

Die Schnitte der Rotationsflächenschar mit einer Ebene durch die (x)-Achse

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern**

Band (Jahr): - **(1911)**

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

welcher den Abstand der Ebene des Hauptschnittes vom Koordinatenursprung O darstellt. Als Resultat dieser Elimination ergibt sich die Gleichung:

$$s y'^2 + a_0 z'^2 + a_0 s (s - a_0) = 0.$$

In dieser Gleichung ist s eine Konstante; a_0 dagegen kann als laufende Koordinate betrachtet werden, da es bei veränderlichem k alle Werte der positiven und negativen (x)-Achse durchlaufen kann, ausgenommen diejenigen der Strecke OF . Substituiert man daher für $a_0 = x$, ersetzt ferner y' wieder durch y und z' durch z , so wird obige Gleichung:

$$xz^2 - s(x^2 - y^2) + s^2 x = 0. \quad (11)$$

Durch sie ist der Ort aller Hauptschnitte parallel der (yz)-Ebene für sämtliche Rotationsflächen bestimmt. Sie stellt eine Fläche 3. Ordnung in den rechtwinkligen Koordinaten x, y, z dar, die symmetrisch liegt zu der (xy)- und (xz)-Ebene. Die Diskussion dieser Hauptschnittfläche 3. Grades erfolgt in § 12.

§ 7.

Die Schnitte der Rotationsflächenschar mit einer Ebene durch die (x)-Achse.

Es werde durch die (x)-Achse unseres Koordinatensystems (xyz) eine Ebene gelegt, welche mit der (xy)-Ebene einen beliebigen Winkel φ bildet; wir betrachten sie als neue Koordinatenebene ($x'y'$) und transformieren nun die Gleichung des betrachteten Rotationsflächensystems

$$(1.) \quad (1-k^2) x^2 + (1-k^2) y^2 + z^2 - 2sx + s^2 = 0$$

auf das neue Koordinatensystem ($x'y'z'$). Dabei gelten folgende Transformationsformeln:

$$\begin{aligned} y &= y' \cos \varphi - z' \sin \varphi \\ z &= y' \sin \varphi + z' \cos \varphi \\ x &= x' \end{aligned}$$

Die Gleichung (1.) geht dann über in

$$(1-k^2) x'^2 + (1-k^2 \cos^2 \varphi) y'^2 + (1-k^2 \sin^2 \varphi) z'^2 + k^2 \sin 2\varphi \cdot y' z' - 2s x' + s^2 = 0$$

Um die Gleichung der Schnittkurven des Rotationsflächensystems mit der ($x'y'$)-Ebene zu erhalten, ist in der letzten Gleichung $z' = 0$ zu setzen, und wir erhalten als Gleichung des Schnittkurvensystems

$$(1-k^2) x'^2 + (1-k^2 \cos^2 \varphi) y'^2 - 2s x' + s^2 = 0 \quad (12)$$

Dies ist eine Gleichung zweiten Grades, jede Ebene durch die (x)-Achse schneidet also das Rotationsflächensystem im allgemeinen in einem Kegelschnitt.

Die Gleichung (12) enthält zwei Parameter, nämlich k und φ . Wir wollen zunächst zwei Spezialfälle betrachten, indem wir vorerst $\varphi = 0$ und dann $\varphi = \frac{\pi}{2}$ wählen.

Für $\varphi = 0$ geht die Kegelschnittgleichung (12) über in

$$(1-k^2)x'^2 + (1-k^2)y'^2 - 2sx' + s^2 = 0$$

und wenn man diese Gleichung durch die Transformationsformeln $x' = x'' + \frac{s}{1-k^2}$ und $y' = y''$ auf die Normalform bringt, so erhält man die Kreisbüschelgleichung (8) in § 5. Diese stellt den Schnitt des Rotationsflächensystems mit der (xy)-Ebene dar (s. Fig. 7).

Setzt man für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ und wendet die vorigen Transformationsformeln an, so geht die Gleichung (12) über in die Gleichung (7) § 4, welche das Schnittkurvensystem der Rotationsflächen in der (xz)-Ebene darstellt (Fig 5).

Wir untersuchen nun das durch Gleichung (12) dargestellte Kegelschnittsystem für einen bestimmten, konstanten Winkel φ , der zwischen 0° und 90° liegt; der Parameter k dagegen soll alle Werte von Null bis ∞ durchlaufen.

