Ueber Polarflächen der Hauptschnittfläche 3. Grades

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern**

Band (Jahr): **- (1911)**

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Ebene ebenfalls in jener doppelt gelegten Geraden der (x y)-Ebene. Man kann sich vorstellen, dass die beiden Flächenstücke im Unendlichen sich in der unendlich fernen Doppelgeraden der (x y)-Ebene aneinander schliessen und so eine zusammenhängende Fläche bilden, die drei Gerade enthält, nämlich die (z)-Achse, die unendlich ferne Gerade der (y z)-Ebene und die unendlich ferne Gerade der (x y)-Ebene als Doppelgerade.

§ 13.
Ueber Polarflächen der Hauptschnittfläche 3. Grades.

Die Hauptschnittfläche 3. Grades hat die Gleichung

$$x z^2 - s x^2 + s y^2 + s^2 x = 0 \tag{11}$$

oder homogen gemacht:

$$f(x y z w) = x z^2 - s x^2 w + s y^2 w + s^2 x w^2 = 0$$

Nun hat die erste Polarfläche in Bezug auf einen festen Pol P′ (x′, y′, z′) die Gleichung:

$$\triangle f = x' \frac{\partial f}{\partial x} + y' \frac{\partial f}{\partial y} + z' \frac{\partial f}{\partial z} + w' \frac{\partial f}{\partial w} = 0$$

Nach der homogenen Flächengleichung ergeben sich für die partiellen Differentialquotienten folgende Werte:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = z^2 - 2 s x + s^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2 s y$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2 x z$$

$$\frac{\partial f}{\partial w} = - s x^2 + s y^2 + 2 s^2 x$$

Daher wird die Gleichung der quadratischen Polarfläche der Hauptschnittfläche 3. Grades, bezogen auf einen festen Pol P′ (x′, y′, z′):

$$s(x^2 - y^2) - x' \cdot z^2 - 2 z' \cdot x z - 2 s (s - x') x - 2 s y' \cdot y - s^2 x' = 0 \tag{19}$$

Wir nehmen nun an, der Pol P′ (x′, y′, z′) sei nicht fest, sondern er nehme successive andere Lagen an; er durchlaufe z. B. die ganze (x)-Achse des Koordinatensystems. In diesem Falle haben wir in der Gleichung der quadratischen Polarfläche (19) für $y' = z' = 0$ zu setzen, und für x′ substituieren wir einen veränderlichen Parameter n, der alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ annehmen soll. Dann geht die Gleichung (19) über in

$$s x^2 - s y^2 - n z^2 - 2 s^2 x + 2 n s \cdot x - n s^2 = 0 \quad (20)$$

Bei variablem Parameter n stellt diese Gleichung eine Schar von unendlich vielen Flächen 2. Grades dar. Alle diese Flächen bilden in ihrer Gesamtheit die Schar von unendlich vielen quadratischen Polarflächen, bezogen auf die sämtlichen Punkte der (x)-Achse als Pole.

Da die Gleichung (20) keine Glieder in xy, xz oder yz enthält, so genügt eine Parallelverschiebung des Koordinatensystems, um die Flächengleichung auf die Achsengleichung zu transformieren. Wir haben zu diesem Zwecke in Gleichung (20) für $y = y'$, $z = z'$ und für $x = x' + s - n$ zu substituieren; sie geht dann über in

$$\frac{x'^2}{n^2 + n s + s^2} - \frac{y'^2}{n^2 + n s + s^2} - \frac{n z'^2}{s(n^2 + n s + s^2)} = 1 \quad (20a)$$

Die Mittelpunkte M sämtlicher Flächen der durch Gleichung (20) gegebenen Polarflächenschar liegen demnach auf der (x)-Achse und zwar im Abstand $x = s - n$ vom Koordinatenursprung.

Wir nehmen nun zunächst an, der Pol P′ durchlaufe den positiven Teil der (x)-Achse, so dass der Parameter n alle Werte annimmt zwischen $n = +\infty$ und $n = 0$. Dann sind in der Gleichung (20a) alle Nenner positiv, und die quadratische Polarfläche des Punktes P′ ist ein zweischaliges Hyperboloïd, von den Halbachsen:

$$a = b = \sqrt{n^2 + n s + s^2} \text{ und } c = \sqrt{\frac{s}{n}(n^2 + n s + s^2)}$$

Seine Scheitel liegen auf der (x)-Achse im Abstand $x' = \pm \sqrt{n^2 + n s + s^2}$ vom Mittelpunkt M. (S. Fig. 12).

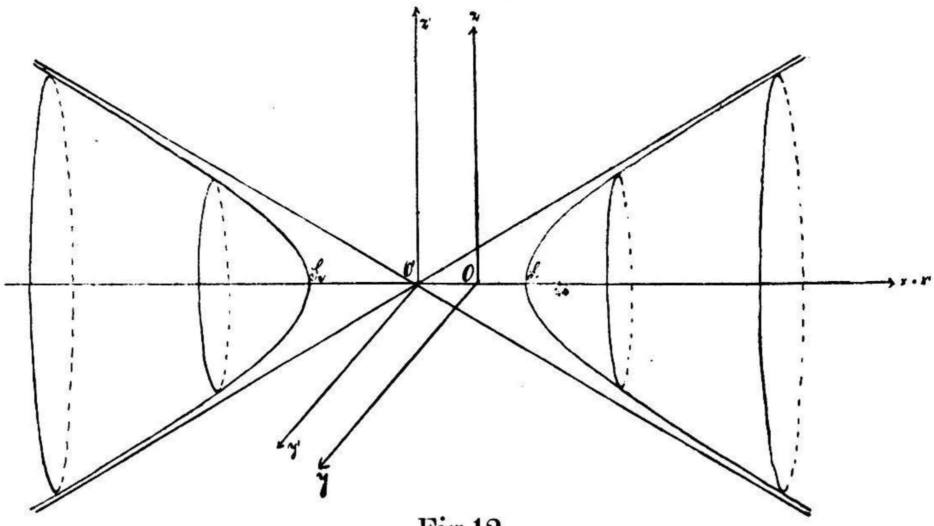

Fig.12.

