k	S_1	S_2
0	$x_1 = s$	$x_2 = s$
1	$x_1 = -\infty$	$x_2 = \infty$
$\sqrt{3}$	$x_1 = -\frac{s}{2}$	$x_2 = -\frac{s}{2}$

Für die Rotationsfläche $k = 0$ reduziert sich der Schnittkreis, also auch die entsprechende Kugelfläche, auf den Punkt F (s, 0, 0). Wenn k von 0 bis 1 wächst, so rücken die beiden Kreisscheitel ins Unendliche, S_1 in negativer, S_2 in positiver Richtung. Alle Rotationsflächen $o < k < 1$ werden somit von der entsprechenden Kugelfläche vollständig eingeschlossen. Wenn k den Wert 1 überschreitet, so ändert sich die Bewegungsrichtung der beiden Kreisscheitel, sie rücken wieder ins Endliche, und für $k = \sqrt{3}$ fallen sie im Punkte $P\left(-\frac{s}{2}, 0, 0\right)$ zusammen. Auch für das Hyperboloïd $k = \sqrt{3}$ reduziert sich der Kreis, folglich auch die entsprechende Kugelfläche, auf einen Punkt der (x)-Achse.

§ 12.
Diskussion der Hauptschnittfläche 3. Grades.

Bei der Besprechung der Hauptschnitte des Rotationsflächensystems parallel zur (y z)-Ebene wurde gezeigt, dass sie in ihrer Aufeinanderfolge eine Fläche 3. Grades erzeugen, deren Gleichung nach § 6 lautet:

$$x z^2 - s(x^2 - y^2) + s^2 x = 0 \qquad (11)$$

Im Folgenden soll nun diese Hauptschnittfläche diskutiert werden.

Um zunächst ihren Asymptoten- oder Richtungskegel zu bestimmen, machen wir Gleichung (11) mit w homogen; sie geht dann über in $x z^2 - s x^2 w + s y^2 w + s^2 w^2 = 0$. Da die unendlich ferne Ebene die Gleichung $w = 0$ hat, so findet man den Schnitt der Hauptschnittfläche mit ihr, indem man in der homogenen

Flächengleichung $w = 0$ setzt; so erhält man einen Kegel 3. Grades von der Gleichung $x z^2 = 0$, welcher in die (y z)- und die doppelt gelegte (x y)-Ebene zerfällt, und der die unendlich ferne Ebene in derselben Kurve schneidet, wie die Hauptschnittfläche, nämlich in der unendlich fernen Geraden der (y z)-Ebene und in der doppelt gelegten unendlich fernen Geraden der (x y)-Ebene.

Ferner untersuchen wir die Schnittkurven der Hauptschnittfläche mit den Coordinatenebenen (x y) und (x z). Setzen wir in Gleichung (11) $z = 0$, so geht sie über in

$$x^2 - y^2 - s x = 0 \qquad \text{(a)}$$

Diese Gleichung (a) stellt eine gleichseitige Hyperbel dar, als Schnitt der Fläche 3. Ordnung mit der (x y)-Ebene; zum vollständigen Schnitt gehört noch die unendlich ferne Gerade der (x y)-Ebene. Die obige Hyperbelgleichung ist identisch mit Gleichung (a) in § 5; die (x)-Achse ist die eine Achse der Hyperbel; ihr Mittelpunkt hat die Coordinaten $x = \frac{s}{2}$ und $y = o$; die Halbachse ist $\frac{s}{2}$ (Fig. 8).

