# Der Hauptschnitt der Rotationsfläche parallel zur (yz)-Ebene bei variablem Parameter k

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern**

Band (Jahr): **- (1911)**

PDF erstellt am: **22.07.2024**

## § 6.

### Der Hauptschnitt der Rotationsfläche parallel zur (yz)-Ebene bei variablem Parameter k.

Ersetzen wir in der auf den Mittelpunkt transformierten Flächengleichung

$$(2.)\qquad \frac{x'^2}{\frac{s^2k^2}{(1-k^2)^2}} + \frac{y'^2}{\frac{s^2k^2}{(1-k^2)^2}} + \frac{z'^2}{\frac{s^2k^2}{1-k^2}} = 1$$

$x'$ durch o, so erhalten wir den Hauptschnitt der Fläche 2. Grades parallel zur (yz)-Ebene, nämlich

$$\frac{y'^2}{\frac{s^2k^2}{(1-k^2)^2}} + \frac{z'^2}{\frac{s^2k^2}{1-k^2}} = 1 \qquad (9)$$

Die Gleichung (9) stellt eine Ellipse oder eine Hyperbel dar, je nachdem $k \lessgtr 1$ ist; dies ist die Kurve, in welcher die durch Gleichung (1) gegebene Rotationsfläche die neue Koordinatenebene $(y'z')$ schneidet.

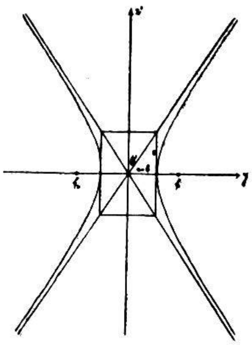

Fig. 9.

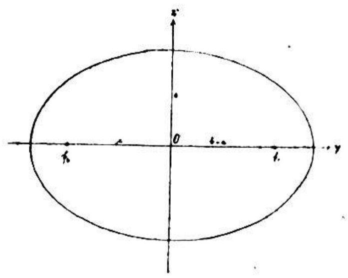

Fig. 9 a.

Die Halbachsen der Ellipse sind:

$$a = \frac{s\,k}{1-k^2} \quad \text{und} \quad c = \frac{s\,k}{\sqrt{1-k^2}} \quad \text{wo } c < a$$

Für alle Werte von k zwischen 0 und 1 sind die zur (yz)-Ebene parallelen Hauptschnitte der Rotationsflächen Ellipsen, deren grosse Achse in der (xy)-Ebene und deren kleinere Achse in der (xz)-Ebene liegt. Für $k = 0$ werden beide Achsen einander gleich, nämlich $a = c = o$, die Hauptschnittellipse reduziert sich auf einen Punkt, der im Abstand $x = +s$ vom Ursprung O auf der (x)-Achse liegt. Bei zunehmendem k entfernt sich der Mittelpunkt der Hauptschnittellipse auf der positiven (x)-Achse immer weiter vom alten Ursprung O und für $k = 1$ wird sein Abstand unendlich gross. Gleichzeitig wachsen auch die Ellipsenhalbachsen a und c an und werden zuletzt ebenfalls unendlich gross.

Für alle Parameterwerte $k > 1$ stellt die Gleichung (9) eine Hyperbel dar, deren reelle Halbachse $a = \frac{sk}{k^2 - 1}$ und deren imaginäre Halbachse $c = \frac{sk}{\sqrt{k^2 - 1}}$ ist. Dabei ist

$$
\begin{aligned}
c &> a, \text{ wenn } k > \sqrt{2} \\
c &= a, \text{ wenn } k = \sqrt{2} \\
c &< a, \text{ wenn } k < \sqrt{2}
\end{aligned}
$$

Die Asymptotengleichungen dieser Hyperbeln sind:

$$z' = \pm \frac{c}{a} y' \quad \text{oder} \quad z' = \pm \sqrt{k^2 - 1} \cdot y'$$

Den halben Asymptotenwinkel $\varphi$ erhält man aus der Formel: $\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{k^2 - 1}$. Für das Rotationshyperboloïd $k = 1$ befindet sich der zur (yz)-Ebene parallele Hauptschnitt im Abstand $x = -\infty$ vom Koordinatenursprung O; die Asymptoten der Schnitthyperbel in $-\infty$ haben die Gleichung $z' = 0$ (doppelt), und der halbe Asymptotenwinkel $\varphi$ wird $= 0$, d. h. die Asymptoten fallen zusammen in die $\infty$ ferne Gerade der (xy)-Ebene, und der Hauptschnitt selber geht in diese Gerade über. Wächst k, so sind die Asymptoten voneinander verschieden; durchläuft k alle Werte von 1 bis $\infty$, so nimmt der halbe Asymptotenwinkel $\varphi$ alle Werte von $0^0$ bis $90^0$ an, und für $k = \infty$ fallen die Asymptoten wieder zusammen, da $y' = \pm \frac{z}{\sqrt{k^2 - 1}} = 0$ wird; die Asymptoten des Hauptschnittes des Hyperboloïdes $k = \infty$, welches sich auf die (z)-Achse reduziert, werden von der (z)-Achse selber gebildet.

