

Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern
Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern
Band: - (1911)

Artikel: Diskussion eines Systems von Rotationsflächen 2. Grades
Autor: Meyer, Friedrich
Kapitel: 11: Ort der Schnittpunkte von drei sich rechtwinklig schneidenden Tangentialebenen für die verschiedenen Flächen des Rotationsflächensystems
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-319219>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 12.05.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

also ein hyperbolisches Paraboloid, wenn die Verbindungsgerade $P_1 P_2$ die (x)-Achse schneidet, zwei Ebenen, wenn sie entweder zur (z)- oder zur (y)-Achse parallel ist, in allen andern Fällen dagegen ein einschaliges Hyperboloid.

§ 11.

Ort der Schnittpunkte von drei sich rechtwinklig schneidenden Tangentialebenen für die verschiedenen Flächen des Rotationsflächensystems.

Die Achsengleichung einer beliebigen centriscen Fläche 2. Grades hat allgemein die Form $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Nun ist der Ort aller Punkte im Raum, von denen aus drei zueinander senkrecht stehende Tangentialebenen an eine solche Fläche gelegt werden können, eine mit der Fläche concentrische Kugel vom Radius $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Da die Halbachsen unserer Rotationsfläche $a = b = \frac{s k}{1 - k^2}$ und $c = \frac{s k}{\sqrt{1 - k^2}}$ sind, so ist der Radius der Kugel von obiger Beschaffenheit

$$R = \sqrt{\frac{2 s^2 k^2}{(1 - k^2)^2} + \frac{s^2 k^2}{1 - k^2}} = \frac{s k}{1 - k^2} \sqrt{3 - k^2} \quad (a)$$

Wir können aus diesem Wert für R bereits schliessen, dass nur für diejenigen Flächen des Rotationsflächensystems eine Kugel von der oben erwähnten Eigenschaft besteht, für welche $k < \sqrt{3}$ ist, also für alle Rotationsellipsoide und für die Rotationshyperboloide $k < \sqrt{3}$. Für jede dieser Flächen lässt sich die Gleichung einer Kugel bestimmen, deren sämtliche Flächenpunkte Schnittpunkte von je drei senkrecht aufeinander stehenden Tangentialebenen an die betreffende Fläche sind; diese Kugelgleichung lautet

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = \frac{s^2 k^2}{(1 - k^2)^2} (3 - k^2) \quad (17)$$

Um diese Gleichung auf das alte Coordinatensystem zu beziehen, haben wir in ihr $x' = x - \frac{s}{1 - k^2}$, $y' = y$ und $z' = z$ zu setzen; die Gleichung (17) geht dann über in

$$F(x y z k) = x^2 - \frac{2s}{1-k^2}x + y^2 + z^2 + \frac{s^2(k^4 - 3k^2 + 1)}{(1-k^2)^2} = 0 \quad (17 a)$$

Es soll nun die Enveloppe aller Kugeln bestimmt werden, die den unendlich vielen Flächen des Rotationsflächensystems entsprechen. Dies geschieht durch Elimination des Parameters k aus der Gleichung (17 a) und der folgenden;

$$\frac{\partial F}{\partial k} = (s - 2x)k^4 + 4xk^2 - 2x - s = 0$$

Wir bestimmen aus der letzten Gleichung die Wurzeln k^2 ; die eine wird $k_1^2 = 1$, die andere $k_2^2 = \frac{2x+s}{2x-s}$. Nur die letzte liefert ein brauchbares Resultat. Setzt man ihren Wert in Gleichung (17 a) ein, so geht sie über in

$$2x^2 + y^2 + z^2 - sx + \frac{5}{4}s^2 = 0$$

Dies ist die Gleichung eines imaginären Rotationsellipsoides. Wir finden also das Resultat, dass die durch Gleichung (17 a) gegebene Schar von Kugelflächen keine Enveloppe besitzt.