Sollen vorerst die Asymptotenrichtungen der Kegelschnitte bestimmt werden, so muss man die Glieder 2. Grades gleich Null setzen, also

$$(1-k^2)x'^2 + (1-k^2 \cos^2 \varphi)y'^2 = 0 \quad \text{oder}$$

$$y' = \pm \sqrt{\frac{k^2-1}{1-k^2 \cos^2 \varphi}} \cdot x' \quad (\text{a})$$

Die Asymptoten der Kegelschnitte sind reell, wenn Zähler und Nenner dieser Wurzel entweder beide negativ oder beide positiv sind. Dies ist der Fall, wenn

$$\text{a) } k^2 < 1 \text{ und } k^2 \cos^2 \varphi > 1 \text{ oder}$$

$$k < 1 \text{ und } k > \frac{1}{\cos \varphi}$$

was unmöglich ist, da $\frac{1}{\cos \varphi}$ immer grösser als 1 ist.

b) wenn $k^2 > 1$ und $k^2 \cos^2 \varphi < 1$ oder

$$k > 1 \text{ und } k < \frac{1}{\cos \varphi}, \text{ also } \cos \varphi < \frac{1}{k}$$

Dieser letzte Fall ist möglich. Für Werte von k , die grösser als 1 aber kleiner als $\frac{1}{\cos \varphi}$ sind, besitzt der durch Gleichung (12) dargestellte Kegelschnitt reelle Asymptoten, die von einander verschieden sind; er ist also eine Hyperbel.

Ist $k = 1$, so fallen nach Gleichung (a) die beiden Asymptotenrichtungen in der Geraden $y' = 0$ zusammen. Der Kegelschnitt ist daher in diesem Fall eine Parabel von der Gleichung $\sin^2 \varphi \cdot y'^2 - 2 s x' + s^2 = 0$. Die (x') -Achse ist Parabelachse.

Wenn der Parameter k den Wert $k = \frac{1}{\cos \varphi}$ annimmt, so geht die Kegelschnittgleichung (12) über in

$$\left(1 - \frac{1}{\cos^2 \varphi}\right) x'^2 - 2 s x' + s^2 = 0.$$

Dies ist eine quadratische Gleichung in x' ; löst man sie auf, so zerfällt sie in die beiden Geradengleichungen

$$x_1' = \frac{s \cos \varphi}{1 + \cos \varphi} \text{ und } x_2' = -\frac{s \cos \varphi}{1 - \cos \varphi}$$

Für den Parameterwert $k = \frac{1}{\cos \varphi}$ besteht also die Schnittkurve

(12) aus zwei Parallelen zur (y') -Achse; ihre Abstände von derselben sind $x_1' = \frac{s \cos \varphi}{1 + \cos \varphi}$, bezüglich $x_2' = -\frac{s \cos \varphi}{1 - \cos \varphi}$.

Dieser Fall tritt dann ein, wenn die durch die (x) -Achse gelegte Schnittebene $(x' y')$ aus dem Rotationshyperboloïd zwei zur $(y z)$ -Ebene parallele Erzeugende herausschneidet. Da diese durch die auf der (x) -Achse liegenden Scheitel des Hyperboloïdes gehen, so muss ihr Abstand $= \frac{2 s k}{k^2 - 1}$ sein (s. Seite 121). Es besteht daher die Beziehung

$$\frac{s \cos \varphi}{1 + \cos \varphi} + \frac{s \cos \varphi}{1 - \cos \varphi} = \frac{2 s k}{k^2 - 1}$$

Löst man diese Gleichung nach k auf, so erhält man als positive, (einzig in Betracht fallende), Wurzel wieder $k = \frac{1}{\cos \varphi}$

Liegt der Wert von k nicht im Bereiche $1 < k < \frac{1}{\cos \varphi}$, ist also $k < 1$ oder $k > \frac{1}{\cos \varphi}$, so werden die Asymptotenrichtungen des Kegelschnittes nach Gleichung (a) imaginär, er ist also eine Ellipse. Fassen wir die bisherigen Ergebnisse zusammen, so folgt: Eine durch die (x)-Achse gelegte Ebene, welche mit der Koordinatenebene (x y) den Winkel φ einschliesst, schneidet alle Rotationsellipsoide des durch Gleichung (1) gegebenen Rotationsflächensystems in einer Ellipse, den parabolischen Cylinder $k = 1$ in einer Parabel, und die Rotationshyperboloide entweder in einer Ellipse, oder in zwei parallelen Geraden (Erzeugende des Hyperboloïdes), oder in einer Hyperbel, je nachdem $\cos \varphi \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} \frac{1}{k}$ ist.

