Elementare Darlegung der Relativitätstheorie

Autor(en): **Gruner, P.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern**

Band (Jahr): **- (1910)**

Heft 1740-1769

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-319208

P. Gruner.

Elementare Darlegung der Relativitätstheorie.

Die Relativitätstheorie, wie sie von Herrn Einstein durchgeführt worden ist[1]), geniesst zur Zeit wohl allgemeine Anerkennung. Ihre Formeln lassen sich in verhältnismässig einfacher Weise herleiten, allein diese mathematische Deduktion ermöglicht es nicht, den Zusammenhang zwischen den auftretenden Grössen wirklich zu verstehen und einen Einblick in die paradoxen Resultate jener Theorie zu bekommen.

Die nachfolgenden Darlegungen sollen ein Versuch sein, durch ganz elementare Ueberlegungen, die Schritt für Schritt unserem Vorstellungsvermögen zugänglich sind, die Relativitätstheorie herzuleiten und dadurch ihr Verständnis auch dem Nichteingeweihten näher zu bringen. Freilich ist auch diese elementare Betrachtungsweise nicht ganz einfach; es liegt dies in der Natur der Sache selber, insofern es unserem Denkvermögen immer Schwierigkeiten macht, von allen absoluten Beziehungen ein für allemal abzusehen.[2])

Um an konkrete Verhältnisse anzuknüpfen, denken wir uns die Erde und den Mars von denkenden Wesen bewohnt, die im Stande sind, durch drahtlose Telegraphie sich genau zu verständigen, und die nun den Versuch machen, ihre Zeit- und Raummessungen übereinstimmend zu gestalten. Dabei soll allerdings vorausgesetzt werden, dass diese beiden Planeten vollständig isoliert im absolut leeren Raume sich bewegen, d. h.

[1]) A. Einstein. Ueber das Relativitätsprinzip und die aus demselben gezogenen Folgerungen. — Jahrbuch der Radioaktivität Band IV, p. 411. — 1907. S. auch: Einstein, Archives des sciences de Genève. 29, p. 5. 125. — 1910.

[2]) Um diese immer wiederkehrende Schwierigkeit erfolgreich zu bekämpfen, werden wir uns nicht scheuen, im Verlaufe unserer Darlegungen absichtlich gewisse Gedankenreihen zu wiederholen.

dass es keine Sonne und keine andern Gestirne überhaupt gebe, die für die Erde und für den Mars eine gemeinsame Orientierung ermöglichen würden.

Darin liegt bereits der erste Grundsatz der Relativitätstheorie, das Relativitätsprinzip ausgesprochen. Die Erdbewohner können nicht anders, als ihre sämtlichen Beobachtungen auf die als ruhend angenommene Erde beziehen, und wiederum bleibt den Marsbewohnern auch nichts anderes übrig, als ihre Messungen auf den als ruhend gedachten Mars zu beziehen. Philosophisch veranlagte Geister der Erde und des Mars werden natürlich vermuten, dass beide Planeten vielleicht ganz komplizierte Bahnen im leeren Raume vollführen; da aber keinerlei Anhaltspunkt besteht, um dieselben nachzuweisen, so sind die Astronomen der Erde und des Mars gezwungen, den Standpunkt des Relativitätsprinzips unbedingt festzuhalten: Jeder sieht seinen Planeten als „ruhend“ an und den andern als „bewegt“. — Nur solche Wesen, die ein besonderes Organ für das „absolute“ besässen, könnten die wirklichen, absoluten Bewegungen der beiden Planeten beurteilen. Wir werden solche Wesen, wenn wir ihrer zum näheren Verständnis der Erscheinungen bedürfen, kurzweg als Sonnenbewohner bezeichnen, ohne damit irgend etwas anderes über dieselben aussagen zu wollen.

Der zweite Grundsatz der Relativitätstheorie ist das Prinzip von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit. Alle Signalisierungen erfolgen durch Funkentelegraphie oder durch einfache Lichtzeichen; bekanntlich breiten sich diese beiden Erscheinungen mit der gleichen Geschwindigkeit im luftleeren Raume aus, wir nennen sie kurzweg die Lichtgeschwindigkeit. Im „absoluten“ Raum, für unsere Sonnenbewohner, ist selbstverständlich diese Lichtgeschwindigkeit eine unveränderliche Grösse. Erd- und Marsbewohner wissen aber nichts von ihren absoluten Bewegungen; jeder sieht seinen Planeten als ruhend an und ist deshalb überzeugt, dass seine Messungen ihm diese absolut unveränderliche Lichtgeschwindigkeit ergeben. Tatsächlich haben auch die allerfeinsten Versuche von Michelson u. a. dargetan, dass die Lichtausbreitung auf der Erde in keiner Weise von ihrer Bewegung um die Sonne beeinflussst wird. Es entspricht also den Tatsachen, wenn jeder Planetenbewohner voraussetzt, dass die von ihm ausgeführten Messungen überall den gleichen, richtigen, unveränderlichen Wert der Lichtgeschwindigkeit ergeben.

Vom Standpunkt des Sonnenbewohners ist diese Annahme falsch, vom Standpunkt des Erd- oder Marsbewohners muss sie gemacht werden. In diesem Konflikt liegen alle Paradoxieen der Relativitätstheorie enthalten — aber sie rühren nur daher, dass wir uns bei unseren Betrachtungen unbewusst immer auf den Standpunkt des Sonnenbewohners — d. h. eines „absoluten“ Wesens — stellen, anstatt den einzig möglichen Standpunkt eines Planetenbewohners einzuhalten.

I. Vergleichung der Zeit- und Längeneinheiten der Erde und des Mars.

Wie gestaltet sich nun die Vergleichung der Raum- und Zeitbestimmungen auf Mars und Erde unter Einhaltung der beiden obigen Grundsätze?

Erde und Mars kommen nach bestimmten Perioden in bestimmte gegenseitige Stellungen, die wir kurzweg als Konjunktionen bezeichnen wollen. Diese Konjunktionen werden als passende Momente auserlesen, um durch sorgfältig verabredete Beobachtungen sukzessive die gewünschten Vergleichungen auszuführen.

Da es hier nicht darauf ankommt, die wirklichen Verhältnisse zwischen Mars und Erde zu studieren, sondern nur an einem vorstellbaren Beispiel die Relativitätstheorie darzulegen, so treffen wir zwei Vereinfachungen:

a) Wir nehmen an, dass Mars und Erde in Form langgestreckter, geradliniger Gebilde, z. B. zweier sehr langer Eisenbahnzüge, die auf parallelen Geleisen aneinander vorbeisausen, darstellbar seien, so dass alle Längenmessungen nur in einer einzigen Richtung vorzunehmen sind.

b) Wir nehmen an, dass die Bahnen der beiden Planeten unmittelbar nebeneinander liegen, d. h. dass die eben erdachten Geleise dicht nebeneinander laufen, so dass zwei momentan gegenüberliegende Beobachter des Erdbahnzuges und des Marsbahnzuges auch wirklich momentan ihre Uhrangaben vergleichen können, ohne dass irgend ein Zeitverlust durch die endliche Lichtgeschwindigkeit bedingt wird.