Um die Schnittkurve der Hauptschnittfläche mit der (x z)-Ebene zu finden, setzen wir in Gleichung (11) $y = 0$ und finden dann:

$$\text{(b)} \quad \begin{cases} 1) \quad x = 0, \text{ die (z)-Achse, und} \\ 2) \quad z^2 = s\,(x - s) \end{cases}$$

Die letzte Gleichung stellt eine rechts von der (z)-Achse liegende Parabel dar und ist identisch mit Gleichung (b) in § 4. (Siehe auch Figur 6). Diese Parabel ist die Kurve, in welcher der den Rotationsflächen $k < 1$, (also den Ellipsoïden), entsprechende Teil der Fläche 3. Ordnung die (x z)-Ebene schneidet. Ihre Achse ist die (x)-Achse; der Scheitel liegt im Punkte F und der Halbparameter $= \frac{s}{2}$. Für den Teil der Hauptschnittfläche 3. Grades, welcher den Hauptschnitten der Rotationshyperboloïde ($k > 1$) entspricht, erhalten wir als Schnittkurve in der (x z)-Ebene die (z)-Achse, auf welche sich das Rotationshyperboloïd für $k = \infty$ reduziert. Die (z)Achse liegt also ihrer ganzen Ausdehnung nach auf der Fläche 3. Grades.

Da in der Flächengleichung (11) das konstante Glied fehlt, so geht die Fläche durch den Nullpunkt und die Gleichung der Tangentialebene in ihm wird gegeben durch die gleich Null gesetzten Glieder ersten Grades; sie lautet: $x = 0$. Die (y z)-Ebene ist also Tangentialebene im Nullpunkt O, sie berührt die Fläche längs der ganzen (z)-Achse.

Auch der Punkt F liegt auf der Hauptschnittfläche, denn seine Coordinaten $x = + s$ und $y = z = 0$ genügen der Gleichung (11). Die Tangentialebene im Punkte F bestimmt man nach der Gleichung:

$$(x - x_1) f_1 + (y - y_1) f_2 + (z - z_2) f_3 = 0$$

wo $x_1\, y_1\, z_1$ die Coordinaten des Punktes F sind, also $x_1 = + s$ und $y_1 = z_1 = 0$, und wo

$$f_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1} = - s^2$$

$$f_2 = \frac{\partial f}{\partial y_1} = 0$$

$$f_3 = \frac{\partial f}{\partial z_1} = 0 \text{ ist.}$$

Als Gleichung der Tangentialebene der Hauptschnittfläche im Punkte F findet man so die Gleichung

$$-(x - s)\, s^2 = 0 \quad \text{oder} \quad x = s.$$

Sie stellt eine Ebene parallel zur (y z)-Ebene im Abstand $x = + s$ dar. Der Punkt F ist Scheitel des rechts der (y z)-Ebene liegenden paraboloïdischen Teils der Hauptschnittfläche.

Im weitern untersuchen wir die Schnitte der Hauptschnittfläche 3. Ordnung mit Ebenen parallel zu den zwei Koordinatenebenen (x y) und (x z). Setzt man in der Flächengleichung (11) $z = c =$ konstant, so erhält man die Schnittkurven parallel zur (x y)-Ebene, nämlich

$$\text{(c)} \qquad s\, y^2 - s\, x^2 + (c^2 + s^2)\, x = 0$$

Diese Gleichung stellt einen Kegelschnitt dar, dessen Asymptoten $y = \pm x$ sind, also eine gleichseitige Hyperbel. Ihre Normalformgleichung findet man durch die Substitution $y = y'$ und $x = x' + \frac{c^2 + s^2}{2\, s}$ in Gleichung (c); dann erhält man nämlich:

$$\text{(d)} \qquad x'^2 - y'^2 = \left(\frac{c^2 + s^2}{2\, s}\right)^2$$

Die Hyperbelachse liegt in der (x z)-Ebene parallel zur (x)-Achse, im Abstand c von derselben. Fällt die Schnittebene mit der (x y)-Ebene zusammen, so ist $c = 0$ und die Gleichung (c) wird identisch mit der Gleichung (a), d. h. sie stellt den Schnitt der Hauptschnittfläche mit der (x y)-Ebene dar. Für bestimmte positive oder negative Werte von c beträgt der Abstand des Hyperbelmittelpunktes von der (z)-Achse $x = \frac{c^2 + s^2}{2\,s}$; er ist also stets positiv und kann alle Werte von $\frac{s}{2}$ bis $+\infty$ annehmen. Da die Achsen der Hyperbel $a = b = \frac{c^2 + s^2}{2\,s}$ sind, so liegt der eine Scheitel stets auf der (z)-Achse, der andere im Abstand $x' = \frac{c^2 + s^2}{s}$ von der (z)-Achse auf der (x')-Achse. Zu jedem Schnitt parallel zur (x y)-Ebene gehört ferner die unendlich ferne Gerade der betreffenden Schnittebene.

