hervorgehenden Geraden haben wir 36, zusammen 111 voneinander verschiedene Gerade. Hiezu kommen noch die vier durch den Höhenpunkt H gehenden Geraden 21 und die sechs Geraden in 33, 36, 35. Im ganzen gehören also unserer Figur 121 voneinander verschiedene Gerade an.

§ 8.

Bestimmen wir jetzt die wesentlichsten der oben behandelten Punkte und Geraden mittelst auf das Dreieck A B C bezogenen trimetrischen Normalcoordinaten.

Es ist $\overline{DI}^2 = BD \cdot DC = bc \cos B \cos C$. Schreiben wir also zur Abkürzung

$$\alpha = \sqrt{bc \cos B \cos C},\ \beta = \sqrt{ca \cos C \cos A},\ \gamma = \sqrt{ab \cos A \cos B}, \qquad 41.$$

wo wir unter α, β, γ stets positive Grössen verstehen, so haben wir

$$\left.\begin{matrix} Di \\ DI \end{matrix}\right\} = \pm \alpha,\ \left.\begin{matrix} Ek \\ EK \end{matrix}\right\} = \pm \beta,\ \left.\begin{matrix} Fl \\ FL \end{matrix}\right\} = \pm \gamma. \qquad 42.$$

Seien ferner h_a, h_b, h_c, die Höhenperpendikel des Dreiecks A B C

$$DA = h_a,\ EB = h_b,\ FC = h_c, \qquad 43.$$

wo also

$$h_a = \sqrt{bc \sin B \sin C},\ h_b = \sqrt{ca \sin C \sin A},\ h_c = \sqrt{ab \sin A \sin B}, \qquad 44.$$

so sind die Coordinaten der Punkte i und I

$$i \ldots x = \alpha,\ y = \left(h_a - \alpha\right) \cos C,\ z = \left(h_a - \alpha\right) \cos B,$$

$$I \ldots x = -\alpha,\ y = \left(h_a + \alpha\right) \cos C,\ z = \left(h_a + \alpha\right) \cos B.$$

Die eingeführten Grössen $\alpha, \beta\ \gamma, h_a, h_b, h_c$ betreffend wollen wir einige Relationen zusammenstellen, die uns in der Folge von Nutzen sein werden. Wir haben

$$\cos A = \frac{\beta\gamma}{a\alpha}, \quad \cos B = \frac{\gamma\alpha}{b\beta}, \quad \cos C = \frac{\alpha\beta}{c\gamma}, \tag{45.}$$

und ferner

$$h_a^2 - \alpha^2 = bc\cos A = \frac{b\beta \cdot c\gamma}{a\alpha}, \quad h_b^2 - \beta^2 = ca\cos B = \frac{c\gamma \cdot a\alpha}{b\beta}, \quad h_c^2 - \gamma^2 = ab\cos C = \frac{a\alpha \cdot b\beta}{c\gamma}, \tag{46.}$$

wie sich entweder aus 41 und 44 ergibt, oder auch direkt aus der Figur, indem $h_a^2 - \alpha^2 = Ai \cdot AI$ die Potenz des Punktes A in Bezug auf den Kreis um BC als Durchmesser darstellt, und somit $h_a^2 - \alpha^2 = AE \,.\, AC = bc\cos A$ ist, w · z · z.

Ferner ist

$$\left(h_b^2 - \beta^2\right)\left(h_c^2 - \gamma^2\right) = a^2\alpha^2, \quad \left(h_c^2 - \gamma^2\right)\left(h_a^2 - \alpha^2\right) = b^2\beta^2, \quad \left(h_a^2 - \alpha^2\right)\left(h_b^2 - \beta^2\right) = c^2\gamma^2. \tag{47.}$$

Stellt $\triangle$ den Inhalt des Dreiecks ABC und R den Radius des Umkreises dar, so merken wir uns noch

$$h_a = \frac{2\triangle}{a} = \frac{bc}{2R}, \quad h_b = \frac{2\triangle}{b} = \frac{ca}{2R}, \quad h_c = \frac{2\triangle}{c} = \frac{ab}{2R},$$

und

$$\frac{4\triangle}{abc} = \frac{1}{R}, \quad R = \frac{\triangle}{a\sin B\sin C}, \text{ u. s. w.} \tag{48.}$$