Alle Mittelpunkte der Hauptschnitthyperbeln parallel zur (yz)-Ebene der Rotationshyperboloïde befinden sich auf der negativen (x)-Achse. Ist der Abstand der Schnitthyperbel vom

Ursprung O $x=0$, so reduziert sich der Hauptschnitt auf die (z)-Achse; dies ist der Fall, wenn $k=\infty$ gross ist. Nimmt k endliche Werte an, die aber noch grösser sind als $\sqrt{2}$, so ist der halbe Asymptotenwinkel der Schnitthyperbel grösser als $45^0$ aber kleiner als $90^0$, und der Abstand der Schnitthyperbel vom Ursprung O beträgt absolut genommen weniger als $a_0 = \frac{s}{1-k^2} = \frac{s}{1-2} = -s$. Ist $k=\sqrt{2}$, so ist der Abstand $x=-s$ und der halbe Asymptotenwinkel $\varphi = 45^0$, der Hauptschnitt ist also eine gleichseitige Hyperbel. Ist $1<k<\sqrt{2}$, so kann der Abstand der Schnitthyperbel von der (y z)-Ebene alle Werte von $x=-s$ bis $x=-\infty$ durchlaufen, für $k=1$ wird er unendlich gross; der halbe Asymptotenwinkel $\varphi$ wird immer kleiner, und für $k=1$ ist er $\varphi=0$. Der Hauptschnitt im Abstand $x=-\infty$ reduziert sich auf die unendlich ferne Gerade der (x y)-Ebene.

Die Brennpunkte $f_1$ und $f_2$ aller Schnittkegelschnitte parallel zur (yz)-Ebene liegen in der (x y)-Ebene. Ihre Koordinaten im alten Koordinatensystem sind:

$$y = \sqrt{\frac{s^2k^2}{(1-k^2)^2} - \frac{s^2k^2}{1-k^2}} = \pm\frac{s\,k^2}{1-k^2} \quad \text{und nach } \S\, 1 \quad x = \frac{s}{1-k^2}$$

Eliminiert man aus diesen beiden Ausdrücken den veränderlichen Parameter k, so erhält man den geometrischen Ort der Brennpunkte aller dieser Schnittkegelschnitte durch die Gleichung

$$x \mp y = \pm s \qquad \text{oder zerlegt}$$

$$x - y = s \quad \text{und} \quad x + y = -s \tag{10}$$

Die Gleichungen (10) stellen zwei Gerade in der (xy)-Ebene dar, die symmetrisch zur (x)-Achse liegen, durch den Punkt F gehen und rechtwinklig aufeinanderstehen, also mit der (x)-Achse je einen Winkel von $45^0$ bilden. Auf diesen beiden Geraden $g_1$ und $g_2$ liegen alle Brennpunkte $f_1$ und $f_2$ der zur (y z)-Ebene parallelen Hauptschnitte der Rotationsflächen.

Durchläuft k alle Werte von 0 bis $\infty$, so gehen die zur (yz)-Ebene parallelen Hauptschnitte, die durch Gleichung (9) gegeben sind, successive in einander über und bilden eine neue Fläche. Ihre Gleichung erhält man durch Elimination des Parameters k aus der Gleichung (9.) und dem Ausdruck $a_0 = \frac{s}{1-k^2}$, welcher den Abstand der Ebene des Hauptschnittes vom Koordinatenursprung O darstellt. Als Resultat dieser Elimination ergibt sich die Gleichung:

$$s y'^2 + a_0 z'^2 + a_0 s (s - a_0) = 0.$$

In dieser Gleichung ist s eine Konstante; $a_0$ dagegen kann als laufende Koordinate betrachtet werden, da es bei veränderlichem k alle Werte der positiven und negativen (x)-Achse durchlaufen kann, ausgenommen diejenigen der Strecke OF. Substituiert man daher für $a_0 = x$, ersetzt ferner $y'$ wieder durch y und $z'$ durch z, so wird obige Gleichung:

$$x z^2 - s (x^2 - y^2) + s^2 x = 0. \qquad (11)$$

Durch sie ist der Ort aller Hauptschnitte parallel der (yz)-Ebene für sämtliche Rotationsflächen bestimmt. Sie stellt eine Fläche 3. Ordnung in den rechtwinkligen Koordinaten x, y, z dar, die symmetrisch liegt zu der (xy)- und (xz)-Ebene. Die Diskussion dieser Hauptschnittfläche 3. Grades erfolgt in § 12.

## § 7.
## Die Schnitte der Rotationsflächenschar mit einer Ebene durch die (x)-Achse.

Es werde durch die (x)-Achse unseres Koordinatensystems (xyz) eine Ebene gelegt, welche mit der (xy)-Ebene einen beliebigen Winkel $\varphi$ bildet; wir betrachten sie als neue Koordinatenebene $(x'y')$ und transformieren nun die Gleichung des betrachteten Rotationsflächensystems

$$(1.) \qquad (1-k^2)\, x^2 + (1-k^2) y^2 + z^2 - 2sx + s^2 = 0$$

auf das neue Koordinatensystem $(x'\, y'\, z')$. Dabei gelten folgende Transformationsformeln:

$$y = y' \cos \varphi - z' \sin \varphi$$
$$z = y' \sin \varphi + z' \cos \varphi$$
$$x = x'$$

Die Gleichung (1.) geht dann über in

$$(1 - k^2) x'^2 + (1 - k^2 \cos^2 \varphi)\, y'^2 + (1 - k^2 \sin^2 \varphi)\, z'^2$$
$$+ k^2 \sin 2\varphi \cdot y' z' - 2 s x' + s^2 = 0$$

Um die Gleichung der Schnittkurven des Rotationsflächensystems mit der $(x'\, y')$-Ebene zu erhalten, ist in der letzten Gleichung $z' = 0$ zu setzen, und wir erhalten als Gleichung des Schnittkurvensystems

$$(1-k^2) x'^2 + (1 - k^2 \cos^2 \varphi)\, y'^2 - 2 s x' + s^2 = 0 \qquad (12)$$