Setzt man in der Gleichung der Hauptschnittfläche $z = z'$, $x = x'$ und $y = c =$ konstant, so bekommt man die Kurvengleichung für die Schnitte parallel zur (x z)-Ebene, nämlich

$$\text{(e)} \qquad x'\,z'^2 - s\,x'^2 + s^2\,x' + s\,c^2 = 0$$

Diese Gleichung 3. Grades in x' und z' stellt eine Kurve dar, die symmetrisch zur (x')-Achse liegt, weil die Variable z' nur in der 2. Potenz darin enthalten ist. Für $c = 0$ geht die Gleichung (e) in die zwei Gleichungen (b) über, welche die Schnittkurve der Hauptschnittfläche mit der (x z)-Ebene darstellen. Für jeden andern beliebigen positiven oder negativen Wert von c stellt die Gleichung (e) eine Kurve 3. Grades dar, deren Asymptotenrichtungen man erhält, wenn die Glieder höchsten Grades gleich Null gesetzt werden, also $x'\,z'^2 = 0$ oder

$$x' = 0 \quad \text{und} \quad z' = 0 \quad \text{doppelt.}$$

Die drei Asymptotenrichtungen sind reell; die eine wird gegeben durch die Richtung der (z')-Achse, die beiden andern zusammenfallenden durch die Richtung der (x')-Achse. Die unendlich ferne Gerade der (x' z')-Ebene schneidet also die Kurve in einem einfachen und zwei zusammenfallenden Punkten. Um den letztern Schnittpunkt der Kurve mit der unendlich fernen Geraden zu untersuchen, projizieren wir ihn durch die Transformationsformeln $x' = \frac{1}{x''}$ und $z' = \frac{z''}{x''}$ in den Nullpunkt. Setzt man diese Werte in der Kurvengleichung (e) ein, so wird sie:

$$z''^2 - s\,x'' + s^2\,x''^2 + s\,c^2\,x''^3 = 0$$

Diese Gleichung stellt eine Kurve 3. Ordnung dar, die durch den neuen, dem unendlich fernen Punkt der (x')-Achse entsprechenden, Nullpunkt geht. Die Tangente in ihm hat die Gleichung $x'' = \frac{1}{x'} = 0$, also $x' = \infty$. Der unendlich ferne Punkt der (x')-Achse ist daher ein einfacher Kurvenpunkt, in welchem die unendlich ferne Gerade der $(x'\,z')$-Ebene die Kurve berührt.

Um den unendlich fernen Punkt der (z')-Achse zu unter suchen, projiziert man ihn durch die Transformationsformeln $z' = \frac{1}{z''}$ und $x' = \frac{x''}{z''}$ n den Nullpunkt. Die Kurvengleichung geht dann über in

$$x'' - s\,x''^2\,z'' + s^2\,x''\,z''^2 + s\,c^2\,z''^3 = 0$$

Die transformierte Gleichung beginnt mit Gliedern 1. Grades, der unendlich ferne Punkt der (z')-Achse ist daher ein einfacher Kurvenpunkt. Die Tangente in ihm hat die Gleichung $x'' = 0$ oder zurücktransformiert $x' = 0$. Die (z')-Achse ist also Asymptote der Kurve. Setzt man in der transformierten Gleichung $x'' = 0$, so findet man die Schnittpunkte der (z')-Achse mit der Kurve, nämlich $z''^3 = 0$, also $z'' = 0$ dreifach, oder zurücktransformiert $z' = \infty$ dreifach; d. h. die (z')-Achse schneidet die Kurve im unendlich fernen Punkt in drei zusammenfallenden Punkten, sie ist daher W e n d e a s y m p t o t e der Kurve.