Um die durch Gleichung (12) dargestellten Kegelschnitte genauer zu untersuchen, transformieren wir die Gleichung auf ihre Achsen, indem wir für $x' = x'' + \frac{s}{1-k^2}$ und für $y' = y''$ substituieren. Sie nimmt dann folgende Form an:

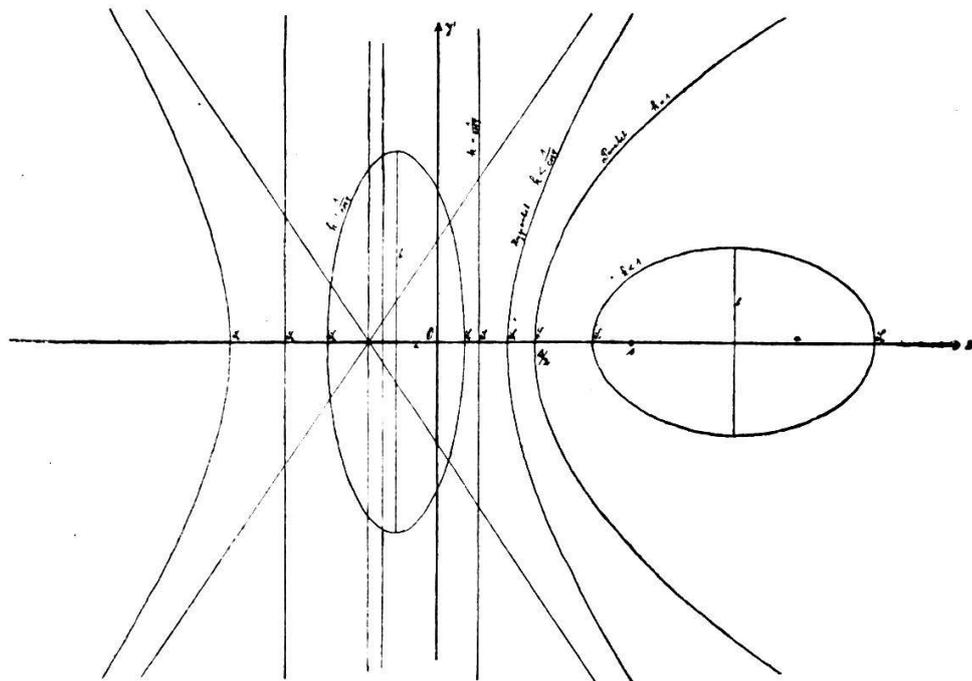


Fig. 10.

$$\frac{x''^2}{s^2 k^2 (1-k^2)^2} + \frac{y''^2}{s^2 k^2 (1-k^2)(1-k^2 \cos^2 \varphi)} = 1 \quad (b)$$

Der Mittelpunkt und die beiden in der (x)-Achse liegenden Scheitel jedes Kegelschnittes dieses Systems fallen mit denjenigen der entsprechenden Rotationsfläche zusammen, und die eine Achse des Kegelschnittes liegt immer in der (x)-Achse des alten Koordinatensystems.

Wir betrachten vorerst die Ellipsen, in welchen die Rotationsellipsoide $k < 1$ von der durch die (x)-Achse gelegten Ebene geschnitten werden. Der Abstand ihres Mittelpunktes vom Koordinatenursprung wird gegeben durch $a_0 = \frac{s}{1 - k^2}$. Wenn k von Null bis 1 wächst, so nimmt er alle Werte von $+s$ bis $+\infty$ an. Die Halbachsen der Ellipsen sind $a = \frac{sk}{1 - k^2}$ und

$$b = \frac{sk}{\sqrt{(1 - k^2)(1 - k^2 \cos^2 \varphi)}}, \text{ für } k = 0 \text{ reduziert sich die Ellipse}$$

auf einen Punkt, der mit F zusammenfällt; bei von 0 bis 1 wachsendem Parameter k nehmen beide zu von 0 bis ∞ , wobei a immer grösser als b ist. Der eine Scheitel S_1 bewegt sich bei zunehmendem k von $x_1' = s$ bis $x_2' = \frac{s}{2}$, der andere von $x_2' = +s$ bis $x_2' = +\infty$. Die lineare Excentricität dieser

$$\text{Ellipsen } e = \frac{sk^2 \sin \varphi}{(1 - k^2) \sqrt{1 - k^2 \cos^2 \varphi}} \text{ nimmt vom Werte 0 an zu}$$

$$\text{bis } \infty, \text{ die numerische dagegen } = \frac{e}{a} = \frac{k \sin \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \varphi}} \text{ von 0}$$

bis 1.