Um die Polarfläche des unendlich fernen Punktes der (x)-Achse zu bestimmen, dividieren wir die Gleichung (20) durch n und setzen dann für $n = \infty$; sie wird dann

$$z^2 - 2sx + s^2 = 0 \tag{a}$$

Dies ist die Gleichung eines parabolischen Cylinders; sie ist identisch mit Gleichung (5) in § 2. Wir finden somit, dass die Rotationsfläche $k = 1$ unseres Rotationsflächensystems zugleich quadratische Polarfläche der durch Gleichung (11) gegebenen Hauptschnittfläche 3. Grades ist, bezogen auf den unendlich fernen Punkt der (x)-Achse als Pol P′. (S. auch Fig. 4).

Der Pol P′ rücke nun auf der positiven (x)-Achse ins Endliche, der Parameter n werde also immer kleiner! Dann werden alle Halbachsen des zweischaligen Hyperboloïdes (20a) zunächst abnehmen; wandert der Pol P′ bis in den Nullpunkt, wird also n immer kleiner und zuletzt gleich Null, so reduziert sich die Länge der Halbachsen a und b auf $a = b = s$. Der Mittelpunkt M des Hyperboloïdes rückt gleichzeitig auf der negativen (x)-Achse ins Endliche, und für $n = 0$ befindet er sich auf der positiven (x)-Achse im Abstand $x = s$. Die Halbachse c nun erreicht schon vorher ein gewisses Minimum ihrer Länge, nämlich dann, wenn $\frac{d}{dn}\left(n + s + \frac{s}{n}\right) = 1 - \frac{s}{n^2} = 0$ wird, also wenn $n = \sqrt{s}$ ist, oder wenn der Pol P′ im Punkte $x = \sqrt{s}$ liegt. Wird n noch kleiner, so nimmt die Länge der Halbachse c rasch wieder zu und für $n = 0$ ist sie unendlich gross.

Die quadratische Polarfläche in Bezug auf den Nullpunkt des alten Koordinatensystems ist also ein zweischaliges Rotationshyperboloïd, dessen eine imaginäre Halbachse unendlich lang ist; diese Fläche wird daher vorteilhafter aufgefasst als hyperbolischer Cylinder, dessen Gleichung wir direkt aus der Polarflächengleichung (20) finden, wenn man ihr $n = 0$ setzt:

$$x^2 - y^2 - 2sx = 0 \tag{b}$$

Dies ist die Gleichung der Kurve, in welcher der gleichseitige hyperbolische Cylinder die (x y)-Ebene schneidet. Es ist die Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel von der Halbachse s. Der Mittelpunkt dieser Schnittkurve liegt im Abstand $x = s$ vom Koordinatenursprung O, also im Flächenpunkte F. Die Asymptotengleichungen sind $y = \pm(x - s)$. Die Erzeugenden des hyperbolischen Cylinders stehen auf der (x y)-Ebene senkrecht; die (z)-Achse ist auch Cylindererzeugende, also hat die Polarfläche die (z)-Achse mit der Hauptschnittfläche gemein. Dieses Resultat entspricht dem allgemein gültigen Satze, dass, wenn der Pol auf der Fläche selbst liegt, dann die sämtlichen Polarflächen die Tangentialebene in ihm berühren. (S. Fig. 13).