1. Regulierung der Normaluhren. Auf jedem Planeten sei eine Zentralsternwarte (O auf der Erde, O′ auf dem Mars), mit Normaluhren von absoluter Präzision versehen. Da keinerlei Gestirne wahrzunehmen sind als nur Mars und

Erde, so müssen die beiden Normaluhren ganz konventionell reguliert werden. Sie werden zunächst bei einer ersten Konjunktion von O und O′ auf genau gleiche Zeit eingestellt; differiert die Zeitangabe bei der nächsten Konjunktion, so wird der Uhrgang passend modifiziert, und zwar so, dass hinfort bei jeder Konjunktion von O und O′ beide Normaluhren stets die gleiche Zeit, die mit Null bezeichnet werden möge, angeben: O zeigt Erdzeit $t_0 = 0$ und O′ zeigt dieselbe Marszeit $t'_0 = 0$ im Moment der Konjunktion von O und O′. Wir nennen dann diese beide Uhren vollständig gleich laufend, auch der Sonnenbewohner ist damit einverstanden, dass diese Uhren wirklich synchrone Zeitangaben liefern. Ein willkürlich gewählter Bruchteil der Zeit, die zwischen 2 Konjunktionen abläuft, wird dann als Zeiteinheit, als eine Sekunde, bezeichnet.

2. Ermittlung der Längeneinheit. Jeder Planetenbewohner fertigt seine Masstäbe nach einem ihm passenden Prinzip an. Es gilt nun diese Masstäbe zu vergleichen, resp. eine übereinstimmende Längeneinheit festzustellen. Da kein irdischer Gegenstand auf den Mars gelangen kann, noch umgekehrt, so ist eine direkte Eichung der Masstäbe unmöglich; auch trigonometrische Messungen und Vergleichungen setzen schon eine übereinstimmende Einheit voraus. Die einzige Möglichkeit der Vergleichung besteht in direkten Messungen der Lichtgeschwindigkeit, die ja überall denselben Wert haben muss; dieser sei mit c bezeichnet. Die Längeneinheit ist dann auf jedem Planeten so zu normieren, dass für jenes c derselbe konventionelle Zahlwert herauskommt; er wird auf 300,000 Einheiten pro eine Sekunde vereinbart; die dadurch definierte Längeneinheit heisst ein Kilometer. Z. B.: In grosser Entfernung der Zentralsternwarte O wird in einem Punkte A der Erde ein Spiegel aufgestellt (s. Fig. 1). Ein Lichtblitz, der zur Zeit t_0 von O ausgesandt wird, gelangt nach A, wird dort zurückgeworfen und kommt zu einer Zeit t_1 nach O zurück. Die Strecke O A muss dann a Kilometer lang sein, wobei sich $2\,a = c\,(t_1 - t_0)$ berechnet. Eine ähnliche Messung wird auf dem Mars vollführt. Die also bestimmten Masstäbe auf Mars und Erde werden als vollständig gleich lang bezeichnet, und auch der Sonnenbewohner ist damit einverstanden, dass beide Mass-

stäbe wirklich gleiche Länge besitzen. Natürlich werden alle Masstäbe auf Mars und Erde nach den resp. Normalmasstäben geeicht, und sind somit alle vollständig gleich lang.

3. Regulierung der Uhren auf jedem Planeten. Die Uhren sämtlicher Astronomen, die auf der Erde an den beabsichtigten Messungen sich beteiligen wollen, werden auf die Zentralsternwarte gebracht und dort untersucht und reguliert, bis sie mit unbedingter Präzision alle zusammen vollständig gleich laufen. Dann wird eine jede an die betreffende Beobachtungsstation gesendet. Es darf nicht von vorneherein vorausgesetzt werden, dass die Uhren infolge der Ortsveränderung auf der Erde keine Veränderung ihres Uhrganges erfahren! Eine solche Änderung wäre sehr wohl denkbar, und erst das Experiment kann darüber Auskunft geben, ob sie eintritt oder nicht. Dieses Experiment kann nur so ausgeführt werden, dass die Uhr an Ort und Stelle durch passende Lichtsignale oder event. drahtlose Telegraphensignale mit der Normaluhr der Zentralsternwarte verglichen wird, wobei die Zeit, die das Signal braucht, um von der Sternwarte bis zur betreffenden Station zu gelangen, genau in Rechnung gezogen werden muss. Da das Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit gilt, so ist diese Vergleichung sehr einfach.

Z. B. Ein Funkensignal gehe zur Zeit t_0 von der Sternwarte O aus und gelange zu einem Beobachter A, in der Entfernung OA=a (s. Fig. 1), in einem Moment, wo dessen Uhr die Zeit t anzeigt; es muss die Zeitdifferenz $t - t_0 = \frac{a}{c}$ sein; ist das der Fall, so hat die Uhr in A keine Aenderung infolge ihres Transportes erhalten, sie ist „vollständig gleichlaufend" mit der Normaluhr. Auf diese Weise, indem etwa die Normaluhr alle Sekunden Funkensignale aussendet, können die Uhren der ganzen Erde kontrolliert werden, derart, dass jede an ihrer Stelle als durchaus richtig laufend zu bezeichnen ist.

In ganz gleicher Weise werden sämtliche Uhren auf dem Mars von seiner Zentralsternwarte aus normiert, so dass sie alle miteinander und mit den Erduhren als „vollständig gleichlaufend“ angesehen werden dürfen. Dass diese Uhrvergleichungsmethode mit den Tatsachen in Uebereinstimmung steht und also die einzig richtige sein kann, ergibt sich aus dem Michelson'schen Experiment, wie wir dies ja schon einmal hervorgehoben haben.

