

Die verschiedenen Flächenarten des Rotationsflächensystems

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern**

Band (Jahr): - **(1911)**

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Nun ist noch die Determinante Δ zu berechnen; nach Gleichung (1) wird sie

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 - k^2 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & \cdot & -s \\ 0 & \cdot & 1 - k^2 & \cdot & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & \cdot & 1 & \cdot & 0 \\ -s & \cdot & 0 & \cdot & 0 & \cdot & s^2 \end{vmatrix}$$

oder ausgerechnet

$$\Delta = s^2 (1 - k^2)^2 - s^2 (1 - k^2) = -s^2 k^2 (1 - k^2)$$

Nach der Transformation hat dann die Flächengleichung (1) die folgende Form:

$$f(x' y' z') = a_{11} x'^2 + a_{22} y'^2 + a_{33} z'^2 + 2 a_{12} x' y' + 2 a_{23} y' z' + 2 a_{13} x' z' + \frac{\Delta}{\delta} = 0$$

Setzt man die Werte der Koeffizienten, sowie diejenigen für Δ und δ ein, so folgt:

$$f(x' y' z') = (1 - k^2) x'^2 + (1 - k^2) y'^2 + z'^2 - \frac{s^2 k^2}{1 - k^2} = 0$$

oder

$$\frac{x'^2}{\frac{s^2 k^2}{(1 - k^2)^2}} + \frac{y'^2}{\frac{s^2 k^2}{(1 - k^2)^2}} + \frac{z'^2}{1 - k^2} = 1 \quad (2)$$

Der gesuchte Ort des Punktes P ist also eine Rotationsfläche zweiter Ordnung, deren Mittelpunkt auf der (x)-Achse im Abstand $x = \frac{s}{1 - k^2}$ von O liegt, und deren Rotationsachse parallel der (z)-Achse ist. Ihre Halbachsen sind

$$a = b = \frac{sk}{1 - k^2} \quad \text{und} \quad c = \frac{sk}{\sqrt{1 - k^2}}$$

§ 2.

Die verschiedenen Flächenarten des Rotationsflächensystems.

Die auf die Achsen transformierte Flächengleichung (2), die den Parameter k enthält, stellt eine Schar von unendlich vielen Rotationsflächen 2. Grades dar. Je nachdem nun $k \begin{matrix} \leq \\ \equiv \\ > \end{matrix} 1$ ist, hat

man es entweder mit einem Rotationsellipsoid, einem parabolischen Zylinder oder mit einem einschaligen Rotationshyperboloid zu tun. Dies soll in einem kurzen Abschnitt etwas ausgeführt werden.

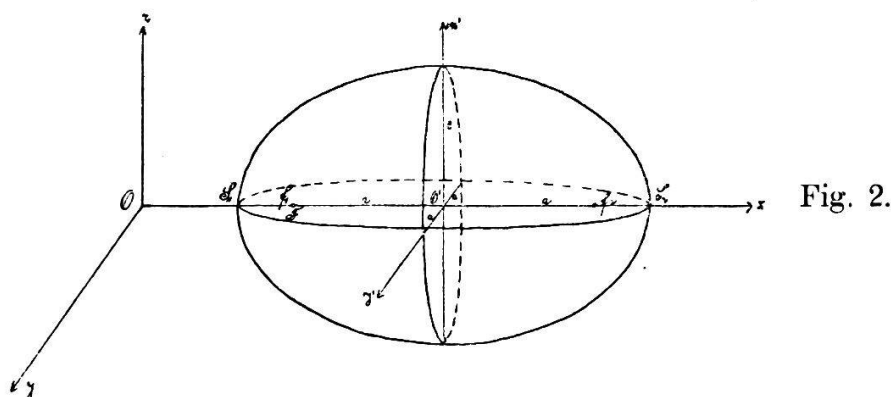
1. Fall: $k < 1$.

also $m < n$

In diesem Fall werden sämtliche Nenner der Flächengleichung (2) immer einen positiven Wert haben, und wir schreiben die Gleichung zur Abkürzung in der Form:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{a^2} + \frac{z'^2}{c^2} = 1 \quad (3)$$

Dies ist die Gleichung eines Rotationsellipsoides.



