}$$

Folgerung: Wenn wir in (6) rechter Hand A mit B vertauschen, so bekommen wir die Gleichung der gemeinsamen Sehne zwischen den Kreisen  $M$ ,  $M_C$  (durch  $\mathfrak{A}'_1$ ) und  $M^C$  (durch  $\mathfrak{C}'_1$ ). Da hierbei (6) ungeändert bleibt, so heisst das:

Die Kreissysteme, welche nach Satz 6. aus den Kreisen  $O_1$  und  $O_2$  abgeleitet werden können, sind identisch.

Durch Vergleich von (5), (6) und (7) ergibt sich:

Die Kreissysteme der Sätze (5), (6) und (7) fallen zusammen.

### Konstruktion der gemeinsamen Sehne.

Die Gleichung derselben lautet für alle 3 Sätze:

$$\begin{aligned}
 -x \cos \frac{A-B}{2} + y \cdot \sin \frac{A-B}{2} &= -\cos A \cdot \cos B \quad \text{oder} \\
 x \cdot \cos \frac{B-A}{2} + y \cdot \sin \frac{B-A}{2} &= \cos A \cdot \cos B.
 \end{aligned}$$

Ihr Abstand vom Anfangspunkt C des Koordinatensystems ist somit:  $\cos A \cdot \cos B$ .

Daraus ergibt sich die Konstruktion weil

$$\begin{aligned}
 \cos A \cdot \cos B &= \sin A \cdot \sin B + \cos(A+B) \\
 &= \sin A \cdot \sin B - \cos C
 \end{aligned}$$

gleich ist die Höhe des Dreiecks ABC aus C vermindert bzw. vermehrt, um den doppelten Abstand des Umkreismittelpunktes von der Seite AB:

Man drehe die Seite AB im Umkreis um  $180^\circ$ , so fällt sie mit der gemeinsamen Sehne zusammen.