4. Die „absoluten“ Zeitangaben. Gegen die eben besprochene Uhrregulierung erhebt nun der Sonnenbewohner energischen Protest; durch dieselbe werden die Uhren geradezu falsch eingestellt und laufen tatsächlich nicht mehr gleich. Für den Sonnenbewohner ist eben das Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit nicht auf die einzelnen Planeten übertragbar. Z. B.: Die Erde bewege sich gegenüber der Sonne in 1 Sekunde 30 Kilometer vorwärts in der Richtung von O nach A (s. Fig. 1). Sei a = 3000 km., geht das Signal in O um 12 Uhr ab, so rechnet der Erdbewohner, dass das Signal in A um 12 Uhr plus $^1/_{100}$ Sekunde eintreffe. Der Sonnenbewohner konstatiert dagegen, dass während diesem Hundertstel Sekunde der Punkt A sich mit der ganzen Erde noch um 300 Meter von der ursprünglichen Lage von O weiter entfernt hat; das Signal muss also ein Millionstel Sekunde später eintreffen! Diese Zeitdifferenz ist sehr klein, genügt aber, um den prinzipiellen Unterschied klar zu legen: Die Erdastronomen sind überzeugt, dass ihre Uhren vollständig gleich laufen, d. h. dass, wenn eine Erduhr an irgend einem Ort 12 Uhr zeigt, im wirklich gleichen Moment alle Erduhren 12 Uhr zeigen; die Sonnenbewohner dagegen konstatieren, dass eine Erduhr in 3000 km. Entfernung von jener Uhr im „wirklich gleichen“ Moment eine Millionstel Sekunde über 12 Uhr zeigt, eine andere Erduhr in 6000 km. Entfernung 2 Millionstel Sekunden über 12 Uhr angibt u. s. f. Und sollte die Erde noch andere Bewegungen im „absoluten“ Raume machen, so würden dadurch die Uhrangaben noch mehr differieren.

Analoge Differenzen finden die Sonnenbewohner bei den Angaben der Marsuhren, natürlich sind jene Differenzen numerisch verschieden von denen der Erduhren, da der Mars eine andere Bewegung im „absoluten“ Raume ausführt.

Das Resultat dieser Ueberlegungen lässt sich leicht in folgender Weise aussprechen:

Wenn 2 von einander entfernt liegende Erduhren, die vollständig gleich laufen, die gleiche Zeit angeben, so finden diese Zeitangaben nicht zu „wirklich gleicher" Zeit statt.

Wenn 2 von einander entfernt liegende Marsuhren, die vollständig gleich laufen, die gleiche Zeit angeben, so finden diese Zeitangaben nicht zu „wirklich gleicher" Zeit statt. — Hieraus folgt umgekehrt:

Wenn 2 Ereignisse zu „wirklich gleicher" Zeit an verschiedenen Stellen der Erde (oder des Mars) vor sich gehen, so geben die Erduhren (oder die Marsuhren) an den betreffenden Stellen verschiedene Zeiten an.

Und hieraus folgt nun selbstverständlich die grosse Paradoxie der Relativitätstheorie:

Wenn irgend zwei Punkte des Mars und der Erde im Moment, wo sie aneinander vorbeisausen, ihre „vollständig gleich laufenden" Uhren vergleichen, so zeigen dieselben nicht dieselbe Zeit!

Diese Paradoxie rührt aber nur daher, dass wir von „wirklich" gleichen Zeiten sprechen, was vom Standpunkt des Sonnenbewohners aus zulässig ist, was aber ein Hineinziehen des Begriffs des Absoluten in unser nur die Relativität verstehendes Denkvermögen ist. Der Erdbewohner für sich und der Marsbewohner für sich kommen in keinerlei logischen Widerspruch; es handelt sich für sie nur noch darum, wie sie ihre divergierenden Uhrangaben der „vollständig gleich laufenden" Uhren in gegenseitige Beziehung bringen wollen.

II. Ermittlung der Beziehungen zwischen den Angaben des Mars und denjenigen der Erde.

Diese Ermittlung geschieht durch eine Reihe einfacher Vergleichsbeobachtungen, die nach ganz bestimmten Vereinbarungen zwischen Erde und Mars durchgeführt werden.

Zur Veranschaulichung dienen die Figuren der beiliegenden Tafel, auf denen die Erde = ♁ immer durch eine starke Gerade, der Mars = ♂ durch eine darunter liegende, parallele, feine Gerade dargestellt ist. Der beigefügte Pfeil gibt an, welcher der beiden Planeten als in Richtung des Pfeiles sich bewegend angesehen wird, während der andere relativ zu ihm ruht. Die relative Geschwindigkeit wird mit v bezeichnet. Die Stationen der Planeten sind mit grossen Buchstaben bezeichnet, die Marsstationen sind stets mit einem Accent versehen; die Distanzen der Stationen von den Zentralsternwarten O, resp. O′, sind durch die entsprechenden kleinen Buchstaben bezeichnet. Die Zeitangaben der an den Stationen befindlichen „vollständig gleich laufenden" Uhren sind über dem Erdstrich (Erdzeiten, ohne Accent) und unter dem Marsstrich (Marszeiten, mit Accent) beigefügt.

Bei jeder Figur ist dasjenige momentane Zusammentreffen einer Erdstation und einer Marsstation, das für die betreffende Vergleichung von besonderer Bedeutung ist, durch einen senkrechten, vollen Querstrich zwischen den beiden Stationen markiert, es werde als „Hauptereignis" bezeichnet. Das Zusammentreffen anderer Stationen, bei gleicher Zeitangabe des „ruhenden" Planeten, das somit nicht zu „wirklich gleicher" Zeit wie das Hauptereignis eintrifft, sei als „Nebenereignis" bezeichnet und wird durch gestrichelte, schräge Querstriche angedeutet; diese Querstriche müssen schräg sein, da im Moment des Hauptereignisses die Punkte, die im Nebenereignis zusammentreffen werden, noch nicht in Wirklichkeit einander getroffen haben.

Der Gang der Beobachtungen wird nun folgender:

E r s t e   V e r e i n b a r u n g: Auf dem Mars werden in gleichen Entfernungen a′, links und rechts von der Zentralsternwarte O′, zwei dauernde Beobachtungsstationen A′ und B′ errichtet und ihre Uhren so hingestellt, dass ihre Angaben von der vorbeifahrenden Erde aus deutlich abgelesen werden können. Die Länge a′ km wird der Erde mitgeteilt.

E r s t e   B e o b a c h t u n g (Fig. 2—4): Auf der Erde sind in kleinen Intervallen auf weite Distanzen hin rechts und links von der Sternwarte Beobachter mit gleich laufenden Uhren aufgestellt und warten auf die bevorstehende Konjunktion. Sie haben Ordre, im Moment, da ihre Uhren die Zeit $t_0 = o$ zeigen, die gegenüberliegende Stelle des vorbeifahrenden Mars zu fixieren. Gemäss der früher erfolgten Regulierung der Normaluhren wird zur Zeit $t_0 = o$ der Erdnormaluhr in O gerade die Marsnormaluhr in O′ an ihr vorbeikommen und die Zeit $t'_0 = o$ zeigen (Fig. 2). Ferner werden zwei der aufgestellten Beobachter in A, resp. B bei ihren Zeitangaben $t_0 = o$ den Marsstationen A′, resp. B′ gegenüber sein (Fig. 3 und 4), sie lesen die gegenüberliegenden Marszeiten ab: ihre Ablesungen seien τ'_a resp. τ'_b (eine dieser Zeiten kann dabei sehr gut negativ sein, d. h. der Normalzeit t'_0 vorangehen). Endlich wird die Distanz der Beobachtungsstellen A und B von O gemessen, sie betrage: $OA = a$ km., $OB = b$ km.

