

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern**

Band (Jahr): - **(1911)**

PDF erstellt am: **22.07.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*  
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, [www.library.ethz.ch](http://www.library.ethz.ch)

<http://www.e-periodica.ch>

Hervorgehenden Geraden haben wir 36, zusammen 111 voneinander verschiedene Gerade. Hiezu kommen noch die vier durch den Höhenpunkt H gehenden Geraden 21 und die sechs Geraden in 33, 36, 35. Im ganzen gehören also unserer Figur 121 voneinander verschiedene Gerade an.

§ 8.

Bestimmen wir jetzt die wesentlichsten der oben behandelten Punkte und Geraden mittelst auf das Dreieck A B C bezogenen trimetrischen Normalkoordinaten.

Es ist  $\overline{DI}^2 = BD \cdot DC = bc \cos B \cos C$ . Schreiben wir also zur Abkürzung

$$\alpha = \sqrt{bc \cos B \cos C}, \quad \beta = \sqrt{ca \cos C \cos A}, \quad \gamma = \sqrt{ab \cos A \cos B}, \quad 41.$$

wo wir unter  $\alpha, \beta, \gamma$  stets positive Grössen verstehen, so haben wir

$$\left. \begin{array}{l} Di \\ DI \end{array} \right\} = \pm \alpha, \quad \left. \begin{array}{l} Ek \\ EK \end{array} \right\} = \pm \beta, \quad \left. \begin{array}{l} Fl \\ FL \end{array} \right\} = \pm \gamma. \quad 42.$$

Seien ferner  $\frac{h}{a}, \frac{h}{b}, \frac{h}{c}$  die Höhenperpendikel des Dreiecks A B C

$$DA = \frac{h}{a}, \quad EB = \frac{h}{b}, \quad FC = \frac{h}{c}, \quad 43.$$

wo also

$$\frac{h}{a} = \sqrt{bc \sin B \sin C}, \quad \frac{h}{b} = \sqrt{ca \sin C \sin A}, \quad \frac{h}{c} = \sqrt{ab \sin A \sin B}, \quad 44.$$

so sind die Coordinaten der Punkte i und I

$$\begin{aligned} i \dots x &= \alpha, \quad y = \left( \frac{h}{a} - \alpha \right) \cos C, \quad z = \left( \frac{h}{a} - \alpha \right) \cos B, \\ I \dots x &= -\alpha, \quad y = \left( \frac{h}{a} + \alpha \right) \cos C, \quad z = \left( \frac{h}{a} + \alpha \right) \cos B. \end{aligned}$$

Die eingeführten Grössen  $\alpha, \beta, \gamma, \frac{h}{a}, \frac{h}{b}, \frac{h}{c}$  betreffend wollen wir einige Relationen zusammenstellen, die uns in der Folge von Nutzen sein werden. Wir haben

$$\cos A = \frac{\beta \gamma}{a \alpha}, \quad \cos B = \frac{\gamma \alpha}{b \beta}, \quad \cos C = \frac{\alpha \beta}{c \gamma}, \quad 45.$$

und ferner

$$\begin{aligned} \frac{h^2}{a} - \alpha^2 &= bc \cos A = \frac{b \beta \cdot c \gamma}{a \alpha}, & \frac{h^2}{b} - \beta^2 &= ca \cos B = \frac{c \gamma \cdot a \alpha}{b \beta}, \\ \frac{h^2}{c} - \gamma^2 &= ab \cos C = \frac{a \alpha \cdot b \beta}{c \gamma}, \end{aligned} \quad 46.$$

wie sich entweder aus 41 und 44 ergibt, oder auch direkt aus der Figur, indem  $\frac{h^2}{a} - \alpha^2 = Ai \cdot AI$  die Potenz des Punktes A in Bezug auf den Kreis um BC als Durchmesser darstellt, und somit  $\frac{h^2}{a} - \alpha^2 = AE \cdot AC = bc \cos A$  ist, w · z · z.