Um die Schnittpunkte der Kurve 3. Grades mit der (x')-Achse zu bestimmen, schreiben wir ihre Gleichung (e) in der Form

$$z' = \sqrt{\frac{s}{x'}\,(x'^2 - s\,x' - c^2)}$$

Für die zu bestimmenden Schnittpunkte ist $z' = 0$ also

$$\sqrt{\frac{s}{x'}\,(x'^2 - s\,x' - c^2)} = 0 \quad \text{oder}$$

$\frac{s}{x'}(x'^2 - s\,x' - c^2) = 0$. Diese Gleichung hat die drei Wurzeln

$$x'_1 = \infty$$

$$x'_2 = \frac{s + \sqrt{s^2 + 4c^2}}{2}$$

$$x'_3 = \frac{s - \sqrt{s^2 + 4c^2}}{2}$$

Dies sind die Abscissen, in welchen die Kurve die (x')-Achse schneidet; x'_2 ist immer positiv, x'_3 dagegen stets negativ. Die Ordinaten mit den Abscissen x'_1, x'_2 und x'_3 sind Tangenten an die Kurve.

Die Kurve 3. Grades besteht aus zwei unendlichen Aesten; der paare parabolische Zug hat seinen Scheitel in

$$x' = \frac{s + \sqrt{s^2 + 4c^2}}{2}$$

und erstreckt sich in der Richtung der positiven (x')-Achse bis ins Unendliche; die unendlich ferne Gerade der $(x'\,z')$-Ebene ist Tangente an diesen Zug. Der unpaare Zug schneidet die (z')-Achse in

$$x' = -\frac{-s + \sqrt{s^2 + 4c^2}}{2}$$

Die Gerade

$$x' = -\frac{-s + \sqrt{s^2 + 4c^2}}{2}$$

ist Tangente im Schnittpunkte mit der (x')-Achse, und die (z')-Achse ist Wendeasymptote der Kurve; diese besitzt ferner zwei Wendepunkte im Endlichen, die symmetrisch zur (x')-Achse liegen. Ihre Abscissen werden gefunden, indem man aus der Kurvengleichung (e) $\frac{d^2 z'}{d x'^2}$ bestimmt, diesen Wert gleich Null setzt und die Wurzeln dieser Gleichung aufsucht.

Aus Gleichung (e) folgt:

$$z' = \left(s\,x' - s\,c^2\,x'^{-1} - s^2\right)^{1/2}$$

$$\frac{d z'}{d x'} = \frac{1}{2} \cdot \frac{s\,c^2\,x'^{-2} + s}{\left(s\,x' - s\,c^2\,x'^{-1} - s^2\right)^{1/2}}$$

$$\frac{d^2 z'}{d x'^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-2 s c^2 x'^{-3}\left(s x' - s c^2 x'^{-1} - s^2\right) - \frac{1}{2}\left(s c^2 x'^{-2} + s\right)^2}{\left(s x' - s c^2 x'^{-1} - s^2\right)^{3/2}}$$

Dieser Ausdruck für $\frac{d^2 z'}{d x'^2}$ kann nur gleich Null sein, wenn der Zähler dieses Bruches verschwindet, also wenn

$$x'^4 + 6 c^2 x'^2 - 4 s c^2 x' - 3 c^4 = 0 \text{ ist.}$$

Die Kurve, in der die Hauptschnittfläche durch Ebenen parallel zur (x z)-Ebene geschnitten wird.