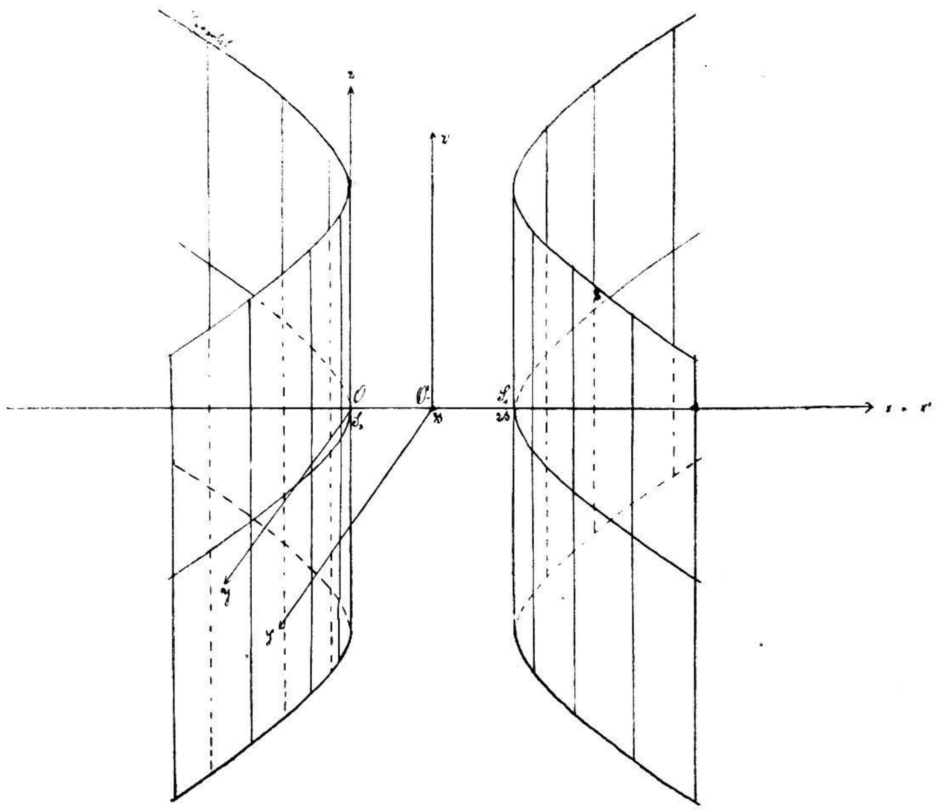

Fig. 13.

Der Pol P′ gehe nun im Koordinatenursprung auf den negativen Teil der (x)-Achse über; dann müssen wir in der Polarflächengleichung n durch — n ersetzen und n wieder alle Werte von 0 bis ∞ annehmen lassen, wenn der Pol P′ bis ins Unendliche rückt. Die Gleichung (20a) geht nun über in

$$\frac{x'^2}{n^2 - n\,s + s^2} - \frac{y'^2}{n^2 - n\,s + s^2} + \frac{n\,z'^2}{s\,(n^2 - n\,s + s^2)} = 1 \quad (20b)$$

Der Ausdruck $(n^2 - n\,s + s^2)$ im Nenner dieser Gleichung hat immer einen positiven Wert, denn die Wurzeln der Gleichung $n^2 - n\,s + s^2 = 0$ sind komplex; der Parameter n kann aber nur reelle Werte annehmen, also kann kein Wert von n der Gleichung $n^2 - n\,s + s^2 = 0$ genügen. Der Ausdruck $n^2 - n\,s + s^2$ nimmt daher stetig vom Werte s^2 bis ∞ zu, und die Gleichung (20b) hat immer den allgemeinen Typus $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} = 1$. Dies ist die Gleichung eines einschaligen Hyperboloïdes, dessen imaginäre

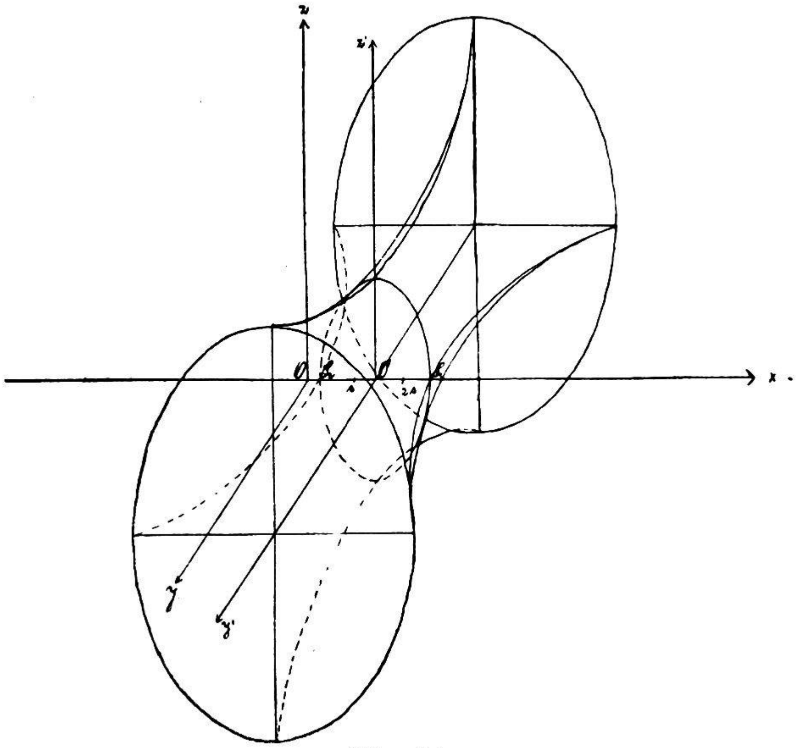

Fig. 14.

Achse in der (y')-Achse liegt. Fig. 14. Wenn also der auf der (x)-Achse gelegene Pol P' vom Nullpunkt aus in negativer Richtung weiter rückt, so geht der durch Gleichung (b) bestimmte hyperbolische Cylinder in ein einschaliges Hyperboloïd über. Jener lässt sich auch als Grenzfall eines zweischaligen und eines einschaligen Hyperboloïdes betrachten, nämlich als ein solches, dessen eine Achse, c, unendlich gross wird, während die beiden andern einander gleich, $a = b = s$, sind. Nimmt der Parameter n zu, so wird die Halbachse c des Hyperboloïdes kleiner, sie nimmt endliche Werte an. Ein Minimum wird sie, wenn $\frac{d}{dn}\left(n - s + \frac{s^2}{n}\right) = 1 - \frac{s^2}{n^2} = 0$ ist, also wenn der Parameter $n = s$ ist, d. h. für den Punkt $x = -s$ als Pol; ihre Länge ist dann $c = s$. Wird $|n| > s$, so wächst die Halbachse c wieder, und für $n = \infty$, wenn sich also der Pol P' in $x = -\infty$ befindet, ist c wieder unendlich gross. Die beiden Halbachsen a und b haben für $n = 0$ den Wert $a = b = s$; wenn der Parameter n bis ins Unendliche wächst, so nimmt ihre Länge stetig zu und wird für $n = \infty$ ebenfalls unendlich gross. Der Mittelpunkt der quadratischen Polarfläche befindet sich für $n = 0$ auf der positiven (x)-Achse im Abstand $x = + s$. Bei zunehmendem n rückt er in positiver Richtung weiter, und für $n = \infty$ befindet er sich im Unendlichen. Die quadratische Polarfläche des unendlich fernen Punktes der negativen (x)-Achse ist demnach ein einschaliges Hyperboloïd, dessen Halbachsen unendlich lang sind und dessen Mittelpunkt sich im Abstand $x = + \infty$ befindet. Die (x)-Achse schneidet daher das Hyperboloïd im Endlichen nur einmal. Der im Endlichen liegende Teil desselben lässt sich als parabolischer Cylinder auffassen, welcher identisch ist mit demjenigen von der Gleichung (a).