Ferner ist

$$\begin{aligned} \left(\frac{h^2}{b} - \beta^2\right)\left(\frac{h^2}{c} - \gamma^2\right) &= a^2 \alpha^2, & \left(\frac{h^2}{c} - \gamma^2\right)\left(\frac{h^2}{a} - \alpha^2\right) &= b^2 \beta^2, \\ \left(\frac{h^2}{a} - \alpha^2\right)\left(\frac{h^2}{b} - \beta^2\right) &= c^2 \gamma^2. \end{aligned} \quad 47.$$

Stellt  $\Delta$  den Inhalt des Dreiecks ABC und R den Radius des Umkreises dar, so merken wir uns noch

$$\frac{h}{a} = \frac{2\Delta}{a} = \frac{bc}{2R}, \quad \frac{h}{b} = \frac{2\Delta}{b} = \frac{ca}{2R}, \quad \frac{h}{c} = \frac{2\Delta}{c} = \frac{ab}{2R},$$

und 48.

$$\frac{4\Delta}{abc} = \frac{1}{R}, \quad R = \frac{\Delta}{a \sin B \sin C}, \quad \text{u. s. w.}$$

Endlich haben wir

$$\begin{aligned} a \alpha^3 + bc \beta \gamma &= 2\Delta \frac{h}{a} \alpha, & b \beta^3 + ca \gamma \alpha &= 2\Delta \frac{h}{b} \beta, \\ c \gamma^3 + ab \alpha \beta &= 2\Delta \frac{h}{c} \gamma. \end{aligned} \quad 49.$$

Die erste dieser Formeln erhält man sehr leicht, wenn man linker Hand  $\alpha^2 = bc \cos B \cos C$  und  $\beta \gamma = a \alpha \cos A$  substituiert.

Mit Benutzung von 45 ergaben sich nun aus den obigen Coordinaten von i und I für diese und die analogen Punkte die folgenden Coordinatenverhältnisse

	x,	y,	z
i	$\frac{1}{\frac{h}{a} - \alpha}$ ,	$\frac{\beta}{c\gamma}$ ,	$\frac{\gamma}{b\beta}$ ,
I	$-\frac{1}{\frac{h}{a} + \alpha}$ ,	$\frac{\beta}{c\gamma}$ ,	$\frac{\gamma}{b\beta}$ ,
k	$\frac{\alpha}{c\gamma}$ ,	$\frac{1}{\frac{h}{b} - \beta}$ ,	$\frac{\gamma}{a\alpha}$ ,
K	$\frac{\alpha}{c\gamma}$ ,	$-\frac{1}{\frac{h}{b} + \beta}$ ,	$\frac{\gamma}{a\alpha}$ ,
l	$\frac{\alpha}{b\beta}$ ,	$\frac{\beta}{a\alpha}$ ,	$\frac{1}{\frac{h}{c} - \gamma}$ ,
L	$\frac{\alpha}{b\beta}$ ,	$\frac{\beta}{a\alpha}$ ,	$-\frac{1}{\frac{h}{c} + \gamma}$ .

50.

Hieraus

$$\text{Gerade Ck} \dots \frac{x}{y} = \frac{\alpha \left( \frac{h}{b} - \beta \right)}{c\gamma}, \quad \text{Gerade CK} \dots \frac{x}{y} = - \frac{\alpha \left( \frac{h}{b} + \beta \right)}{c\gamma}$$

$$\text{Gerade Bl} \dots \frac{z}{x} = \frac{b\beta}{\alpha \left( \frac{h}{c} - \gamma \right)}, \quad \text{Gerade BL} \dots \frac{z}{x} = - \frac{b\beta}{\alpha \left( \frac{h}{c} + \gamma \right)}$$