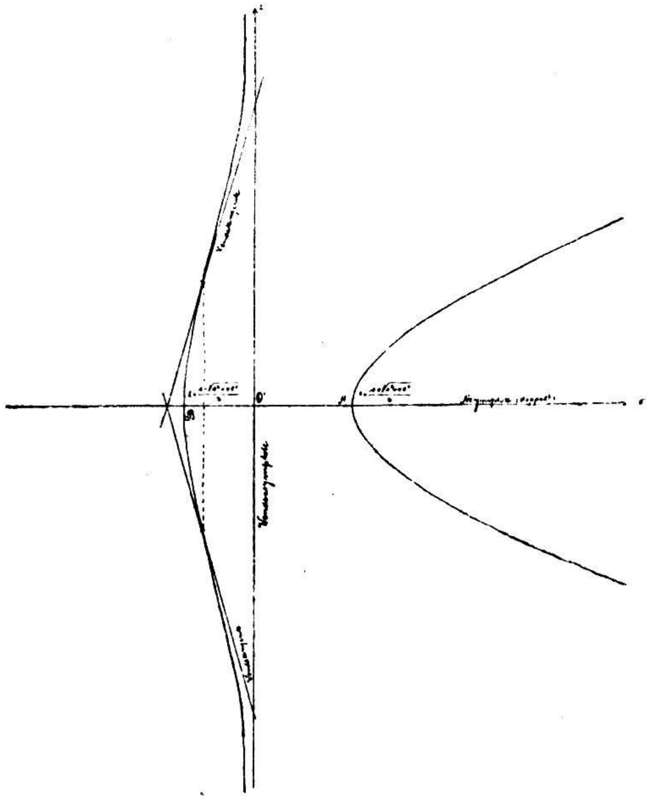

Fig. 11.

Wird diese Gleichung aufgelöst, z. B. nach der Methode von Ferrari, so findet man, dass sie zwei konjugiert komplexe und zwei reelle Wurzeln besitzt. Von den letzteren hat die eine einen positiven Wert; die andere dagegen, welche den beiden im Endlichen liegenden Wendepunkten der Kurve dritten Grades entspricht, ist negativ, nämlich

$$x' = \frac{1}{2}\sqrt{q - 6c^2} - \frac{1}{2}\sqrt{-q - 6c^2 + \frac{8sc^2}{\sqrt{q-6c^2}}},$$

wo $q = 2c^2 + \sqrt[3]{64c^6 + 16s^2c^4}$ bedeutet.

Durch diesen Wert von x' ist die Abscisse der beiden zur (x')-Achse symmetrisch liegenden Wendepunkte des unpaaren Zuges der Kurve 3. Grades bestimmt.

Gehen wir nun über zur Untersuchung der Flächenpunkte der Hauptschnittfläche 3. Grades! Ihre Gleichung kann, wenn sie nach z aufgelöst wird, auch in folgender Form geschrieben werden:

$$z = F(xy) = \left(sx - s\frac{y^2}{x} - s^2\right)^{1/2} \tag{f}$$

Lässt sich die Gleichung einer Fläche in diese Form bringen, so gilt als Kriterium der Flächenpunkte allgemein der Ausdruck $F_{11}F_{22} - F_{12}^2$. Setzt man hierin die Koordinaten des zu untersuchenden Flächenpunktes ein, so ist er entweder elliptisch, parabolisch oder hyperbolisch, je nachdem $F_{11}F_{22} - F_{12}^2 \gtreqless 0$ ist. Wir berechnen daher zunächst F_{11}, F_{22} und F_{12}. Nach Gleichung (f) folgt:

$$F_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{s + s\frac{y^2}{x^2}}{\left(sx - s\frac{y^2}{x} - s^2\right)^{1/2}}$$

$$F_{11} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{2\left(sx - s\frac{y^2}{x} - s^2\right)^{1/2} s\frac{y^2}{x^3} + \frac{s^2}{2}\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)\left(sx - s\frac{y^2}{x} - s^2\right)^{-1/2}}{sx - s\frac{y^2}{x} - s^2}$$

$$\text{oder } F_{11} = -s\frac{y^2}{x^3 z} - \frac{s^2}{4}\cdot\frac{1}{z^3}\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)^2$$

$$\text{Ferner ist } F_2 = -\frac{s\frac{y}{x}}{\left(sx - s\frac{y^2}{x} - s^2\right)^{1/2}}$$

und $F_{22} = -\frac{s}{x\,z} - \frac{s^2\,y^2}{x^2\,z^3}$

Aus F_1 bestimmen wir $F_{12} = \frac{s\,y}{x^2\,z} + \frac{s^2}{2}\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)\frac{y}{x\,z^3}$

$$F_{12}^{\;2} = \frac{s^2\,y^2}{x^4\,z^2} + \frac{s^3\,y^2}{x^3\,z^4}\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) + \frac{s^4}{4}\,\frac{y^2}{x^2\,z^6}\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)^2$$

$$F_{11}\cdot F_{22} = s^2\frac{y^2}{x^4\,z^2} + \frac{s^3}{4}\cdot\frac{1}{x\,z^4}\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)^2 + \frac{s^3\,y^4}{x^5\,z^4} + \frac{s^4}{4}\cdot\frac{y^2}{x^2\,z^6}\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)^2$$