Der Mittelpunkt des obigen imaginären Ellipsoides liegt auf der (x)-Achse im Abstand $x = +\frac{s}{4}$ vom Nullpunkt. Seine Halbachse a hat die Länge $a = \frac{3}{4}s$, sie liegt in der (z)-Achse und ist Rotationsachse des Ellipsoides. Die beiden andern Halbachsen sind $b = c = \frac{3s}{\sqrt{8}}$

Die Mittelpunkte der Kugeln von der oben verlangten Beschaffenheit fallen immer mit denjenigen der entsprechenden Rotationsflächen zusammen; sie liegen also auf der (x)-Achse im Abstand $x = \frac{s}{1-k^2}$ vom Koordinatenursprung. Nun hat ein

Hauptschnitt der durch Gleichung (17) dargestellten Kugel parallel zur (y z)-Ebene des Coordinatensystems folgende Kreisgleichung:

$$y'^2 + z'^2 = \frac{s^2 k^2}{(1-k^2)^2} (3 - k^2) \quad (b)$$

Wenn wir nacheinander immer andere Rotationsflächen des Systems ins Auge fassen, so ändert sich der Radius dieses Kreises, und

sein Mittelpunkt rückt auf der (x)-Achse des Koordinatensystems vorwärts. Die aufeinander folgenden Kreise erzeugen so wieder eine Fläche, deren Gleichung sich durch Elimination des Parameters k aus der Kreisgleichung (b) und der Gleichung der Schnittebene $x = \frac{s}{1 - k^2}$ ergibt.

Sie wird, bezogen auf das ursprüngliche Koordinatensystem:

$$2x^2 - y^2 - z^2 - sx - s^2 = 0 \quad (18)$$

Dies ist die Gleichung einer Fläche 2. Grades; durch die Substitution $x = x' + \frac{s}{4}$, $y = y'$ und $z = z'$ erhält man die Achsengleichung

$$\frac{x'^2}{\frac{9}{16}s^2} - \frac{y'^2}{\frac{9}{8}s^2} - \frac{z'^2}{\frac{9}{8}s^2} = 1$$

Die obige Hauptschnittfläche ist also ein zweischaliges Rotationshyperboloïd. Die reelle Achse desselben liegt in der (x)-Achse des Koordinatensystems, sie ist Rotationsachse. Der Flächenmittelpunkt O' hat die Koordination $x = \frac{s}{4}$, $y = z = 0$, die reelle Halbachse $a = \frac{3}{4}s$. Der eine Schnittpunkt des Rotationshyperboloïdes mit der (x)-Achse befindet sich daher im Punkte $F(s, 0, 0)$ derselben, der andere im Abstand $x = -\frac{s}{2}$ vom alten Nullpunkt O . Die Schnittkurve des zweischaligen Hyperboloïdes mit der (x y)-Ebene ist eine Hyperbel; die Asymptoten derselben haben die Gleichungen $y' = \pm \frac{4}{\sqrt{8}}x'$, oder im alten Koordinatensystem $y = \pm \frac{4}{\sqrt{8}}(x - \frac{s}{4})$. Der Winkel φ , den die Asymptoten mit der (x)-Achse einschliessen, ist bestimmt durch $\operatorname{tg} \varphi = \frac{4}{\sqrt{8}}$, er ist also grösser als 45° .

Die Hauptschnittfläche (18) wird von der (x z)-Ebene ebenfalls in einer Hyperbel geschnitten; diese ist kongruent zu der Schnitthyperbel in der (x y)-Ebene.

Aus der Beschaffenheit der Fläche dieses zweischaligen Rotationshyperboloïdes sehen wir, dass die Centra der Kugel-
flächen mit allen Punkten der positiven und negativen (x)-Achse
zusammenfallen können, ausgenommen mit denjenigen der Strecke
von $x = -\frac{s}{2}$ bis $x = +s$. Demnach existiert für alle Flächen
des Rotationsflächensystems, deren Mittelpunkte entweder auf der
positiven (x)-Achse zwischen $x = +s$ und $x = +\infty$, oder auf
der negativen (x)-Achse zwischen $x = -\infty$ und $x = -\frac{s}{2}$ liegt,
eine Kugel, welche der oben geforderten Bedingung Genüge
leistet. Für diejenigen einschaligen Rotationshyperboloïde des
Flächensystems, deren Mittelpunkte zwischen $x = -\frac{s}{2}$ und $x = 0$
liegen, ist $k > \sqrt{3}$, und für sie lässt sich keine solche Kugel-
fläche finden.