Für die Coordinaten der Punkte  $p = \begin{Bmatrix} \text{Ck} \\ \text{Bl} \end{Bmatrix}$ ,  $P = \begin{Bmatrix} \text{CK} \\ \text{BL} \end{Bmatrix}$ ,  
 $p' = \begin{Bmatrix} \text{Ck} \\ \text{BL} \end{Bmatrix}$ ,  $P' = \begin{Bmatrix} \text{CK} \\ \text{Bl} \end{Bmatrix}$ , und der hieraus mittelst des Buchstaben-  
 rades hervorgehenden v. 4 erhalten wir daher das folgende  
 Tableau:

	x,	y,	z		x,	y,	z
p	$\alpha,$	$\frac{c\gamma}{h-b-\beta},$	$\frac{b\beta}{h-c-\gamma}$	p'	$\alpha,$	$\frac{c\gamma}{h-b-\beta},$	$-\frac{b\beta}{h-c+\gamma}$
q	$\frac{c\gamma}{h-a-\alpha},$	$\beta,$	$\frac{a\alpha}{h-c-\gamma}$	q'	$-\frac{c\gamma}{h-a+\alpha},$	$\beta,$	$\frac{a\alpha}{h-c-\gamma}$
r	$\frac{b\beta}{h-a-\alpha},$	$\frac{a\alpha}{h-b-\beta},$	$\gamma$	r'	$\frac{b\beta}{h-a-\alpha},$	$-\frac{a\alpha}{h-b+\beta},$	$\gamma$
P	$-\alpha,$	$\frac{c\gamma}{h-b+\beta},$	$\frac{b\beta}{h-c+\gamma}$	P'	$\alpha,$	$-\frac{c\gamma}{h-b+\beta},$	$\frac{b\beta}{h-a-\gamma}$
Q	$\frac{c\gamma}{h-a+\alpha},$	$-\beta,$	$\frac{a\alpha}{h-c+\gamma}$	Q'	$\frac{c\gamma}{h-a-\alpha},$	$\beta,$	$-\frac{a\alpha}{h-c+\gamma}$
R	$\frac{b\beta}{h-a+\alpha},$	$\frac{a\alpha}{h-b+\beta},$	$-\gamma$	R'	$-\frac{b\beta}{h-a+\alpha},$	$\frac{a\alpha}{h-b-\beta},$	$\gamma$

51.

und hieraus kommt für die Strahlen Ap, AP, Ap', AP' und die daraus durch das Buchstabenrad hervorgehenden:

$$Ap \dots \frac{y}{z} = \frac{c\gamma \left( \frac{h}{c} - \gamma \right)}{b\beta \left( \frac{h}{b} - \beta \right)}, \quad Bq \dots \frac{z}{x} = \frac{a\alpha \left( \frac{h}{a} - \alpha \right)}{c\gamma \left( \frac{h}{c} - \gamma \right)},$$

$$Cr \dots \frac{x}{y} = \frac{b\beta \left( \frac{h}{b} - \beta \right)}{a\alpha \left( \frac{h}{a} - \alpha \right)},$$

$$AP \dots \frac{y}{z} = \frac{c\gamma \left( \frac{h}{c} + \gamma \right)}{b\beta \left( \frac{h}{b} + \beta \right)}, \quad BQ \dots \frac{z}{x} = \frac{a\alpha \left( \frac{h}{a} + \alpha \right)}{c\gamma \left( \frac{h}{c} + \gamma \right)},$$

52.

$$\begin{aligned}
 CR \dots \frac{x}{y} &= \frac{b\beta \left( \frac{h}{b} + \beta \right)}{a\alpha \left( \frac{h}{a} + \alpha \right)}, \\
 Ap' \dots \frac{y}{z} &= -\frac{c\gamma \left( \frac{h}{c} + \gamma \right)}{b\beta \left( \frac{h}{b} - \beta \right)}, \quad Bq' \dots \frac{z}{x} = -\frac{a\alpha \left( \frac{h}{a} + \alpha \right)}{c\gamma \left( \frac{h}{c} - \gamma \right)}, \\
 Cr' \dots \frac{x}{y} &= -\frac{b\beta \left( \frac{h}{b} + \beta \right)}{a\alpha \left( \frac{h}{a} - \alpha \right)}, \\
 Ap' \dots \frac{x}{y} &= -\frac{c\gamma \left( \frac{h}{c} - \gamma \right)}{b\beta \left( \frac{h}{b} + \beta \right)}, \quad BQ' \dots \frac{z}{x} = -\frac{a\alpha \left( \frac{h}{a} - \alpha \right)}{c\gamma \left( \frac{h}{c} + \gamma \right)}, \\
 CR' \dots \frac{x}{y} &= -\frac{b\beta \left( \frac{h}{b} - \beta \right)}{a\alpha \left( \frac{h}{a} + \alpha \right)}.
 \end{aligned}$$