Die Halbachsen desselben sind $a = b = \frac{sk}{1 - k^2}$ und $c = \frac{sk}{\sqrt{1 - k^2}}$; a ist immer grösser als c . Die Rotationsachse der Fläche steht senkrecht auf der (xy) -Ebene, ihr Mittelpunkt liegt auf der (x) -Achse; sein Abstand vom Koordinatenursprung O beträgt $a_0 = \frac{s}{1 - k^2}$. Da k alle Werte zwischen 0 und 1 durchlaufen kann, so fällt O' je nach der Grösse des Parameters mit irgend einem Punkte der positiven (x) -Achse zwischen $+s$ und ∞ zusammen.

Nun ist $\frac{s}{1 - k^2} > \frac{sk}{1 - k^2}$ oder $a_0 > a$, d. h. der alte Koordinatenursprung O liegt ausserhalb der Fläche. (S. Fig. 2).

2. Fall: $k > 1$

also $m > n$

Dann nimmt die Gleichung (2) die Form an:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{a^2} - \frac{z'^2}{c^2} = 1 \quad (4)$$

und stellt ein einschaliges Rotationshyperboloid dar.

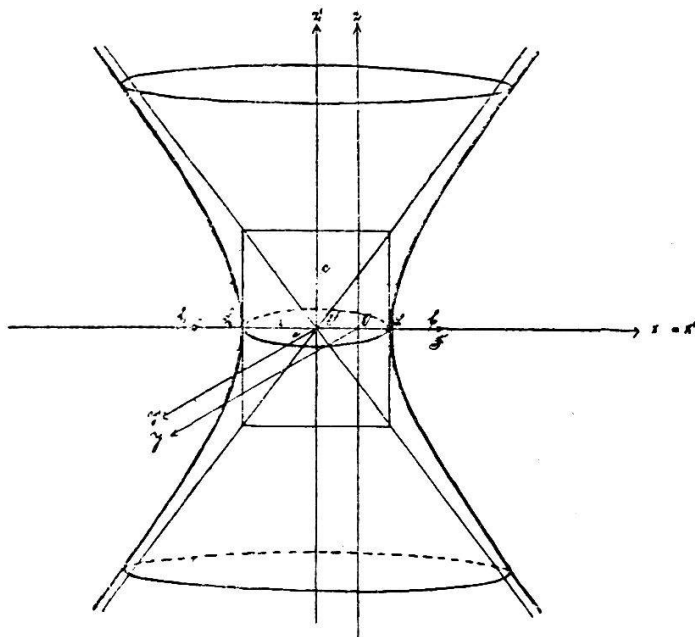


Fig. 3.

Die Rotationsachse steht senkrecht auf der (xy)-Ebene. Die (z')-Achse schneidet die Fläche nicht, die in ihr liegende imaginäre Halbachse hat die Länge $c = \frac{sk}{\sqrt{k^2 - 1}}$, die Länge der

Halbachse $a = b = \frac{sk}{k^2 - 1}$

wo $c > a$ wenn $k > \sqrt{2}$

$c = a$ „ $k = \sqrt{2}$

und $c < a$ „ $k < \sqrt{2}$

Der Abstand des Mittelpunktes O' vom Ursprung O beträgt

$a_0 = \frac{s}{1 - k^2} = -\frac{s}{k^2 - 1}$, er liegt auf der negativen (x)-Achse.

Ferner ist $\frac{sk}{1 - k^2} > \frac{s}{1 - k^2}$ oder $a > a_0$, d. h. der alte Koordinatenursprung O liegt also innerhalb der Rotationsfläche. (S. Fig. 3).

3. Fall: $k = 1$

also $m = n$

Setzt man in der Gleichung (1) für k den Wert 1 ein, so wird sie:

$$z^2 - 2sx + s^2 = 0 \quad (5)$$

Die Determinante δ wird in diesem Falle

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Der neue Mittelpunkt O' liegt daher im Unendlichen, und eine Transformation der obigen Gleichung auf den Mittelpunkt der Fläche ist nicht möglich. Wir substituieren für $z = z'$, $y = y'$ und $x = x' + \frac{s}{2}$.