E r s t e D i s k u s s i o n d e r B e o b a c h t u n g e n. Da alle Uhren gleichlaufend waren und alle Masstäbe gleich lang, so erwarteten die Erdastronomen, dass auch in A′ und B′ die Zeitangaben $t'_0 = o$ sein würden, und ferner, dass die Distanzen $a = b = a'$ alle gleich gefunden werden müssten. Nach dem früher besprochenen (wie auch durch einen blossen Blick auf die Figuren) ist ersichtlich, dass dies nicht der Fall sein kann. Wenn die Marsstation A′ an A vorbeigeht (Fig. 3), so gibt zwar die Erduhr in A die Zeit $t_0 = o$ an, aber in Wirklichkeit ist dieser Zeitpunkt etwas später, als der, zu welchem O′ in O angelangt ist. Die Marsuhr in A′ muss also eine andere Zeit als O′ zeigen, nämlich τ'_a. Dementsprechend kann auch die Distanz $AO = a$ nicht gleich gross sein, wie das ihr entsprechende a′. Analog verhält es sich mit τ'_b (Fig. 4).

Aus Symmetriegründen ist ersichtlich, dass $a = b$ sein muss, da $A'O' = O'B'$ ist und da der Mars mit gleichförmiger Geschwindigkeit sich an der Erde vorbeibewegt. Ebenso ist zu erwarten, dass die Zeiten τ'_a und τ'_b gleich gross, aber entgegengesetzt ausfallen müssen. Der Sicherheit halber soll dies noch durch eine besondere Versuchsreihe nachgewiesen werden.

E r s t e K o n s e q u e n z d e r B e o b a c h t u n g e n. Die sich entsprechenden Messungen a und a′ sind nicht gleich. Wir setzen $a = \mu a'$, da der Unterschied zwischen a und a′ jedenfalls mit wachsendem a′ zunehmen muss[1]; μ ist kleiner als 1 und wird sich später als Funktion der Relativgeschwindigkeit v berechnen lassen. Diese Beziehung wird für jedes a′ und für jede Erdzeit t gelten müssen und lässt sich aussprechen: Misst man die Entfernung zweier Marspunkte auf der Erde zu gleicher Erdzeit t, so ergibt sich eine Länge a, die verschieden ist von der auf dem Mars gemessenen Entfernung a′ derselben Punkte, nämlich $a = \mu . a'$. (1)

Zweite Feststellung. Der Erdbewohner berechnet sofort, dass zu einer Erdzeit $t = \frac{a}{v}$ die Marssternwarte O′ gegenüber B erscheinen muss und demnach auch die Marsstation A′ gegenüber O. Ebenso wird, aus Symmetriegründen, zu einer früheren Erdzeit $-t = -\frac{a}{v}$ die Marssternwarte O′ gegenüber A sich befinden und die Marsstation B′ gegenüber O (Fig. 5—8).

Zweite Beobachtung. Die Erdbeobachter in A und O werden angewiesen, bei Herannahen der nächsten Konjunktion, im Moment $-t = -\frac{a}{v}$, die Marsuhren in O′ und B′ abzulesen, ebenso sollen die Beobachter in B und O die Marsuhren in O′ und A′ zur Zeit $+t = +\frac{a}{v}$ ablesen. Sie finden:

Zur Erdzeit $t = -\frac{a}{v}$ zeigt O′ die Marszeit $-\vartheta'$ und B′ zeigt $-t'$ (Fig. 5, 6), zur Erdzeit $+t = +\frac{a}{v}$ zeigt O′ die Marszeit $+\vartheta'$ und A′ zeigt $+t'$ (Fig. 7, 8).

Zweite Diskussion der Beobachtungen. Dass die beiden Beobachtungsreihen zur Erdzeit $-t$ und $+t$ sich nur um das Vorzeichen unterscheiden, ist selbstverständlich. Aber warum zeigt z. B. O′ zur Erdzeit $+t$ die Marszeit ϑ' (Fig. 8) an? Als O′ in O war, stimmte die Marszeit mit der Erdzeit überein: $t_0 = t'_0 = 0$. Wenn O′ nach B gekommen ist, ist die Erdzeit t abgelaufen — warum soll dann in O′ eine

[1]) Von vorneherein wäre denkbar, dass zwischen a und a′ eine kompliziertere Beziehung bestünde; allein jede nicht lineare Beziehung würde sofort zu ganz abnormen Konsequenzen führen.

verschiedene Zeit ϑ' abgelaufen sein? Nach dem früher besprochenen (wie auch durch einen Blick auf die Figuren) ist dies ersichtlich: Wenn O' in B (Fig. 8) vorbeikommt, so ist die Erdzeit in B wohl t, aber im „wirklich gleichen" Zeitmoment ist in O eine andere Zeit; die „wirkliche Zeit", die abgelaufen ist, während O' von O nach B gelangte, ist also nicht t, die Marsuhr muss deshalb eine andere Zeit ϑ' angeben.

Natürlich ist dann auch die Marszeit in A' im Moment des Vorüberganges bei O (Fig. 7) auch nicht gleich t und auch nicht gleich ϑ', sondern gleich t'. Ganz entsprechend sind die Verhältnisse bei den Bestimmungen der Fig. 5—6.

Zweite Reihe von Konsequenzen. Die Angaben der Marsnormaluhr ϑ' differieren gegenüber den Angaben der „vollständig gleich laufenden" Erduhren t in dem Mass, als die erstere sich von der Erdnormaluhr entfernt. Wir setzen deshalb $\vartheta' = \varkappa\, t$; diese Beziehung muss für jede Zeit t und in jedem Erdpunkte gelten, sofern ϑ' sich auf die Angaben der Marsnormaluhr am betreffenden Erdpunkt bezieht; $\varkappa$ ist kleiner als 1 und wird sich später als Funktion der Relativgeschwindigkeit v berechnen lassen.

Es gilt somit: Vergleicht man irgendwo und irgendwann die Zeitangabe ϑ' der Marsnormaluhr mit der Zeitangabe t der ihr momentan gegenüberliegenden Erduhr, so differieren diese beiden Angaben, es ist $\vartheta' = \varkappa\, t$ (2). Nur im Moment der Konjunktion der Marssternwarte mit der Erdsternwarte stimmen die Uhrangaben: $t_0 = t'_0 = 0$.

Hieraus ist nun die Marszeit t' in A', im Moment wo A' sich bei O befindet (Fig. 7), leicht zu berechnen.