Die Strahlen Ap, Bq, Cr schneiden sich in einem nämlichen Punkte n, wo

$$n \dots x:y:z = \frac{1}{a\alpha \left( \frac{h}{a} - \alpha \right)} : \frac{1}{b\beta \left( \frac{h}{b} - \beta \right)} : \frac{1}{c\gamma \left( \frac{h}{c} - \gamma \right)}.$$

Die Strahlen AP, BQ, CR schneiden sich in einem nämlichen Punkte N, wo

$$N \dots x:y:z = \frac{1}{a\alpha \left( \frac{h}{a} + \alpha \right)} : \frac{1}{b\beta \left( \frac{h}{b} + \beta \right)} : \frac{1}{c\gamma \left( \frac{h}{c} + \gamma \right)}.$$

Die Strahlen Ap, Bq', CR' schneiden sich in einem nämlichen Punkte n' wo

$$n' \dots x:y:z = -\frac{1}{a\alpha \left( \frac{h}{a} + \alpha \right)} : \frac{1}{b\beta \left( \frac{h}{b} - \beta \right)} : \frac{1}{c\gamma \left( \frac{h}{c} - \gamma \right)}. \quad 53.$$

Die Strahlen AP, BQ', Cr' schneiden sich in einem  
 nämlichen Punkte N', wo 53.

$$N' \dots x:y:z = -\frac{1}{a\alpha\left(\frac{h}{a}-\alpha\right)} : \frac{1}{b\beta\left(\frac{h}{b}+\beta\right)} : \frac{1}{c\gamma\left(\frac{h}{c}+\gamma\right)}.$$

Die Strahlen AP', Bq, Cr' schneiden sich in einem  
 nämlichen Punkte n'', wo

$$n'' \dots x:y:z = \frac{1}{a\alpha\left(\frac{h}{a}-\alpha\right)} : -\frac{1}{b\beta\left(\frac{h}{b}+\beta\right)} : \frac{1}{c\gamma\left(\frac{h}{c}-\gamma\right)}.$$

Die Strahlen Ap', BQ, CR' schneiden sich in einem  
 nämlichen Punkte N'', wo

$$N'' \dots x:y:z = \frac{1}{a\alpha\left(\frac{h}{a}+\alpha\right)} : -\frac{1}{b\beta\left(\frac{h}{b}-\beta\right)} : \frac{1}{c\gamma\left(\frac{h}{c}+\gamma\right)}.$$

Die Strahlen Ap', BQ', Cr schneiden sich in einem  
 nämlichen Punkte n''', wo

$$n''' \dots x:y:z = \frac{1}{a\alpha\left(\frac{h}{a}-\alpha\right)} : \frac{1}{b\beta\left(\frac{h}{b}-\beta\right)} : -\frac{1}{c\gamma\left(\frac{h}{c}+\gamma\right)}.$$

Die Strahlen AP', Bq', CR schneiden sich in einem  
 nämlichen Punkte N''', wo

$$N''' \dots x:y:z = \frac{1}{a\alpha\left(\frac{h}{a}+\alpha\right)} : \frac{1}{b\beta\left(\frac{h}{b}+\beta\right)} : -\frac{1}{c\gamma\left(\frac{h}{c}-\gamma\right)}.$$

Als Gleichung der Geraden nN ergibt sich hieraus

$$\begin{vmatrix} a\alpha x, & b\beta y, & c\gamma z \\ \frac{1}{\frac{h}{a}-\alpha}, & \frac{1}{\frac{h}{b}-\beta}, & \frac{1}{\frac{h}{c}-\gamma} \\ \frac{1}{\frac{h}{a}+\alpha}, & \frac{1}{\frac{h}{b}+\beta}, & \frac{1}{\frac{h}{c}+\gamma} \end{vmatrix} = 0,$$

d. h.:  $a\alpha \mathfrak{A}x + b\beta \mathfrak{B}y + c\gamma \mathfrak{C}z = 0$ , wo