Um die Gleichung der Parabel zu finden, in welcher der parabolische Cylinder von der Ebene durch die (x)-Achse geschnitten wird, setzen wir in Gleichung (12) den Parameter $k = 1$

$$\text{ein und finden } y'^2 = \frac{2s}{\sin^2 \varphi} \left(x' - \frac{s}{2} \right) \quad (c)$$

Durch die Transformationsformeln $y' = y''$ und $x' = x'' + \frac{s}{2}$ geht die Gleichung (c.) in die Scheitelgleichung der Schnittparabel

$$\text{über, welche heisst } y''^2 = \frac{2s}{\sin^2 \varphi} x'' \quad (d)$$

Die (x)-Achse ist Parabelachse, ihr Scheitel befindet sich im Abstand $x' = \frac{s}{2}$ vom Koordinatenursprung. Der Halbparameter der Schnittparabel ist $p = \frac{s}{\sin^2 \varphi}$. Für veränderliches φ ist er variabel und kann alle Werte zwischen s und ∞ annehmen, d. h. je nach dem Winkel, den die Schnittebene ($x' y'$) mit der Koordinatenebene ($x y$) bildet, wird der Parameter grösser oder kleiner. Ein Minimum wird er, wenn $\varphi = 90^\circ$ ist, wenn also die Schnittebene auf der ($x y$)-Ebene senkrecht steht und die Erzeugenden des Cylinders rechtwinklig schneidet. In diesem Falle wird er $= s =$ dem Halbparameter der Schnittparabel in der ($x z$)-Ebene von der Gleichung $z'^2 = 2 s x'$ (Siehe Gleichung [6]). Je kleiner der Winkel φ wird, d. h. je mehr er sich vom rechten entfernt, desto grösser wird der Parameter. Fällt die Schnittebene mit der ($x y$)-Ebene zusammen, so ist $\varphi = 0$, also auch $\sin^2 \varphi = 0$, und der Halbparameter $p = \infty$; der parabolische Cylinder wird durch die ($x y$)-Ebene in der Geraden $x' = 0$, d. h. in der (y')-Achse und in der unendlich fernen Geraden dieser Ebene geschnitten.

Der Abstand des Brennpunktes vom Parabelscheiden $= f = \frac{s}{2 \sin^2 \varphi}$, kann also alle Werte zwischen $\frac{s}{2}$ und ∞ annehmen. Entsprechend verändert sich auch die Lage der Leitlinie; für $\varphi = 90^\circ$ wird sie gebildet durch die (z)-Achse im alten Koordinatensystem und entfernt sich für abnehmende Werte von φ bis nach $-\infty$.

Wir diskutieren nun das durch Gleichung (12) dargestellte Kegelschnittssystem für die Parameterwerte von $k = 1$ bis $k = \frac{1}{\cos \varphi}$, wo φ einen bestimmten, konstanten Wert besitzt. In diesem Fall ist die Schnittkurve eine Hyperbel, deren Achsengleichung nach Gleichung (b) geschrieben werden kann:

$$\frac{x''^2}{s^2 k^2} - \frac{y''^2}{s^2 k^2} = 1 \quad (e)$$

$$\frac{(k^2 - 1)^2}{(k^2 - 1)(1 - k^2 \cos^2 \varphi)}$$

Der Abstand des Hyperbelmittelpunktes vom Koordinatenursprung $= a_0 = -\frac{s}{k^2 - 1}$; für $k = 1$ liegt der Hyperbelmittelpunkt in