Dann geht die Gleichung (5) über in

$$z'^2 = 2s x' \quad (6)$$

Dies ist nun die Scheiteltgleichung eines parabolischen Zylinders, dessen Erzeugende parallel der (y)-Achse sind. Der Halbparameter $p = s$, der Abstand des Scheitels S von der Leit-

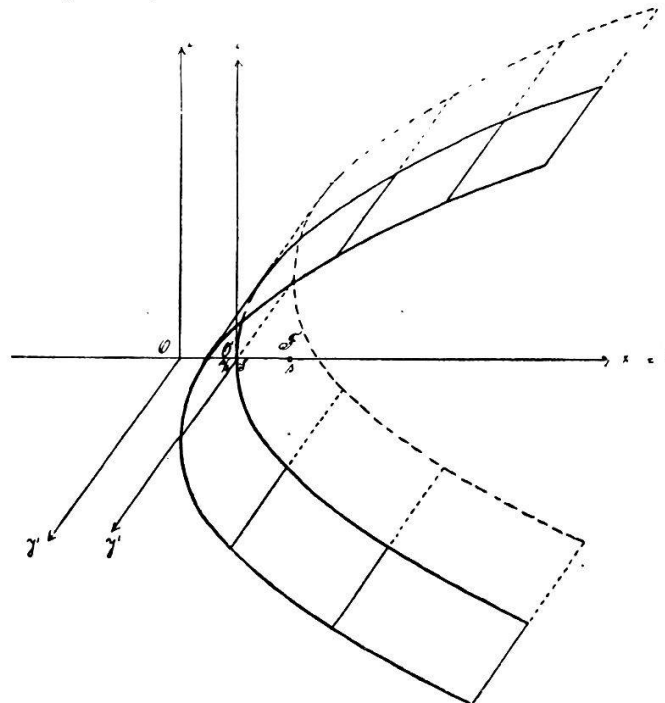


Fig. 4.

linie $= \frac{s}{2}$ und dieser ist gleich der Entfernung des neuen Koor-

dinatenursprunges O' vom alten O ; also ist die (z) -Achse die Leitlinie der Parabel in der (xz) -Ebene.

Ferner liegt der Scheitel S in der Mitte zwischen O und F , also ist F zugleich der Brennpunkt der Schnittparabel mit der (xz) -Ebene. Die Ebene $x = \frac{s}{2}$ ist Scheiteltangentialebene des parabolischen Cylinders. (S. Fig. 4).

§ 3.

Der Ort der Mittelpunkte, Scheitel und Brennpunkte des Rotationsflächensystems bei variablem k .

Nach § 1 liegt der Mittelpunkt O' der durch Gleichung (1) dargestellten Flächen 2. Grades immer auf der (x) -Achse; sein Abstand vom Nullpunkt $= a_0 = \frac{s}{1-k^2}$. Setzen wir für k nacheinander alle zwischen 0 und ∞ liegenden Werte ein, so ändert sich die Lage des Mittelpunktes O' folgenderweise:

k	a_0
0	s
1	$2s$
$\sqrt{2}$	$\pm \infty$
1	0
∞	0

Für den Parameterwert $k = 0$ befindet sich der Flächenmittelpunkt O' im Punkte F ; bei wachsendem k bewegt er sich auf der positiven (x) -Achse ins Unendliche, für $k = 1$ geht er im Unendlichen auf den negativen Teil der (x) -Achse über und nähert sich dann bei weiter zunehmendem k wieder dem Ursprung O , den er erreicht, wenn man k den Wert ∞ gibt. Alle Punkte der positiven und negativen (x) -Achse können für einen bestimmten Wert von k Mittelpunkt einer Fläche der Schar werden, ausgenommen diejenigen innerhalb der Strecke OF .

Wenn man zunächst vom Spezialfall $k = 1$ absieht, so stellt die Gleichung (1) für jeden beliebigen Parameter k eine Rotationsfläche 2. Ordnung dar, deren Rotationsachse senkrecht auf der (xy) -Ebene steht. Die Lage ihrer Scheitel in der (x) -Achse wird gefunden, wenn man in der Flächengleichung (1) $y = z = 0$ setzt. Dann erhält man die quadratische Gleichung

$$(1 - k^2)x^2 - 2sx + s^2 = 0.$$