

Kreispunkte der Flächenschar

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern**

Band (Jahr): - **(1911)**

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

eine Mal in der unendlich fernen Geraden dieser Ebene, das andere Mal in der Geraden $x = \frac{s}{2}$. Für $c = 0$ fallen beide Geraden zusammen mit der (z)-Achse des Koordinatensystems. Wenn $c > \frac{s}{2}$ ist, so wird die Schnittkurve imaginär, die Fläche 4. Grades liegt also ihrer ganzen Ausdehnung nach links von der Ebene $x = \frac{s}{2}$. In Bezug auf die Entstehungsweise der Fläche können wir nach dem Früheren noch schliessen, dass der im I. und VI. Oktanten liegende Teil derselben durch die Scheiteltkante S_1' erzeugt wird, der im II. und V. durch S_1 , der im IV. und VII. durch S_2 und der im III. und VIII. Oktanten liegende Teil durch die Scheiteltkante S_2' .

§ 9.

Kreispunkte der Flächenschar.

Die Achsengleichung der centrischen Flächen 2. Grades hat allgemein die Form:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Das Vorzeichen von b^2 und c^2 ist dabei noch unbestimmt gelassen. — Für jede Fläche, deren Gleichung diese Form hat, ist es möglich, zwei Systeme paralleler Schnittebenen so zu bestimmen, dass alle Schnittkurven Kreise sind. Die äussersten Ebenen der beiden Systeme sind Tangentialebenen der Fläche; sie schneiden diese in einem unendlich kleinen Kreise, in ihrem Berührungspunkte, und ein solcher Punkt heisst **Kreispunkt** oder **Umbilikus**. Jede centrische Fläche besitzt also im allgemeinen 4 reelle Kreispunkte; sie liegen in der (x z)-Ebene und haben die Koordinaten:

$$x = \pm \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}} \quad \text{und} \quad z = \pm c \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}$$

Unsere auf die Achsen transformierte Flächengleichung heisst nun:

$$(2.) \quad \frac{x'^2}{\frac{s^2 k^2}{(1-k^2)^2}} + \frac{y'^2}{\frac{s^2 k^2}{(1-k^2)^2}} + \frac{z'^2}{\frac{s^2 k^2}{1-k^2}} = 1$$

Da $a = b$ ist, so werden die Koordinaten der Kreispunkte:

$$x' = \pm 0 \quad \text{und} \quad z' = \pm \frac{sk}{\sqrt{1-k^2}}$$

Je zwei der Kreispunkte der durch Gleichung (2) dargestellten Rotationsellipsoide und -Hyperboloide fallen demnach in einen einzigen zusammen, so dass im ganzen nur zwei übrig bleiben; sie liegen symmetrisch zur $(x y)$ -Ebene und haben im alten System die Koordinaten:

$$x = a_0 = \frac{s}{1-k^2} \quad \text{und} \quad z = \pm \frac{sk}{\sqrt{1-k^2}}$$

Für jedes Rotationsellipsoid fallen die Kreispunkte zusammen mit den Endpunkten der Rotationsachse $2c$ und bei variablem Parameter k bewegen sie sich nach der in § 4 aufgestellten Parabelgleichung (b.). Für die Rotationshyperboloide wird die Ordinate der Kreispunkte

$$z = \pm \frac{sk}{\sqrt{1-k^2}} = \pm i \frac{sk}{\sqrt{k^2-1}} = \mp i \frac{sk}{\sqrt{k^2-1}} = \text{imaginär,}$$

d. h. es gibt auf den Rotationshyperboloiden keine Kreispunkte. Das System paralleler Schnittebenen, welches in der Fläche Kreise ausschneidet, ist parallel der $(x y)$ -Ebene und setzt sich nach beiden Richtungen bis ins Unendliche fort.

§ 10.

Polarebenen in Bezug auf das Rotationsflächensystem (1).

Soll die Polarebene eines beliebigen festen Punktes $P_0(x_0 y_0 z_0)$ in Bezug auf eine Fläche 2. Grades bestimmt werden, so wird deren Gleichung zunächst mit w homogen gemacht; Gleichung (1) geht also über in $(1-k^2)x^2 + (1-k^2)y^2 + z^2 - 2sxw + s^2w^2 = 0$, wo w die Bedeutung 1 hat. Die Gleichung der Polarebene wird dann nach der Formel bestimmt:

$$x \frac{\partial f}{\partial x_0} + y \frac{\partial f}{\partial y_0} + z \frac{\partial f}{\partial z_0} + w \frac{\partial f}{\partial w_0} = 0$$