Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern
Band: - (1911)

Artikel: Zur Geometrie des Dreiecks
Kapitel
Autor: Droz-Farny, A. / Silder, G. / Schenker, O.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-319223

Von den 12 zuletzt eingeführten Geraden schneiden sich daher noch 8 mal je 3 in einem nämlichen Punkte. Nämlich wir haben

$$\left.\begin{array}{l} AP \\ BQ \\ CR \end{array}\right\} = N = \text{Umkreiszentrum des Dreiecks } I\,K\,L,$$

$$\left.\begin{array}{l} Ap \\ Bq \\ Cr \end{array}\right\} = n = \text{Umkreiszentrum des Dreiecks } i\,k\,l,$$

$$\left.\begin{array}{l} AP \\ BQ' \\ Cr' \end{array}\right\} = N' = \text{Umkreiszentrum des Dreiecks } i\,K\,L,$$

$$\left.\begin{array}{l} Ap \\ Bq' \\ CR' \end{array}\right\} = n' = \text{Umkreiszentrum des Dreiecks } I\,k\,l,$$

$$\left.\begin{array}{l} Ap' \\ BQ \\ CR' \end{array}\right\} = N'' = \text{Umkreiszentrum des Dreiecks } I\,k\,L, \qquad 7.$$

$$\left.\begin{array}{l} AP' \\ Bq \\ Cr' \end{array}\right\} = n'' = \text{Umkreiszentrum des Dreiecks } i\,K\,l,$$

$$\left.\begin{array}{l} AP' \\ Bq' \\ CR \end{array}\right\} = N''' = \text{Umkreiszentrum des Dreiecks } I\,K\,l,$$

$$\left.\begin{array}{l} Ap' \\ BQ' \\ Cr \end{array}\right\} = n''' = \text{Umkreiszentrum des Dreiecks } i\,k\,L.$$

Dies vorausgesetzt haben wir auf den in 6 eingeführten 12 Geraden je die Punkte

$$\begin{array}{lll} APNN', & BQNN'', & CRNN''' \\ Apnn', & Bqnn'', & Crnn''' \\ AP'n''N''', & BQ'n'''N', & CR'n'N'' \\ Ap'N''n''', & Bq'N'''n', & Cr'N'n''. \end{array} \qquad 8.$$

§ 3.

Da $AK = Ak = AL = Al$, so liegen die vier Punkte K, k, L, l auf einem Kreise vom Mittelpunkt A. Auf diesem Kreise hat das Viereck K k L l die Eigenschaft, dass von den Gegenseiten K k und L l jede durch den Pol der andern geht. Da ferner $\overline{AK}^2 = AE \cdot AC$, so ist der obige Kreis A orthogonal zum Kreise um B C als Durchmesser.

Betrachten wir einen beliebigen Kreis, dessen Mittelpunkt wir A nennen, ziehen in diesem Kreise irgend eine Sehne L l, deren Pol wir mit B bezeichnen, und legen durch B irgend eine zweite Sehne K k, so liegt der Pol C von K k auf der Polaren von B d. h. auf der Geraden L l. Sei endlich $\left.\begin{matrix}Kk\\Ll\end{matrix}\right\} = H$, so ist H der Pol der Geraden B C.

Dies vorausgesetzt ist die Figur A B C H K k L l identisch mit der in §§ 1 und 2 ebenso bezeichneten Figur. Denn die Geraden B K k und C L l stehen respektive senkrecht zu A C und zu A B, und somit ist H der Höhenpunkt des Dreiecks A B C, und da A K und A k respektive senkrecht zu C K und C k stehen, so sind K und k die Schnittpunkte des Höhenperpendikels B E von A B C mit dem um A C als Durchmesser beschriebenen Kreise, und analog sind L und l die Schnittpunkte des Höhenperpendikels C F von A B C mit dem um A B als Durchmesser beschriebenen Kreise.

Im Viereck K k L l ist der eine Diagonalpunkt $H = \left\{\begin{matrix}Kk,\\Ll\end{matrix}\right.$ und die zwei andern Diagonalpunkte seien u und u′, nämlich

$$u = \left\{\begin{matrix}Kl\\kL\end{matrix}\right., \quad u' = \left\{\begin{matrix}KL\\kl.\end{matrix}\right.$$

Dies vorausgesetzt liegen u und u′ auf den Polaren B C von H in Bezug auf den Kreis A, und man hat $(BC, uu') = -1$.

Die Polare von u′ ist die Gerade H u, und auf dieser liegen die Pole der Geraden u′ K L und u′ k l, d. h.:

Die Punkte $P = \left\{\begin{matrix}BL\\CK\end{matrix}\right.$ und $p = \left\{\begin{matrix}Bl\\Ck\end{matrix}\right.$ liegen auf H u.

Die Polare von u ist die Gerade H u′, und auf dieser liegen die Pole der Geraden u K l und u k L, d. h.:

Die Punkte $P' = \left\{\begin{matrix}Bl\\CK\end{matrix}\right.$ und $p' = \left\{\begin{matrix}BL\\Ck\end{matrix}\right.$ liegen auf H u′.

Wir erhalten also den Satz:

Die Geraden Pp und $P'p'$ gehen durch den Punkt H, und schneiden BC respektive in den Punkten u und u'.