Zur Erdzeit $t_0 = 0$ war A' in A zur Marszeit τ'_a (Fig. 3).
Zur Erdzeit $t_0 = 0$ war O' in O zur Marszeit $t'_0 = 0$ (Fig. 2).
Zur Erdzeit $+ t$ ist A' in O zur Marszeit $+ t'$ (Fig. 7).
Zur Erdzeit $+ t$ ist O' in B zur Marszeit ϑ' (Fig. 8).
Also: A' geht von A nach O in der Marszeit $t' - \tau'_a$
O' geht von O nach B in der Marszeit $\vartheta' - 0$.
Da AO = OB, so muss sein:

$$t' - \tau'_a = \vartheta'$$

Dieselbe Berechnung für die Erdzeit $-t$, ergibt:

$$-t' - \tau'_b = -\vartheta'$$

Hieraus folgt: $\tau'_a + \tau'_b = 0$, d. h. die Zeitangaben der symmetrisch zu O' verteilten Marsstationen A' und B' differieren zur Erdzeit $t_0 = 0$ um gleiche, aber entgegengesetzter Beträge: $\tau_a = -\tau'_b = \tau'$ (3).

Dritte Vereinbarung. Es sind die letzten Beziehungen aufzusuchen und die Grösse τ' zu ermitteln.

Bei Herannahen der nächsten Konjunktion wird verabredet, dass die irdische Zentralsternwarte O im Moment $t_0 = 0$ ein kräftiges Funkensignal geben soll, das von allen Erd- und Marsstationen aufgenommen werden kann. Die Erdastronomen können leicht berechnen, welche Lage der Mars einnimmt, wenn das Signal einmal in A' und das andere Mal in B' eintrifft. Die Erdzeit, zu welcher es in A' eintrifft, sei t_1; zu dieser Erdzeit t_1 möge A' (Fig. 9) einem Erdpunkt D gegenüberliegen und O' einem Erdpunkt E. Es muss dann sein: $OD = c\,t_1$, $OE = v\,t_1$. Andrerseits ist gemäss der „ersten Konsequenz“ (1): $DE = \mu a' = a$, also berechnet sich aus $DE = DO + OE$:

$$t_1 = \frac{a}{c + v}.$$

Trifft das Signal zur Erdzeit t_2 in B' ein, so folgt ganz entsprechend (Fig. 11), wenn B' in F und O' in G beobachtet wird: $OF = c t_2$, $OG = v t_2$, $GF = \mu a' = a$:

$$t_2 = \frac{a}{c - v}.$$

Auf diese Weise lässt sich die Lage der Punkte E, D, F, G zum voraus berechnen, und es werden daselbst Beobachtungsstationen aufgestellt.

Dritte Beobachtungsreihe. Bei der eintretenden Konjunktion $t_0 = 0$ gibt die Erdsternwarte O (Fig. 2) das gewünschte Signal. Es langt an:

(Fig. 9) Links in D zur Erdzeit t_1 und gleichzeitig in A' zur Marszeit t'_1,

(Fig. 11) rechts in F zur Erdzeit t_2 und gleichzeitig in B' zur Marszeit t'_2.

Dabei beobachten die beiden andern Erdstationen folgendes:
(Fig. 10) Zur Erdzeit t_1 in E erscheint daselbst O′ mit der Marszeit ϑ'_1,
(Fig. 12) zur Erdzeit t_2 in G erscheint daselbst O′ mit der Marszeit ϑ'_2.

D r i t t e D i s k u s s i o n. Die divergierenden Zeitdifferenzen der Erduhren und Marsuhren sind nach dem früher Gesagten sofort verständlich und lassen sich sofort zur Berechnung anwenden.

D r i t t e R e i h e v o n K o n s e q u e n z e n.

a) Die Marszeiten im O′ stehen gemäss der „zweiten Konsequenz“ (2) in einfachen Beziehungen zu den entsprechenden Erdzeiten in E und G (Fig. 10 und 12):

$$\vartheta'_1 = \varkappa t_1 \text{ und } \vartheta'_2 = \varkappa t_2.$$

b) Die Marszeiten in A′ und B′ lassen sich aus ihren Zeitangaben $\tau'_a = -\tau'_b = \tau'$ zur Erdzeit $t_0 = 0$ und aus den Marszeiten ϑ'_1 und ϑ'_2 in O′ zur Erdzeit t_1 und t_2 in schon angegebener Weise berechnen; es sei dies hier noch einmal erwähnt:

Zur Erdzeit $t_0 = 0$ war A′ in A zur Marszeit $\tau'_a = \tau'$ (Fig. 3).

Zur Erdzeit $t_0 = 0$ war O′ in O zur Marszeit $t'_0 = 0$ (Fig. 2)

Zur Erdzeit $+ t_1$ ist A′ in D zur Marszeit t'_1 (Fig. 9);

Zur Erdzeit $+ t_1$ ist O′ in E zur Marszeit $\vartheta'_1 = \varkappa t_1$ (Fig. 10);

Also: A′ geht von A nach D in der Marszeit $t'_1 - \tau'$,
O′ geht von O nach E in der Marszeit $\vartheta'_1 - 0$,
da aber $AD = OE$, so ist $t'_1 - \tau' = \vartheta'_1$. Ebenso berechnet sich t'_2, so dass die Beziehungen folgen:

$$t'_1 = \tau' + \varkappa t_1$$
$$t'_2 = -\tau' + \varkappa t_2$$

c) D i e s e b e i d e n Z e i t e n t'_1 u n d t'_2 m ü s s e n a b e r e i n a n d e r g l e i c h s e i n. Das geht unmittelbar hervor, wenn der Verlauf der Erscheinungen einmal vom M a r s s t a n d p u n k t aus betrachtet wird, also unter der Voraussetzung, dass der Mars „ruhend“ sei und dass die Erde sich mit der Relativgeschwindigkeit v von rechts nach links am Mars vorbeibewege. Wenn O in O′ erscheint und in diesem Moment das Funkensignal abgeben wird, so hat die Marsnormaluhr die Zeit $t'_0 = 0$ (Fig. 2); das Signal pflanzt sich auf dem Mars nach beiden Seiten von O′ mit gleicher Geschwindigkeit c fort, unbekümmert um die gleichzeitig verlaufende Bewegung der Erde. Das Signal langt demnach in gleichen Entfernungen rechts und links von O′ immer zu gleicher Zeit an, also auch gleichzeitig in A′ und in B′, und zwar, da $A' O' = O' B' = a'$ ist, zur Zeit

$$t'_1 = t'_2 = \frac{a'}{c}.$$

Berechnung der Beziehungen.

a) Die gefundenen Resultate gestatten nun, die allgemeinen Beziehungen zwischen irgend welchen Zeit- und Raumangaben von Mars und Erde zu formulieren und durch die drei Grössen τ', μ und $\varkappa$ auszudrücken.