Wir bilden nun die Differenz

$$F_{11}\cdot F_{22} - F_{12}^{\;2} = \frac{s^3}{4}\cdot\frac{1}{x\,z^4}\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)^2 + \frac{s^3\,y^4}{x^5\,z^4} - \frac{s^3\,y^2}{x^3\,z^4}\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)$$

$$F_{11}\cdot F_{22} - F_{12}^{\;2} = \frac{s^3}{4\,x^5\,z^4}\left(x^4 - 2\,x^2\,y^2 + y^4\right)$$

$$F_{11}\cdot F_{22} - F_{12}^{\;2} = \frac{s^3}{4\,x^5\,z^4}\left(x^2 - y^2\right)^2 \qquad \text{(g)}$$

Je nachdem die Koordinaten $x_1\,y_1\,z_1$ irgend eines Flächenpunktes $P_1\,(x_1\,y_1\,z_1)$, in diesen Ausdruck eingesetzt, diesem einen positiven oder negativen Wert geben, ist er entweder elliptisch oder hyperbolisch. Wird der Ausdruck gleich Null, oder, was gleichbedeutend ist, unendlich gross, so ist der Punkt parabolisch.

Das Vorzeichen des obigen Ausdrucks (g) wird nun einzig bestimmt durch das Vorzeichen von x; für jedes positive x ist auch $F_{11}\cdot F_{22} - F_{12}^{\;2}$ = positiv. Da nun alle Punkte des rechts von der (y z)-Ebene liegenden Teils der Hauptschnittfläche eine positive Koordinate x haben, so sind alle diese Punkte elliptische Flächenpunkte, und die beiden Inflexionstangenten in jedem derselben sind imaginär. Wir wollen speziell die Gleichung der Inflexionstangenten in dem auf der positiven (x)-Achse liegenden Flächenpunkte F bestimmen. Zu diesem Zwecke eliminieren wir aus der Tangentialebenengleichung $x = s$ dieses Punktes und aus der Flächengleichung (11) die Variable x und finden so die beiden Gleichungen $z = \pm\, i\,y$. Dies sind die Strahlen absoluter Richtung einer Ellipse mit gleichen Halbachsen, also eines Kreises, der Flächenpunkt F ist daher speziell ein Kreispunkt, Nabelpunkt oder Umbilikus der Hauptschnittfläche.

Wir wissen ferner, dass sämtliche Punkte der (z)-Achse des Koordinatensystems zugleich Flächenpunkte sind. Da sie alle die Koordinate $x = 0$ haben, so geht für sie die Gleichung (g) über in $F_{11} F_{22} - F_{12}^2 = \infty$, d. h. alle Punkte der (z)-Achse sind parabolische Punkte der Hauptschnittfläche 3. Grades. Da nun in jedem parabolischen Flächenpunkt die beiden Inflexionstangenten zusammen fallen, und da ferner jeder Punkt der (z)-Achse, als Punkt der Hauptschnittfläche betrachtet, dieselbe Tangentialebene besitzt, nämlich die (y z)-Ebene des Koordinatensystems, so fallen alle Tangenten in diesen Flächenpunkten in eine einzige zusammen. Ihre Gleichung ergibt sich aus der Flächengleichung (11), wenn man in ihr $x = 0$ setzt, nämlich $y = 0$ doppelt. Alle Inflexionstangenten in den auf der (z)-Achse liegenden Flächenpunkten fallen also zusammen in die (z)-Achse des Koordinatensystems.