Die Zusammenfassung der letzten Resultate ergibt folgendes: betrachtet man sämtliche Punkte der (x)-Achse von $+ \infty$ bis $- \infty$ successive als Pole in Bezug auf die Hauptschnittfläche 3. Grades, so erhält man eine Schar von unendlich vielen quadratischen Polarflächen. Die Polarfläche des unendlich fernen Punktes der positiven (x)-Achse ist ein parabolischer Cylinder, dessen Erzeugende auf der (x z)-Ebene senkrecht stehen und dessen Scheitel vom Koordinatenursprung den Abstand $x = \frac{s}{2}$ besitzt. Rückt der Pol ins Endliche, so geht dieser Cylinder in ein zweischaliges Hyperboloïd über. Während der Pol die ganze positive (x)-Achse durchläuft, rückt der eine Scheitel desselben von $x = \frac{s}{2}$ nach $x = 2 s$, der andere von $x = - \infty$ durch die ganze negative (x)-Achse nach dem Koordinatenursprung. Fällt der Pol mit dem Nullpunkt der (x)-Achse zusammen, so geht das zweischalige Hyperboloïd in einen hyperbolischen Cylinder über, dessen Erzeugende senkrecht auf der (x y)-Ebene stehen und dessen Scheitel die Abstände $x = 2 s$ und $x = 0$ besitzen. Wenn der Pol P' die ganze positive (x)-Achse durchläuft, so durchwandert der Mittelpunkt der entsprechenden Polarflächen die ganze negative (x)-Achse in positiver Richtung von $x = - \infty$ bis $x = + s$. Sobald nun der Pol P' auf die negative (x)-Achse übergeht, wird die quadratische Polarfläche ein einschaliges Hyperboloïd, dessen imaginäre Achse in der (x y)-Ebene parallel zur (y)-Achse liegt. Durchläuft der Pol die ganze negative (x)-Achse von $x = 0$ bis $x = -\infty$, so rückt der Mittelpunkt der Polarfläche im bisherigen Sinne weiter von $x = + s$ bis $x = + \infty$. Die Schnittpunkte des einschaligen Hyperboloïdes mit der (x)-Achse rücken von $x = + 2s$ bis $x = \infty$, bezüglich von $x = 0$ bis $x = \frac{s}{2}$. Die quadratische Polarfläche der Hauptschnittfläche in Bezug auf den unendlich fernen Punkt der negativen (x)-Achse als Pol ist dann wieder der parabolische Cylinder, mit dem die Entwicklung der Flächenschar beginnt. Ueber die gesamte Lageveränderung des Mittelpunktes und der Achsenabschnitte in der (x)-Achse gibt folgende Tabelle Aufschluss:

n	Mittelpunkt	Scheitel	
		S_1	S_2
$+\infty$	$x = -\infty$	$x_1 = \frac{s}{2}$	$x_2 = -\infty$
0	$= s$	$= 2s$	$= 0$
$-\infty$	$= +\infty$	$= +\infty$	$= +\frac{s}{2}$

Wir gehen nun über zur Untersuchung der quadratischen Polarflächen der Hauptschnittfläche 3. Grades für den Fall, dass der Pol $P'(x'\ y'\ z')$ die (z)-Achse des Koordinatensystems durchläuft. Wir setzen daher in der allgemeinen Gleichung (19) der ersten Polarfläche für $x' = y' = 0$ und $z' = n$, wo n wieder variabler Parameter ist und alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ annehmen kann; sie geht dann über in

$$s x^2 - s y^2 - 2 n x z - 2 s^2 x = 0 \qquad (21)$$

Diese Gleichung stellt unendlich viele Flächen dar; jede Fläche der Schar geht durch den Nullpunkt des Koordinatensystems und enthält die (z)-Achse desselben als Erzeugende, denn die Koordinaten $x = 0$ und $y = 0$ leisten der Gleichung (21) für jeden Wert von z Genüge. Da nun nach § 12 jeder Punkt der (z)-Achse auf der Hauptschnittfläche 3. Grades liegt und zudem ein parabolischer Flächenpunkt ist, so müssen nach der Theorie der Polarflächen alle Flächen des obigen Büschels K e g e l 2. G r a d e s sein. (S. Fig. 15).