Wir betrachten nun das Schnittkurvensystem, das durch
die unendlich vielen, durch Gleichung (17) bestimmten Kugel-
flächen in der (x y)-Ebene des alten Koordinatensystems erzeugt
wird, wenn der variable Parameter k alle Werte von $k = 0$ bis
 $k = \sqrt{3}$ durchläuft. Jede Kugel erzeugt als Schnittkurve einen
Kreis, dessen Centrum auf der (x)-Achse liegt; seine Gleichung
lautet $x'^2 + y'^2 = \frac{s^2 k^2}{(1 - k^2)^2} (3 - k^2)$. Wenn der Parameter k
alle Werte von $k = 0$ bis $k = 1$ annimmt, so durchläuft der
Kreismittelpunkt die positive (x)-Achse von $x = s$ bis $x = +\infty$,
und für die Parameterwerte von $k = 1$ bis $k = \sqrt{3}$ rückt das
Kreiscentrum auf der negativen (x)-Achse von $x = -\infty$ bis
 $x = -\frac{s}{2}$. Die Abstände x_1 und x_2 der auf der (x)-Achse liegenden
Kreisscheitel S_1 und S_2 sind:

$$x_1 = \frac{s}{1 - k^2} - \frac{s k}{1 - k^2} \sqrt{3 - k^2}, \quad \text{bezüglich}$$

$$x_2 = \frac{s}{1 - k^2} + \frac{s k}{1 - k^2} \sqrt{3 - k^2}$$

Ueber die Veränderung ihrer Lage bei veränderlichem Para-
meter gibt folgende Tabelle Aufschluss:

k	S_1	S_2
0	$x_1 = s$	$x_2 = s$
1	$x_1 = -\infty$	$x_2 = \infty$
$\sqrt{3}$	$x_1 = -\frac{s}{2}$	$x_2 = -\frac{s}{2}$

Für die Rotationsfläche $k=0$ reduziert sich der Schnittkreis, also auch die entsprechende Kugelfläche, auf den Punkt $F(s, 0, 0)$. Wenn k von 0 bis 1 wächst, so rücken die beiden Kreisscheitel ins Unendliche, S_1 in negativer, S_2 in positiver Richtung. Alle Rotationsflächen $0 < k < 1$ werden somit von der entsprechenden Kugelfläche vollständig eingeschlossen. Wenn k den Wert 1 überschreitet, so ändert sich die Bewegungsrichtung der beiden Kreisscheitel, sie rücken wieder ins Endliche, und für $k = \sqrt{3}$ fallen sie im Punkte $P\left(-\frac{s}{2}, 0, 0\right)$ zusammen. Auch für das Hyperboloïd $k = \sqrt{3}$ reduziert sich der Kreis, folglich auch die entsprechende Kugelfläche, auf einen Punkt der (x)-Achse.

§ 12.

Diskussion der Hauptschnittfläche 3. Grades.

Bei der Besprechung der Hauptschnitte des Rotationsflächensystems parallel zur (yz)-Ebene wurde gezeigt, dass sie in ihrer Aufeinanderfolge eine Fläche 3. Grades erzeugen, deren Gleichung nach § 6 lautet:

$$x z^2 - s(x^2 - y^2) + s^2 x = 0 \quad (11)$$

Im Folgenden soll nun diese Hauptschnittfläche diskutiert werden.

Um zunächst ihren Asymptoten- oder Richtungskegel zu bestimmen, machen wir Gleichung (11) mit w homogen; sie geht dann über in $x z^2 - s x^2 w + s y^2 w + s^2 w^2 = 0$. Da die unendlich ferne Ebene die Gleichung $w = 0$ hat, so findet man den Schnitt der Hauptschnittfläche mit ihr, indem man in der homogenen