Sei F (Fig. 11 und 13) ein beliebiger Erdpunkt, dessen Abstand O F von O kurzweg mit x bezeichnet werde (x positiv im Sinne der relativen Marsbewegung $+v$). In einem beliebigen Moment, durch die Erdzeit t (dem t_2 der Fig. 11 entsprechend) fixiert, befinde sich ihm gegenüber ein Marspunkt B′, der die Marszeit t′ (dem t'_2 der Fig. 11 entsprechend) zeige; der Abstand O′ B′ werde mit x′ bezeichnet, er entspricht dem a′ unserer bisherigen Betrachtungen. Die Beziehung $t'_2 = -\tau' + \varkappa t_2$ lautet nun:

$$\text{(I.)}\quad t' = -\tau' + \varkappa t,$$

wo τ' die Marszeit in B′ zur Erdzeit $t_0 = 0$ angibt.

Andererseits ist gemäss den Berechnungen der dritten Vereinbarung: $t_2 = \frac{a}{c - v}$, also $ct_2 = a + vt_2$; hierin setze statt $t_2 : t$, ferner $ct_2 = O\,F = x$ (Fig. 11) und $a = \mu\, a' = \mu\, x'$, so folgt:

$$\text{(II.)}\quad x = \mu\, x' + vt.$$

b) Aus der dritten Reihe von Konsequenzen lässt sich aber sofort τ' berechen.

Es war dort: $t'_1 = \tau' + \varkappa t_1$, $t'_2 = -\tau' + \varkappa t_2$, ferner $t'_2 = t'_1 = \frac{a'}{c}$, endlich $t_1 = \frac{a}{c + v}$, $t_2 = \frac{a}{c - v}$ (Fig. 9 und 11), und aus (1): $a = \mu a'$. Somit

$$\tau' + \varkappa\, \mu \frac{a'}{c + v} = \frac{a'}{c}$$

$$-\tau' + \varkappa\mu \frac{a'}{c - v} = \frac{a'}{c}$$

Hieraus folgt durch einfache Elimination: $\tau' = + \frac{v}{c^2} a'$ oder allgemein, für $a' = x'$ (Fig. 13):

$$\tau' = + \frac{v}{c^2} x' \tag{4}$$

Somit $\tau'_a = + \frac{v}{c^2} a'$ (Fig. 3) und $\tau'_b = - \frac{v}{c^2} a'$ (Fig. 4).

c) Die letzte Berechnung der Grössen $\varkappa$ und μ ergibt sich nun durch vollständige Umkehrung der bisher besprochenen Messungen. Anstatt wie bisher vom Erdstandpunkt auszugehen, den Marsbewohnern passende Vorschriften zu geben und die betreffenden Marserscheinungen von der Erde aus zu beobachten und zu berechnen, sollen nun die Marsbewohner die ganz entsprechenden Beobachtungen an unsern Erduhren ausführen und in genau gleicher Weise diskutieren und berechnen. Das vorher Gesagte gilt ohne weiteres auch in diesem Fall; es sind nur die Bezeichnungen Mars und Erde zu vertauschen, und in den Figuren ist der obere Strich als Mars, der untere als Erde anzusehen; die Buchstaben mit Accent sind zunächst auf die Erde zu beziehen. Nur eines ändert sich: die Richtung der Geschwindigkeit v, die überall mit entgegengesetztem Zeichen einzuführen ist; denn vom Marsstandpunkt aus bewegt sich die Erde nach links, nicht nach rechts.

Die Konstanten $\varkappa$ und μ sind natürlich genau dieselben, da ihre Rolle durch Vertauschung des Standpunktes nicht geändert werden kann — sonst würde in ihnen irgend eine „absolute" Beziehung verborgen gewesen sein. Somit wird eine irdische Erdstrecke a′, die zu gleicher Marszeit mit der entsprechenden Marsstrecke a (Fig. 2) verglichen wird, von ihr verschieden sein, so dass $a = \mu a'$ (1). Ebenso wird eine Zeitangabe ϑ' der Erdnormaluhr verschieden von der ihr momentan gegenüberliegenden Marszeit t (Fig. 8) sein, so dass $\vartheta' = \varkappa t$ (2).

Alle bisher aufgestellten Beziehungen gelten also ohne weiteres, sofern nur $+v$ durch $-v$ ersetzt wird, wobei dann x und x' beide im gleichen Sinn als positiv gewählt werden, wie bisher.

Werden jetzt, in den also transformierten Formeln, die auf die Erde bezüglichen Grössen wieder ohne Accente und die auf den Mars bezüglichen Grössen mit Accenten bezeichet, so lauten die Beziehungen (1) und (2):

$$(1') \quad a' = \mu\, a$$

$$(2') \quad t = \varkappa\, \vartheta'$$

Ferner wird (3') $\tau = -\frac{v}{c^2}\, x$ und die allgemeinen Gleichungen (I) und (II) lauten (da überall v durch $-v$ ersetzt wird):

$$(I') \quad t = +\frac{v}{c^2}\, x + \varkappa\, t'$$

$$(II') \quad x' = \mu\, x - v\, t'.$$

Die Bedingung, dass diese Gleichungen ebenso zu Rechte bestehen, wie die primären,

$$(I) \quad t' = -\frac{v}{c^2}\, x' + \varkappa\, t$$

$$(II) \quad x = \mu\, x' + v\, t,$$

gestattet die Berechnung von $\varkappa$ und μ.

(I') und (II) ergeben: $t = +\mu \frac{v}{c^2}\, x' + \frac{v^2}{c^2}\, t + \varkappa\, t'$, also

$$\varkappa\, t' = -\mu \frac{v}{c^2}\, x' + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) t.$$

Durch Vergleich mit (I) folgt: $\mu = \varkappa$

$$\varkappa^2 = 1 - \frac{v^2}{c^2}.$$

Natürlich muss μ, also auch $\varkappa$, positiv sein. Setzt man

$$(III) \quad \mu = \varkappa = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{\beta}$$

so erhält man aus (I') (II), die bekannte Form der Einstein'schen Relationen:

$$t' = \beta\left(t - \frac{v}{c^2}\, x\right).$$

$$x' = \beta\, (x - v\, t).$$

III. Formeln und Resultate der Relativitätstheorie.

Das Ergebnis unserer Betrachtungen, das zu den bekannten Formeln der Einstein'schen Relativitätstheorie geführt hat, möge hier zusammengefasst werden.

Bewegen sich zwei Körper mit der Relativgeschwindigkeit v aneinander vorbei, sind O und O' zwei Punkte derselben, so gewählt, dass im Moment ihres Zusammentreffens die Uhrangaben beider Körper übereinstimmend die Zeit Null zeigen, sind ferner alle Uhren auf jedem Körper nach dem Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit reguliert, so zeigen zwei Punkte (Fig. 13) im Abstand x resp. x' von O resp. O' im Moment ihres Zusammentreffens verschiedene Zeiten, so dass

$$t' = \beta\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$

$$x' = \beta(x - vt)$$

oder umgekehrt:

$$t = \beta\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right)$$

$$x = \beta(x' + vt')$$

wo $$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}},$$

und wo x resp. x' im Sinne der Relativbewegung des Punktes O' gegen O positiv gezählt ist. Es ist also stets $\beta > 1$, und entsprechend μ und $\varkappa < 1$.