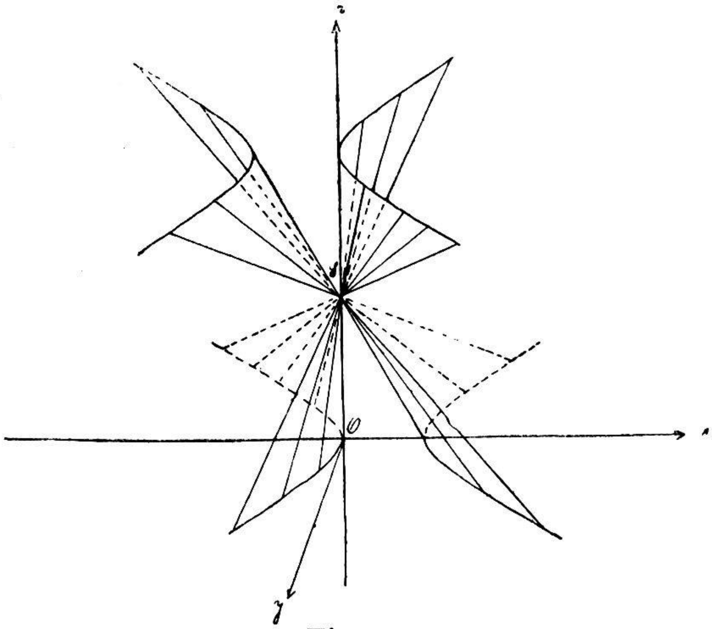

Fig. 15.

Ihre Scheitelgleichung finden wir, wenn in Gleichung (21) für $x = x'$, $y = y'$ und für $z = z' - \frac{s^2}{n}$ substituiert wird. Sie geht dann über in

$$s x'^2 - s y'^2 - 2 n x' z' = 0 \qquad (21a)$$

Zur Bestimmung der Schnittkurven dieser Kegelschar mit der (x y)-Ebene des ursprünglichen Koordinatensystems setzen wir in Gleichung (21) für $z = 0$ und finden so die Gleichung $x^2 - y^2 - 2 s x = 0$; sie stellt eine gleichseitige Hyperbel dar, welche identisch ist mit der Schnittkurve des vorhin besprochenen hyperbolischen Cylinders mit der (x y)-Ebene; sie bleibt für alle Flächen der Schar dieselbe. Also schneidet jeder Kegel zweiten Grades, der durch die in x' y' z' homogene Gleichung (21a) dargestellt wird, die (x y)-Ebene in der nämlichen gleichseitigen Hyperbel; ihr Mittelpunkt liegt im Abstand $x = s$ auf der (x)-Achse, ihre Halbachse $= s$; der eine Scheitel fällt mit dem Koordinatenursprung zusammen, der andere liegt im Abstand $x = 2 s$. Der Kegelscheitel S liegt auf der (z)-Achse und hat vom alten Nullpunkt den Abstand $z' = -\frac{s^2}{n}$. Dem Pol P′ $(z = n)$ auf der (z)-Achse entspricht der Scheitel S seines Polarkegels $z' = -\frac{s^2}{n}$; da $z \cdot z' = -s^2 =$ konstant und negativ ist, so bilden die Punktepaare (P', S) auf der (z)-Achse eine elliptische Punktinvolution vom Mittelpunkt O. Für $n = s$ wird $z = s$ und $z' = - s$, welche beiden Punkte P und S symmetrisch zu O liegen.

Für alle Werte von n zwischen 0 und $+ \infty$ bewegt sich der Kegelschnitt S von $z = - \infty$ bis $z = 0$, für diejenigen von 0 bis $- \infty$ dagegen von $z = + \infty$ bis $z = 0$. Wenn der Pol P' im Endlichen von der positiven (z)-Achse auf die negative übergeht, also den Koordinatenursprung passiert, so rückt der Kegelscheitel S im Unendlichen von der negativen (z)-Achse auf die positive. Für den Polabstand $z = \pm \infty$ ist der Koordinatenursprung Kegelscheitel; alle Erzeugenden durch denselben schneiden aber die (x y)-Ebene zugleich noch in einem Punkte der Schnitthyperbel (b), sie liegen also alle in der (x y)-Ebene des alten Koordinatensystems, und diese ist die erste Polarfläche der Hauptschnittfläche 3. Grades in Bezug auf den unendlich fernen Punkt der (z)-Achse als Pol; die quadratische Polarfläche hat sich also auf eine Ebene reduziert. Wählt man dagegen den Koordinatenursprung als Pol, so dass der Kegelscheitel im Abstand $z = \infty$ liegt, so sind alle Erzeugende einander parallel und senkrecht zur (x y)-Ebene, d. h. der Kegel 2. Grades ist identisch mit dem durch Gleichung (b) bestimmten hyperbolischen Cylinder. (Fig. 13).

Wir lassen nun den Pol $P' (x' y' z')$ die (y)-Achse des Koordinatensystems durchlaufen und bestimmen die Schar von quadratischen Polarflächen, die den Punkten derselben entspricht. Es ist daher in der allgemeinen Gleichung (19) der quadratischen Polarfläche $x' = z' = 0$ und y' gleich einem variabeln Parameter n zu setzen und wir erhalten die Gleichung:

$$x^2 - y^2 - 2 s x - 2 n y = 0 \qquad (22)$$

Da n alle Werte von $+ \infty$ bis $- \infty$ annehmen kann, so stellt diese Gleichung, im Raume gedeutet, eine Schar von gleichseitigen hyperbolischen Cylindern dar, deren Erzeugende auf der (x y)-Ebene senkrecht stehen. Die Koordinaten $x = 0$ und $y = 0$ genügen der Gleichung (22) für jedes z, also ist die (z)-Achse des Koordinatensystems für jede Fläche der Schar eine Erzeugende derselben. Sämtliche Cylinderflächen der Schar schneiden die (x y)-Ebene in einer gleichseitigen Hyperbel von der Gleichung (22); die Mittelpunkte dieser Schnitthyperbeln liegen alle auf einer durch den Punkt F gehenden Geraden, die parallel ist zur (y)-Achse, denn ihre Koordinaten sind $y = -n$ und $x = s =$ konstant, und durch die Substitution $x = x' + s$ und $y = y' - n$ geht die Hyperbelgleichung (22) in die Achsengleichung über, welche lautet:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x'^2}{s^2 - n^2} - \dfrac{y'^2}{s^2 - n^2} = 1 \\ \text{oder, wenn } s < n \text{ ist} \quad \dfrac{y'^2}{n^2 - s^2} - \dfrac{x'^2}{n^2 - s^2} = 1 \end{array}\right\} \qquad (22a)$$

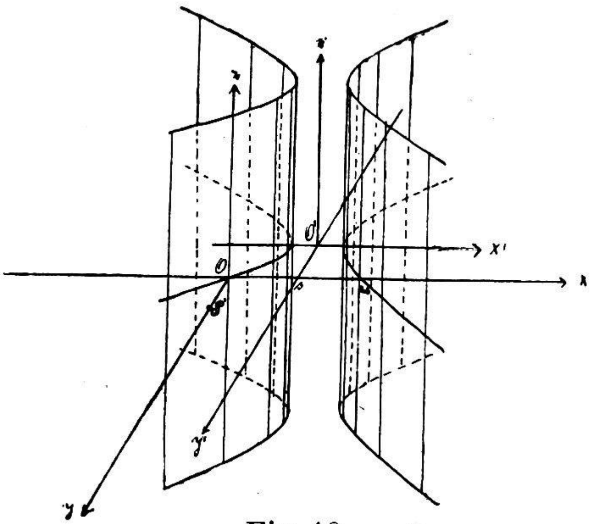

Fig. 16.

Ueber die Aenderungen der Lage der Hyperbelmittelpunkte O′ und die Länge der Halbachse bei variablem Parameter n gibt folgende Tabelle Aufschluss:

n	$x = s$	$y = -n$	$a = b = \sqrt{n^2 - s^2}$
$+\infty$	s	$-\infty$	∞
$+s$	s	$-s$	0
0	s	0	s
$-s$	s	$+s$	0
$-\infty$	s	$+\infty$	∞

Zunächst zeigt sich wieder, dass die quadratische Polarfläche in Bezug auf den Koordinatenursprung als Pol ein hyperbolischer Cylinder ist, der in Fig. 13 dargestellt und bereits besprochen wurde. Rückt nun der Pol P′ auf der (y)-Achse vom Nullpunkt aus in positiver Richtung vorwärts, so wandert der Mittelpunkt O′ der Schnitthyperbel auf der Geraden $x = s$ in negativer (y)-Richtung weiter, und zugleich nimmt die Länge der Halbachsen $a = b$ vom Anfangswerte s an ab. Wenn sich der auf der (y)-Achse liegende Pol im Abstand $y = + s$ befindet, so sind die Halbachsen der Schnitthyperbel $a = b = 0$ und der hyperbolische Cylinder reduziert sich auf zwei sich rechtwinklig schneidende Ebenen, die beide auf der (x y)-Ebene senkrecht stehen, während sie mit den beiden andern Koordinatenebenen je Winkel von 45^0 bilden. Der Durchstosspunkt ihrer Schnittgeraden mit der (x y)-Ebene hat die Koordinaten $x = s$ und $y = - s$.

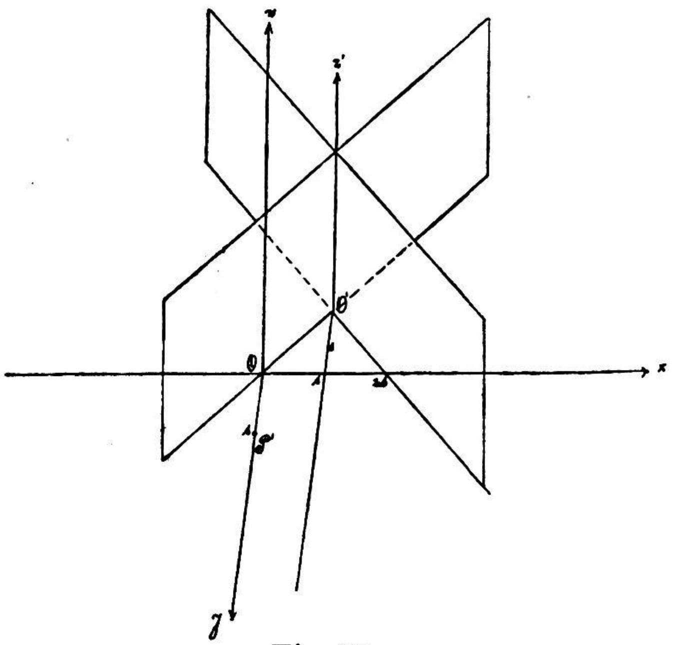

Fig. 17.