Für alle Flächenpunkte, die links von der Koordinatenebene (y z) liegen, hat die Koordinate x einen negativen Wert, daher auch der Ausdruck (g). Folglich sind alle Punkte des links von der (y z)-Ebene liegenden Teils der Hauptschnittfläche hyperbolische Punkte, und in jedem derselben sind zwei reelle Inflexionstangenten möglich.

Sowohl für $x = +\infty$ als auch für $x = -\infty$ wird $F_{11} F_{22} - F_{12}^2 = 0$. Im Unendlichen sind daher alle Flächenpunkte parabolisch. Wenn man im Unendlichen von dem rechts von der (y z)-Ebene liegenden Teil der Fläche auf den links von dieser Ebene liegenden Teil übergeht, so geht der elliptische Charakter der Flächenpunkte über in den parabolischen und dann in den hyperbolischen.

Gestützt auf die Untersuchungen dieses Paragraphs können wir uns über die Gestalt der durch Gleichung (11) dargestellten Hauptschnittfläche folgendes Bild machen: sie besteht aus zwei Teilen, einem hyperboloïdischen links und einem paraboloïdischen rechts der (y z)-Ebene. Die (z)-Achse liegt ganz auf dem hyperboloïdischen Teil, und dieser erstreckt sich von ihr aus in der negativen (x)-Richtung bis ins Unendliche und schneidet die unendlich ferne Ebene in der Richtung der (y z)-Ebene in einer einfachen und in der Richtung der (x y)-Ebene in einer doppelt gelegten Geraden. Der paraboloïdische Teil der Fläche erstreckt sich vom Scheitel F aus, welcher ein Kreispunkt ist, in positiver (x)-Richtung bis nach $+\infty$ und schneidet die unendlich ferne

Ebene ebenfalls in jener doppelt gelegten Geraden der (x y)-Ebene. Man kann sich vorstellen, dass die beiden Flächenstücke im Unendlichen sich in der unendlich fernen Doppelgeraden der (x y)-Ebene aneinander schliessen und so eine zusammenhängende Fläche bilden, die drei Gerade enthält, nämlich die (z)-Achse, die unendlich ferne Gerade der (y z)-Ebene und die unendlich ferne Gerade der (x y)-Ebene als Doppelgerade.

§ 13.
Ueber Polarflächen der Hauptschnittfläche 3. Grades.

Die Hauptschnittfläche 3. Grades hat die Gleichung

$$x z^2 - s x^2 + s y^2 + s^2 x = 0 \qquad (11)$$

oder homogen gemacht:

$$f(x y z w) = x z^2 - s x^2 w + s y^2 w + s^2 x w^2 = 0$$

Nun hat die erste Polarfläche in Bezug auf einen festen Pol $P'(x', y', z')$ die Gleichung:

$$\triangle f = x' \frac{\partial f}{\partial x} + y' \frac{\partial f}{\partial y} + z' \frac{\partial f}{\partial z} + w' \frac{\partial f}{\partial w} = 0$$

Nach der homogenen Flächengleichung ergeben sich für die partiellen Differentialquotienten folgende Werte:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = z^2 - 2 s x + s^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2 s y$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2 x z$$

$$\frac{\partial f}{\partial w} = - s x^2 + s y^2 + 2 s^2 x$$

Daher wird die Gleichung der quadratischen Polarfläche der Hauptschnittfläche 3. Grades, bezogen auf einen festen Pol $P'(x', y', z')$:

$$s(x^2 - y^2) - x' \cdot z^2 - 2 z' \cdot x z - 2 s (s - x') x - 2 s y' \cdot y - s^2 x' = 0 \qquad (19)$$

Wir nehmen nun an, der Pol $P'(x', y', z')$ sei nicht fest, sondern er nehme successive andere Lagen an; er durchlaufe z. B. die ganze (x)-Achse des Koordinatensystems. In diesem Falle haben wir in der Gleichung der quadratischen Polarfläche (19) für $y' = z' = 0$ zu setzen, und für x' substituieren wir einen veränderlichen Parameter n, der alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ annehmen soll. Dann geht die Gleichung (19) über in