Daraus ergeben sich wieder rückwärts alle früher hergeleiteten Aussagen, wobei der Anschaulichkeit halber immer noch an das Beispiel von Mars und Erde angeknüpft werden soll.

1. Betrachtet man in 2 Erdpunkten mit den Koordinaten x_1 und x_2 zur selben Erdzeit t (also in «Wirklichkeit» zu verschiedenen Zeitmomenten) die gegenüberliegenden Marspunkte und lässt sich deren Koordinaten x'_1 und x'_2 mitteilen, so muss sein:

$$x'_1 = \beta(x_1 - vt) \qquad x'_2 = \beta(x_2 - vt), \text{ also}$$

$$x'_1 - x'_2 = \beta(x_1 - x_2).$$

Seien die Differenzen $x'_1 - x'_2 = a'$, $x_1 - x_2 = a$ bezeichnet, so folgt $a = \frac{1}{\beta} a' = \mu a'$, genau entsprechend der „Konsequenz" (1). — Umgekehrt, wenn in zwei Marspunkten x'_1 und x'_2 zur selben Marszeit t' die gegenüberliegenden Erdpunkte fixiert werden und deren Koordinaten x_1 und x_2 mitgeteilt werden, so folgt aus $x = \beta (x' + vt')$:

$$x_1 - x_2 = \beta (x'_1 - x'_2),$$

also $a' = \frac{1}{\beta} a = \mu a$, entsprechend der umgekehrten Beziehung (1'). — Somit gilt allgemein:

Misst man die Entfernung zweier Punkte des „bewegten" Körpers durch die Entfernung derjenigen zwei Punkte des „ruhenden" Körpers, die zu gleicher Uhrzeit des letzteren den zwei Punkten des ersteren gerade gegenüberliegen, so zeigt diese Messung einen βmal kleineren Wert, als die Messung auf dem „bewegten" Körper direkt ergibt — d. h. der bewegte Körper erscheint in seiner Bewegungsrichtung verkürzt.

Der bewegte Körper erscheint also, vom ruhenden aus gesehen, kontrahiert, ohne dass er in Wirklichkeit irgendwelche Änderung erfahren hätte. Die Erdkugel erscheint also den Marsbewohnern als abgeplattetes Rotationsellipsoid, und ebenso erscheint uns der Mars als ein solches Ellipsoid. Freilich ist diese Abplattung zu gering, um mit den feinsten Instrumenten gemessen werden zu können, sie beträgt nur $\beta = 1 + \frac{1}{2} 10^{-8}$, wenn $v = 30$ km/Sek. und $c = 300000$ km/Sek. gesetzt wird. Würden hingegen beide Körper mit der Lichtgeschwindigkeit relativ zu einander sich bewegen, so würde $\beta = \infty$, d. h. der Mars erschiene uns als platte Scheibe zusammengedrückt. Der Grund dazu ist leicht einzusehen: Wenn (Fig. 14) v stark zunimmt, so rücken die Erdpunkte A und B, die zu gleicher Erdzeit t den Marspunkten A' und B' (die etwa die Enden des Marsdurchmessers darstellen mögen) gegenüberliegen, immer näher zusammen. Es bewegt sich eben die Strecke A' B' so schnell, dass sie während der ganz kleinen „wirklichen" Zeitdifferenz, die zwischen zwei sehr nahe liegenden Erdpunkten besteht, wenn dieselben gleiche Erdzeit zeigen, in ihrer ganzen Länge vorbeischiessen kann. Wird die Lichtgeschwindigkeit erreicht, so fallen A und B ganz zusammen und die Strecke A′ B′ scheint auf Null zusammenzuschrumpfen. Vorstellbar ist diese enorme Geschwindigkeit natürlich nicht.

2. Betrachtet man in zwei Erdpunkten mit den Koordinaten x_1 und x_2 denselben Marspunkt mit seiner unveränderlichen Koordinate x', liest an seiner Uhr die Zeiten t'_1 und t'_2 ab und vergleicht sie mit den entsprechenden Erdzeiten t_1 und t_2, so muss sein:

$$t_1 = \beta\left(t'_1 + \frac{v}{c^2}x'\right) \qquad t_2 = \beta\left(t'_2 + \frac{v}{c^2}x\right), \text{ also}$$

$$t_2 - t_1 = \beta\,(t'_2 - t'_1)$$

Seien die Differenzen $t_2 - t_1 = t$, $t'_2 - t'_1 = \vartheta'$ bezeichnet, so folgt $\vartheta' = \frac{1}{\beta}\,t = \varkappa t$, genau entsprechend der „Konsequenz“ (2). Umgekehrt, wenn auf dem Mars die Zeitangaben derselben Erduhr mit der Marszeit verglichen werden, folgt (für dasselbe x):

$$t'_2 - t'_1 = \beta\,(t_2 - t_1)$$

also, entsprechend (2′): $t = \frac{1}{\beta}\,\vartheta' = \varkappa\,\vartheta'$. Es gilt allgemein:

Die Zeitdifferenz t, die an den Uhren zweier Punkte des ruhenden Körpers beim Durchgang ein und desselben Punktes des bewegten Körpers abgelesen wird, ist β mal grösser, als die entsprechende Zeitdifferenz, die an der Uhr dieses Punktes abgelesen wird, d. h. die Uhr des bewegten Körpers scheint langsamer zu gehen.

Von der Erde aus gesehen, *scheinen* alle Uhren des Mars beharrlich zu langsam zu gehen, sogar die Normaluhr, obgleich in Wirklichkeit alle gleichlaufend sind. Umgekehrt erscheint es dem Mars, als ob alle unsere irdischen Uhren, inklusive Normaluhr, zu langsam gehen würden; freilich ist auch diese Zeitdifferenz mit unsern Instrumenten nicht mehr kontrollierbar: pro 1 Sekunde geht die Uhr des andern Planeten um $\frac{1}{2}10^{-8}$ Sekunde zu langsam.

Würde aber der Mars mit Lichtgeschwindigkeit relativ zur Erde sich bewegen, so würden dessen Uhren absolut still stehend scheinen. Auch das ist nicht schwer zu verstehen. Der Marspunkt O' (Fig. 15) gehe mit enorm grosser Relativgeschwindigkeit v zur Marszeit ϑ_1, am Erdpunkt A mit der Erdzeit t_1 vorüber. O' braucht sich dann nur wenig zu bewegen, seine Marszeit mag nur unmerklich zunehmen zum Werte ϑ_2', so erscheint O' doch einem Erdpunkte B gegenüber, der sehr weit von A ist und dessen Erdzeit t_2 bei diesem Durchgange merklich grösser ist als t_1. Wird v zur Lichtgeschwindigkeit, so wird die Zeitdifferenz $\vartheta_2' - \vartheta_1'$ zu Null zusammenschrumpfen, und die Marsuhr scheint stille zu stehen, sie zeigt an allen Punkten der Erde stets dieselbe Zeit.