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{\left(\frac{h}{b} - \beta\right)\left(\frac{h}{c} + \gamma\right)} - \frac{1}{\left(\frac{h}{b} + \beta\right)\left(\frac{h}{c} - \gamma\right)} = \frac{2\left(\beta \frac{h}{c} - \gamma \frac{h}{b}\right)}{\left(\frac{h^2}{b} - \beta^2\right)\left(\frac{h^2}{c} - \gamma^2\right)}$$

und wo  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{C}$  sich aus  $\mathfrak{A}$  mittelst des Buchstabenrades ergeben. In Folge von 47 und 48 kommt nun  $a \alpha \mathfrak{A} = \frac{4 \Delta (b \beta - c \gamma)}{a b c \alpha} = \frac{b \beta - c \gamma}{R \alpha}$ , und wir erhalten die erste der folgenden Gleichungen

$$\begin{aligned} \text{Gerade } n N \dots & \frac{(b \beta - c \gamma) x}{\alpha} + \frac{(c \gamma - a \alpha) y}{\beta} + \frac{(a \alpha - b \beta) z}{\gamma} = 0 \\ \text{Gerade } n' N' \dots & \frac{(b \beta - c \gamma) x}{\alpha} - \frac{(c \gamma + a \alpha) y}{\beta} + \frac{(a \alpha + b \beta) z}{\gamma} = 0 \\ \text{Gerade } n'' N'' \dots & \frac{(b \beta + c \gamma) x}{\alpha} + \frac{(c \gamma - a \alpha) y}{\beta} - \frac{(a \alpha + b \beta) z}{\gamma} = 0 \\ \text{Gerade } n''' N''' \dots & - \frac{(b \beta + c \gamma) x}{\alpha} + \frac{(c \gamma + a \alpha) y}{\beta} + \frac{(a \alpha - b \beta) z}{\gamma} = 0. \end{aligned} \tag{54}$$

Die Gleichungen der Geraden  $n' N'$ ,  $n'' N''$ ,  $n''' N'''$  entstehen aus der Gleichung der Geraden  $n N$ , wenn in dieser  $\alpha$  in  $-\alpha$ , oder  $\beta$  in  $-\beta$ , oder  $\gamma$  in  $-\gamma$  umgesetzt wird.

Allen diesen vier Geraden in 54 genügt der Punkt

$$x : y : z = a \alpha^2 : b \beta^2 : c \gamma^2.$$

Dieses ist aber der Höhenpunkt  $H$  des Dreiecks  $ABC$ , denn  $H$  als Winkelgegenpunkt des Umkreiscentrums  $O$  hat die Coordinaten  $x : y : z = \frac{1}{\cos A} : \frac{1}{\cos B} : \frac{1}{\cos C}$ , das heisst gemäss 45

$$x \sim \frac{a \alpha}{\beta \gamma} = \frac{a \alpha^2}{\alpha \beta \gamma}, \text{ und somit } x : y : z = a \alpha^2 : b \beta^2 : c \gamma^2, \text{ w. z. z.}$$

Die vier Geraden  $n N$ ,  $n' N'$ ,  $n'' N''$ ,  $n''' N'''$  gehen daher alle durch den Höhenpunkt  $H$  des Dreiecks  $ABC$ .

Auf diesen Geraden liegen auch respektive die Punkte  $x : y : z = \alpha : \beta : \gamma$ ,  $x : y : z = -\alpha : \beta : \gamma$ ,  $x : y : z = \alpha : -\beta : \gamma$ ,  $x : y : z = \alpha : \beta : -\gamma$ , deren Bedeutung wir in § 9 kennen lernen werden.

### § 9.

Bilden wir jetzt die Gleichung der Geraden  $p P$ .