Geht der Pol im bisherigen Sinne weiter und durchläuft er die (y)-Achse von $y = + s$ bis $y = + \infty$, so ist der Parameter $n > s$, und wir haben als Gleichung der gleichseitigen Schnitthyperbel die zweite Gleichung (22a) zu betrachten. Es zeigt sich, dass aus den zwei sich rechtwinklig schneidenden Geraden, in welchen die soeben besprochenen Ebenen die (x y)-Ebene schneiden, nun eine solche gleichseitige Hyperbel entsteht, deren reelle Achse in die (y)-Richtung und deren imaginäre Achse in die (x)-Richtung fällt, während für $0 < n < s$ die Verhältnisse entgegengesetzte waren. Der Mittelpunkt der Schnitthyperbel, also auch die Achse des entsprechenden hyperbolischen Cylinders, rückt bei wachsendem n auf der Geraden $x = s$ in der eingeschlagenen Richtung immer weiter, so dass er sich immer gleich weit hinter der (x z)-Ebene befindet, wie der Pol P′ vor derselben; ist der Abstand des Pols $y = +\infty$, so ist derjenige der Cylinderachse $y = -\infty$. Die Länge der Hyperbelhalbachsen $a = b$ nimmt vom Werte Null an stetig zu und für $n = \infty$ werden sie unendlich gross. Für grosse Werte des Parameters n ist der Abstand des Hyperbelmittelpunktes von der (x)-Achse des Koordinatensystems verhältnismässig nur wenig grösser als die Länge der Hyperbelachse; die Scheitelerzeugende der einen Schale des hyperbolischen Cylinders entfernt sich daher nur wenig von der (x)-Achse, so dass die (z)-Achse des Koordinatensystems immer Cylindererzeugende ist. Befindet sich

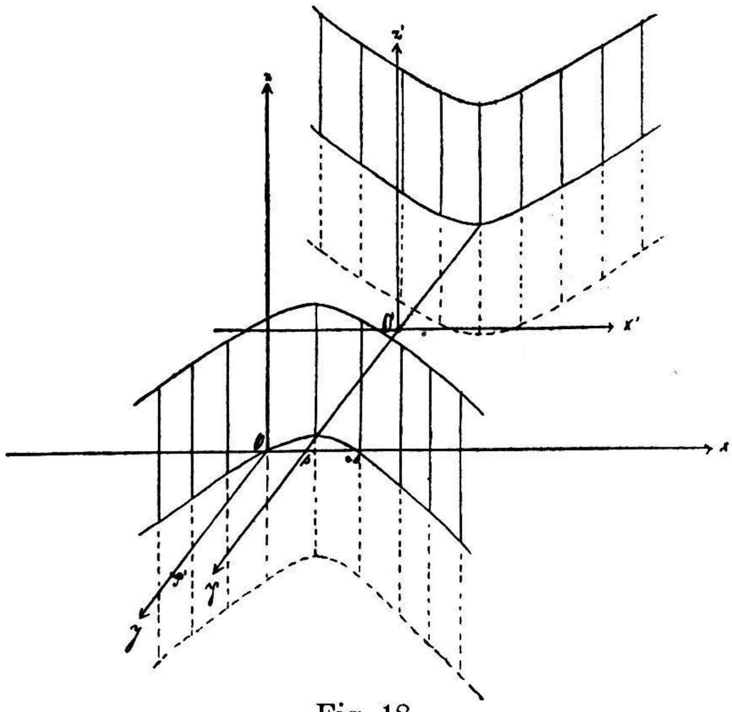

Fig. 18.

der Pol P′ im Abstand $y = +\infty$, so ist sowohl der Abstand des Hyperbelmittelpunktes als auch die Länge der Halbachse unendlich gross, und die im Endlichen liegende Schale des hyperbolischen Cylinders geht in eine Ebene, die (x z)-Ebene des Koordinatensystems, über; diese ist also 1. Polarfläche in Bezug auf den unendlich fernen Punkt der (y)-Achse. Dasselbe Resultat erhält man auch, wenn man die Gleichung (22) durch n dividiert und dann für $n = \infty$ einsetzt; sie geht dann über in $y = 0$, die Gleichung der (x z)-Ebene.

Lassen wir den Pol $P'(x' y' z')$ statt der positiven die negative (y)-Achse durchlaufen, so erhalten wir die nämliche Schar von quadratischen Polarflächen, nur mit dem Unterschiede, dass der Mittelpunkt ihrer Schnitthyperbel die Gerade $x = s$ in positiver (y)-Richtung von $y = 0$ an durchläuft.

Durchläuft der Pol P′ alle Punkte der (x y)-Ebene, so ist in der Polarflächengleichung (19) $z' = 0$ zu setzen; x′ und y′ können jeden beliebigen Wert zwischen $-\infty$ und $+\infty$ annehmen. Setzt man daher für x′ den Parameter n und für y′ den Parameter m, so erhält man als Gleichung der quadratischen Polarflächen in Bezug auf alle Punkte der (x y)-Ebene

$$s x^2 - s y^2 - n z^2 - 2 s^2 x + 2 n s x - 2 m s y - n s^2 = 0$$

Für variable Parameter n und m stellt diese Gleichung ein Netz von Flächen 2. Grades dar. Analog liessen sich die Gleichungen zweier weiterer Netze von Flächen aufstellen, wenn man den Pol P′ die (x z)-, bezüglich die (y z)-Ebene, durchlaufen lässt.