Betrachten wir jetzt ebenso die Vierecke $LlIi$ und $IiKk$, so haben wir die folgenden Resultate:

Seien u, v, w, u', v', w' die Punkte:

$$u = \begin{cases} Kl \\ kL \end{cases}, \quad v = \begin{cases} Li \\ lI \end{cases}, \quad w = \begin{cases} Ik \\ iK \end{cases},$$
$$u' = \begin{cases} KL \\ kl \end{cases}, \quad v' = \begin{cases} LI \\ li \end{cases}, \quad w' = \begin{cases} IK \\ ik \end{cases}, \qquad 9.$$

so liegen u, u' auf der Geraden BC; v, v' auf der Geraden CA; w, w' auf der Geraden AB, und teilen je diese Strecken harmonisch, d. h.:

$$(BC, uu') = -1, \quad (CA, vv') = -1, \quad (AB, ww') = -1. \qquad 10.$$

Ferner gehen die Geraden:

$$Pp, \; P'p', \; Qq, \; Q'q', \; Rr, \; R'r' \qquad 11.$$

alle durch den Höhenpunkt H des Dreiecks ABC, und die Geraden HPp und $HP'p'$ schneiden BC respektive in den Punkten u und u'; die Geraden HQq und $HQ'q'$ schneiden CA in den Punkten v und v'; die Geraden HRr und $HR'r'$ schneiden AB in den Punkten w und w'.

In Folge von 10 haben wir daher die harmonischen Strahlsysteme:

$$\left.\begin{matrix} HB & kK \\ HC & lL \\ \hline Hu & Pp \\ Hu' & P'p' \end{matrix}\right\} = -1, \quad \left.\begin{matrix} HC & lL \\ HA & iI \\ \hline Hv & Qq \\ Hv' & Q'q' \end{matrix}\right\} = -1, \quad \left.\begin{matrix} HA & iI \\ HB & kK \\ \hline Hw & Rr \\ Hw' & R'r' \end{matrix}\right\} = -1. \qquad 12.$$

Das Viereck $PpP'p'$ hat zu Diagonalpunkten B, C, H,
Das Viereck $QqQ'q'$ hat zu Diagonalpunkten C, A, H, 13.
Das Viereck $RrR'r'$ hat zu Diagonalpunkten A, B, H,

und wir haben die harmonischen Punktsysteme:

$$\begin{matrix} (Pp, Hu) = -1, & (Qq, Hv) = -1, & (Rr, Hw) = -1, \\ (P'p', Hu') = -1, & (Q'q', Hv') = -1, & (R'r', Hw') = -1, \end{matrix} \qquad 14.$$

und ferner auf den durch die Ecken A, B, C des Stammdreiecks gehenden Strahlen die harmonischen Punktsysteme:

$$\begin{array}{llll} (AK, Rr') = -1, & (BL, Pp') = -1, & (CI, Qq') = -1, & \\ (Ak, rR') = -1, & (Bl, pP') = -1, & (Ci, qQ') = -1, & \\ (AL, QQ') = -1, & (BI, RR') = -1, & (CK, PP') = -1, & 15. \\ (Al, qq') = -1, & (Bi, rr') = -1, & (Ck, pp') = -1. & \end{array}$$

Durch jeden der Punkte u, v, w, u′, v′, w′ gehen nun 4 Strahlen, die in Folge der harmonischen Relationen 2 je ein System von 4 harmonischen Strahlen bilden:

$$\left.\begin{array}{l} uKl \\ ukL \\ \hline uPpH \\ uu'BC \end{array}\right\} = -1, \quad \left.\begin{array}{l} vLi \\ vlI \\ \hline vQqH \\ vv'CA \end{array}\right\} = -1. \quad \left.\begin{array}{l} wIk \\ wiK \\ \hline wRrH \\ ww'AB \end{array}\right\} = -1, \qquad 16.$$

$$\left.\begin{array}{l} u'KL \\ u'kl \\ \hline u'P'p'H \\ u'uBC \end{array}\right\} = -1, \quad \left.\begin{array}{l} v'LI \\ v'li \\ \hline v'Q'q'H \\ v'vCA \end{array}\right\} = -1, \quad \left.\begin{array}{l} w'IK \\ w'ik \\ \hline w'R'r'H \\ w'wAB \end{array}\right\} = -1. \qquad 17.$$

Durch jede Ecke des Dreiecks ABC gehen 2 Systeme von je 4 harmonischen Strahlen, wo aber das betreffende Höhenperpendikel beiden Systemen angehört:

$$\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} ABww' \\ AHIi \\ \hline AkrR' \\ AKr'R \end{array}\right\} = -1, \quad \left.\begin{array}{l} BCuu' \\ BHKk \\ \hline BlpP' \\ BLp'P \end{array}\right\} = -1, \quad \left.\begin{array}{l} CAvv' \\ CHLl \\ \hline CiqQ' \\ CIq'Q \end{array}\right\} = -1, \\ \left.\begin{array}{l} ACvv' \\ AHIi \\ \hline Alqq' \\ ALQQ' \end{array}\right\} = -1, \quad \left.\begin{array}{l} BAww' \\ BHKk \\ \hline Birr' \\ BIRR' \end{array}\right\} = -1, \quad \left.\begin{array}{l} CBuu' \\ CHLl \\ \hline Ckpp' \\ CKPP' \end{array}\right\} = -1. \end{array} \qquad 18.$$

§ 4.

Die Dreiecke ABC, IKL, ikl liegen perspektivisch mit dem gemeinsamen perspektivischen Zentrum H, und somit liegen die Punkte

$$\left.\begin{array}{r} BC \\ KL \\ kl \end{array}\right\} = u', \quad \left.\begin{array}{r} CA \\ LI \\ li \end{array}\right\} = v', \quad \left.\begin{array}{r} AB \\ IK \\ ik \end{array}\right\} = w'$$

in einer Geraden, der gemeinsamen perspektivischen Axe der