Eine weitere Durchführung der Konsequenzen der Relativitätstheorie ist hier nicht nötig; ist einmal der Grundgedanke derselben erfasst, so lassen sich dieselben durch einfache mathematische Deduktionen nach den Angaben Herrn Einsteins herleiten. Zum Schluss seien hier nur noch einige numerische Angaben angeführt.

Nehmen wir, um einen merklichen Einfluss der Relativitätsformeln zu erhalten, folgende grossen Zahlen an: v = 30 000 km./Sek., c = 300 000 km./Sek., a' = 30 000 km.

Es folgt dann, wenn Ausdrücke von der Grössenordnung 10^{-6} vernachlässigt werden:

$$\beta = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(1 - 10^{-4}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}10^{-4}$$

$$\mu = \varkappa = \frac{1}{\beta} = 1 - \frac{1}{2}10^{-4}$$

Hieraus ergibt sich (s. Fig. 2—12):

$$a' = 29\,998{,}5 \text{ km}, \quad \tau' = 10^{-3} \text{ Sek.}, \quad t = 10 - \frac{1}{2}10^{-3} \text{ Sek.},$$

$$\vartheta' = 10 \text{ Sek.}, \quad t' = 10 + 10^{-3} \text{ Sek.}; \text{ ferner}$$

$$t_1 = \frac{a}{c+v} = 10^{-1} - 10^{-3} + \frac{1}{2}10^{-5} \text{ Sek.}$$

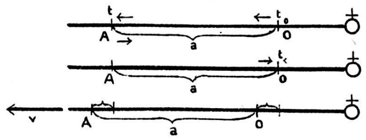

Fig. 1.

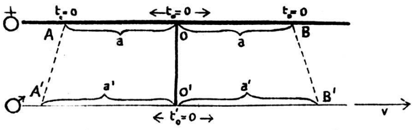

Fig. 2.

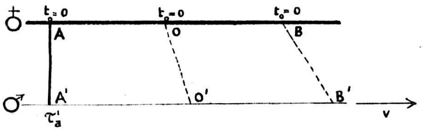

Fig. 3.

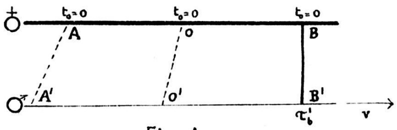

Fig. 4.

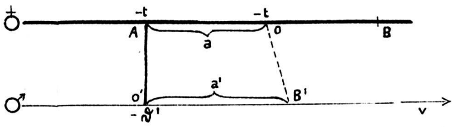

Fig. 5

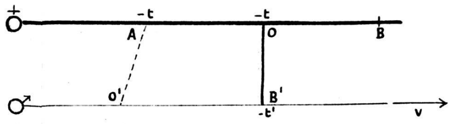

Fig. 6.

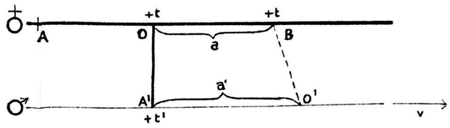

Fig. 7.

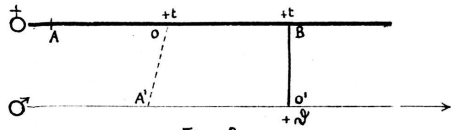

Fig. 8.

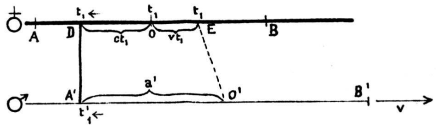

Fig. 9.

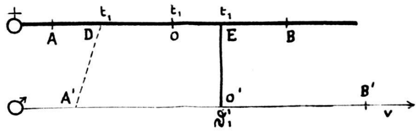

Fig. 10.

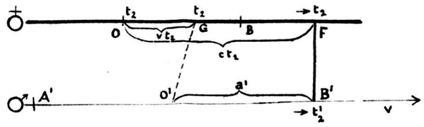

Fig. 11.

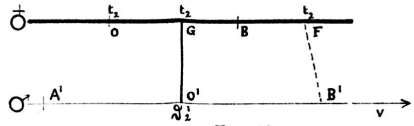

Fig. 12.

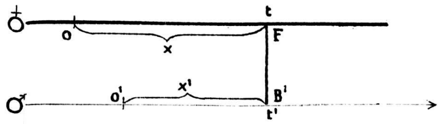

Fig. 13.

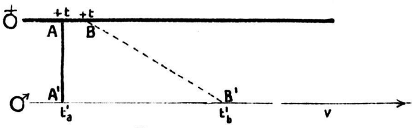

Fig. 14.

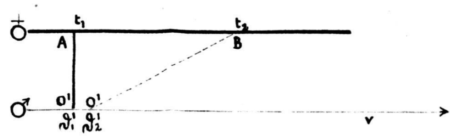

Fig. 15.

$$t_2 = \frac{a}{c-v} = 10^{-1} + 10^{-3} + \frac{1}{2}10^{-5} \text{ Sek.}$$

$$t'_1 = t'_2 = \frac{a'}{c} = 10^{-1} \text{ Sek.}, \ \vartheta'_1 = 10^{-1} - 10^{-3} \text{ Sek.},$$

$$\vartheta'_2 = 10^{-1} + 10^{-3} \text{ Sek.}$$

Also: Die auf dem Mars gemessene Strecke von 30000 km. erscheint auf der Erde nur 29998,5 km. lang. Zur Erdzeit $t_0 = 0$, wenn O′ in O die Zeit $t'_0 = 0$ zeigt, so zeigt der um 30000 km. nach links entfernte Punkt A′ (Fig. 3) die Marszeit $+ 1/1000$ Sek., der ebenso weit nach rechts liegende B′ zeigt $- 1/1000$ Sekunde. Ist an der Normaluhr der Erdsternwarte eine Zeit von 10 Sekunden weniger $1/2000$ Sekunde abgelaufen, so erscheint dort der Marspunkt A′ (Fig. 7), allein seine Uhr zeigt 10 Sekunden plus $1/1000$ Sekunde, dagegen die Normaluhr des Mars, die nun in B erscheint (Fig. 8), hat die Zeit von 10 Sekunden genau.

Das Funkensignal, das bei der nächsten Konjunktion zur Zeit $t_0 = 0$ in O abgegeben wird, erscheint genau nach $1/10$ Sekunde Marszeit in den rechts und links liegenden Marspunkten A′ und B′; allein die sich dort befindenden Punkte D und F der Erde zeigen andere Zeiten: der erstere $1/10$ Sekunde weniger $1/1000$ Sekunde, der andere $1/10$ Sekunde plus $1/1000$ Sekunde (wenn wir von den Hunderttausendstel Sekunden absehen).

B e r n, im Mai 1910.