Wir gehen nun über zur Bestimmung der zweiten Polarfläche der Hauptschnittfläche 3. Grades, bezogen auf einen festen Pol $P'(x' y' z')$; sie ist eine Fläche 1. Grades, also eine Ebene. Wählen wir den Pol P′ im Nullpunkt, so liegt er auf der Hauptschnittfläche und die Polarebene fällt mit der Tangentialebene in ihm zusammen; sie hat die Gleichung $x = 0$. Aus dem gleichen Grunde hat der Flächenpunkt F im Abstand $x = s$ vom Nullpunkt die Polarebene $x = s$.

Allgemein hat die zweite Polarfläche einer Fläche folgende Gleichung:

$$\triangle^2 f = 0 \quad \text{oder}$$

$$x'^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 x' y' \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2 x' z' \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} + 2 x' w' \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial w}$$
$$+ y'^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2 y' z' \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} + 2 y' w' \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial w} + z'^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$
$$+ 2 z' w' \frac{\partial^2 f}{\partial w \partial z} + w'^2 \frac{\partial^2 f}{\partial w^2} = 0$$

Nach der homogenen Flächengleichung

$f(x\,y\,z\,w) = x\,z^2 - s\,x^2\,w + s\,y^2\,w + s^2\,x\,w^2 = 0$ wird nun

$$\frac{\partial f}{\partial x} = z^2 - 2\,s\,x\,w + s^2\,w^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2\,s\,y\,w$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2\,x\,z \qquad \frac{\partial f}{\partial w} = -s\,x^2 + s\,y^2 + 2\,s^2\,x\,w$$

und hieraus

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2\,s \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2\,s \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial w\,\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z} = 2\,z \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial w} = 2\,s\,y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial w^2} = 2\,s^2\,x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial w} = -2\,s\,x + 2\,s^2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2\,x$$

Demnach wird die Gleichung der Polarebene des Punktes $P'\,(x'\,y'\,z')$:

$$(s^2 + z'^2 - 2\,s\,x')\,x + 2\,s\,y'\,y + 2\,x'\,z' \cdot z + s\,(y'^2 - x'^2 + 2\,s\,x') = 0 \quad (23)$$

Nun soll der Pol P' die (x)-Achse durchlaufen, x' also alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ annehmen; wir ersetzen daher x' durch den variabeln Parameter n und $y' = z'$ durch 0. Dann geht die Polarebenengleichung (23) über in

$$x = \frac{n^2 - 2\,s\,n}{s - 2\,n}$$

Diese Gleichung stellt eine Schar von unendlich vielen Polarebenen dar, den unendlich vielen Punkten der (x)-Achse entsprechend; sie sind alle parallel zur (y z)-Ebene, und ihr Abstand von derselben kann alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ annehmen.

Durchläuft der Pol P' die (y)-Achse, so ist für $x' = z' = 0$ und $y' = n$ zu setzen. Die Polarebenengleichung geht dann über in

$$s\,x + 2\,n\,y + n^2 = 0.$$

Betrachtet man in dieser Gleichung n als variabeln Parameter, so stellt sie eine Schar von unendlich vielen den Punkten der (y)-Achse entsprechenden Polarebenen dar, die alle auf der (x y)-Ebene senkrecht stehen. In ihrer Gesamtheit hüllen sie einen Cylinder ein, dessen Erzeugende senkrecht auf der (x y)-Ebene stehen und dessen Gleichung man erhält durch Bestimmung der Enveloppe aller Geraden, die bei variablem n durch die Gleichung $s x + 2 n y + n^2 = 0$ gegeben sind.

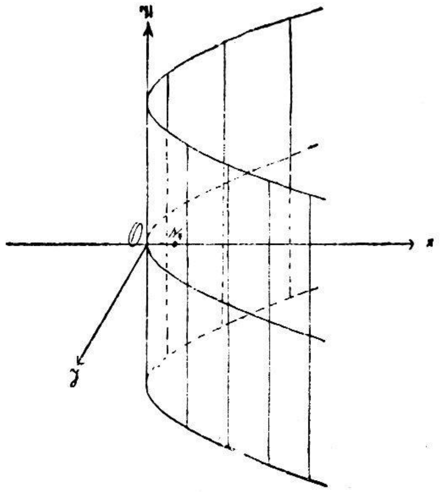

Fig. 19.

Eliminiert man aus den beiden Gleichungen $F(x y n) = s x + 2 n y + n^2 = 0$ und $\frac{\partial F}{\partial n} = y + n = 0$ den Parameter n, so erhält man als Gleichung der Enveloppe die Parabelgleichung $y^2 = s x$. Der umhüllte Cylinder ist also ein parabolischer. Seine Achse wird gebildet durch die positive (x)-Achse; die Scheitelerzeugende fällt zusammen mit der (z)-Achse des Koordinatensystems. Der Halbparameter der Schnittparabel in der (x y)-Ebene ist $\frac{p}{2} = \frac{s}{2}$ (S. Fig. 19).

Schliesslich durchlaufe der Pol P′ noch die (z)-Achse; wir haben dann in der Polarebenengleichung $x' = y' = 0$ und $z' = n$ zu setzen und sie geht über in:

$$s^2 x + n^2 x = 0 \quad \text{oder} \quad x = 0$$

d. h. sämtliche Polarebenen der Hauptschnittfläche, bezogen auf einen beliebigen Punkt der (z)-Achse, fallen zusammen und zwar in der (y z)-Ebene des Koordinatensystems. Dieses Resultat lässt sich auch daraus schliessen, dass die (z)-Achse selber in der Hauptschnittfläche liegt und die (y z)-Ebene in jedem Punkte der (z)-Achse Tangentialebene der Hauptschnittfläche ist.