$-\infty$, wenn k zunimmt, so rückt er auf der negativen (x')-Achse ins Endliche und für $k = \frac{1}{\cos \varphi}$ beträgt sein Abstand vom Nullpunkt $x' = -s \cotg^2 \varphi$. Der Abstand des Hyperbelscheitels S_1 wird bestimmt aus $x'_1 = \frac{s}{1+k}$; nimmt k alle Werte von 1 bis $\frac{1}{\cos \varphi}$ an, so bewegt sich der Scheitel S_1 auf der (x')-Achse von $x' = \frac{s}{2}$ bis $x' = \frac{s \cos \varphi}{1 + \cos \varphi}$. Der Scheitel S_2 liegt im Abstand $x' = -\frac{s}{k-1}$ vom Nullpunkt; für die obigen Parameterwerte durchläuft er den negativen Teil der (x')-Achse von $x' = -\infty$ bis $x' = -\frac{s \cos \varphi}{1 - \cos \varphi}$. Die reelle Halbachse der Hyperbel $= a = \frac{s k}{k^2 - 1}$, die imaginäre $= b = \frac{s k}{\sqrt{(k^2 - 1)(1 - k^2 \cos^2 \varphi)}}$; für $k=1$ wird $a = b = \infty$ und für $k = \frac{1}{\cos \varphi}$ wird $a = \frac{s \cos \varphi}{\sin^2 \varphi}$ und $b = \infty$. Für alle Hyperbeln der Schar ist $b > a$.

Im Grenzfall $k = \frac{1}{\cos \varphi}$ besteht die Schnitthyperbel, deren Mittelpunkt in $x' = -s \cotg^2 \varphi$ liegt, aus zwei parallelen Geraden von den Gleichungen

$$x'_1 = \frac{s \cos \varphi}{1 + \cos \varphi} \quad \text{und} \quad x'_2 = -\frac{s \cos \varphi}{1 - \cos \varphi} \quad (f)$$

Dies ergibt sich auch daraus, dass die numerische Excentrizität der Hyperbel für $k = \frac{1}{\cos \varphi}$ unendlich gross wird.

Sind die Parameter k grösser als $\frac{1}{\cos \varphi}$, so stellt die Gleichung (12) des Schnittkurvensystems wieder eine Schar von Ellipsen dar. Ihre Achsengleichung lautet:

$$\frac{x''^2}{\frac{s^2 k^2}{(k^2 - 1)^2}} + \frac{y''^2}{\frac{s^2 k^2}{(k^2 - 1)(k^2 \cos^2 \varphi - 1)}} = 1 \quad (g)$$

Variiert man k von $\frac{1}{\cos \varphi}$ bis ∞ , so geht der Ellipsenmittelpunkt von $x' = -s \cotg^2 \varphi$ bis $x' = 0$. Für $k = \frac{1}{\cos \varphi}$ sind die Halbachsen $a = \frac{s \cos \varphi}{\sin^2 \varphi}$ und $b = \infty$. Bei zunehmendem k werden die Achsen beide kleiner und zwar so, dass a immer kleiner ist als b . Für $k = \infty$ reduziert sich die Ellipse auf einen Punkt, den Nullpunkt O des ursprünglichen Koordinatensystems. Die Scheitel S_1 und S_2 der Ellipse haben für $k = \frac{1}{\cos \varphi}$ die Abstände $x_1' = \frac{s \cos \varphi}{1 + \cos \varphi}$, bezüglich $x_2' = -\frac{s \cos \varphi}{1 - \cos \varphi}$ und nähern sich bei wachsendem k immer mehr dem Nullpunkt, bis sie für $k = \infty$ mit ihm zusammenfallen.

Zusammenstellung:

k	$a_0 = \frac{s}{1-k^2}$	Halbachsen		Scheitelabstände		e	$\frac{e}{a}$	Art der Kurve
		$a = \frac{sk}{1-k^2}$	$b = \frac{sk}{\sqrt{(1-k^2)(1-k^2 \cos^2 \varphi)}}$	x'_1	x'_2			
0	s	0	0	s	s	0	0	Punkt F
1	$\pm \infty$	∞	∞	$\frac{s}{2}$	$\pm \infty$	∞	1	Parabel
$\frac{1}{\cos \varphi}$	$-s \cotg^2 \varphi$	$\frac{s \cos \varphi}{\sin^2 \varphi}$	∞	$\frac{s \cos \varphi}{1 + \cos \varphi}$	$-\frac{s \cos \varphi}{1 - \cos \varphi}$	∞	∞	2 parallele Gerade
∞	0	0	0	0	0	0	0	Punkt O