Endlich haben wir

$$a\alpha^3 + bc\beta\gamma = 2\triangle h_a \alpha, \quad b\beta^3 + ca\gamma\alpha = 2\triangle h_b \beta, \quad c\gamma^3 + ab\alpha\beta = 2\triangle h_c \gamma. \tag{49.}$$

Die erste dieser Formeln erhält man sehr leicht, wenn man linker Hand $\alpha^2 = bc\cos B\cos C$ und $\beta\gamma = a\alpha\cos A$ substituiert.

Mit Benutzung von 45 ergaben sich nun aus den obigen Coordinaten von i und I für diese und die analogen Punkte die folgenden Coordinatenverhältnisse

$$
\begin{array}{c|ccc}
 & x, & y, & z \\
\hline
i & \dfrac{1}{\frac{h}{a}-\alpha}, & \dfrac{\beta}{c\gamma}, & \dfrac{\gamma}{b\beta}, \\[2ex]
I & -\dfrac{1}{\frac{h}{a}+\alpha}, & \dfrac{\beta}{c\gamma}, & \dfrac{\gamma}{b\beta}, \\[2ex]
k & \dfrac{\alpha}{c\gamma}, & \dfrac{1}{\frac{h}{b}-\beta}, & \dfrac{\gamma}{a\alpha}, \\[2ex]
K & \dfrac{\alpha}{c\gamma}, & -\dfrac{1}{\frac{h}{b}+\beta}, & \dfrac{\gamma}{a\alpha}, \\[2ex]
l & \dfrac{\alpha}{b\beta}, & \dfrac{\beta}{a\alpha}, & \dfrac{1}{\frac{h}{c}-\gamma}, \\[2ex]
L & \dfrac{\alpha}{b\beta}, & \dfrac{\beta}{a\alpha}, & -\dfrac{1}{\frac{h}{c}+\gamma}.
\end{array}
\tag{50}
$$

Hieraus

$$\text{Gerade } Ck \,..\, \frac{x}{y} = \frac{\alpha\left(\frac{h}{b}-\beta\right)}{c\gamma}, \quad \text{Gerade } CK \,..\, \frac{x}{y} = -\frac{\alpha\left(\frac{h}{b}+\beta\right)}{c\gamma},$$

$$\text{Gerade } Bl \,..\, \frac{z}{x} = \frac{b\beta}{\alpha\left(\frac{h}{c}-\gamma\right)}, \quad \text{Gerade } BL \,..\, \frac{z}{x} = -\frac{b\beta}{\alpha\left(\frac{h}{c}+\gamma\right)}.$$

Für die Coordinaten der Punkte $p = \begin{cases} Ck \\ Bl \end{cases}$, $P = \begin{cases} CK \\ BL \end{cases}$, $p' = \begin{cases} Ck \\ BL \end{cases}$, $P' = \begin{cases} CK \\ Bl \end{cases}$, und der hieraus mittelst des Buchstabenrades hervorgehenden v. 4 erhalten wir daher das folgende Tableau:

	x,	y,	z		x,	y,	z
p	α,	$\frac{c\gamma}{\frac{h}{b}-\beta}$,	$\frac{b\beta}{\frac{h}{c}-\gamma}$	p′	α,	$\frac{c\gamma}{\frac{h}{b}-\beta}$,	$-\frac{b\beta}{\frac{h}{c}+\gamma}$
q	$\frac{c\gamma}{\frac{h}{a}-\alpha}$,	β,	$\frac{a\alpha}{\frac{h}{c}-\gamma}$	q′	$-\frac{c\gamma}{\frac{h}{a}+\alpha}$,	β,	$\frac{a\alpha}{\frac{h}{c}-\gamma}$
r	$\frac{b\beta}{\frac{h}{a}-\alpha}$,	$\frac{a\alpha}{\frac{h}{b}-\beta}$,	γ	r′	$\frac{b\beta}{\frac{h}{a}-\alpha}$,	$-\frac{a\alpha}{\frac{h}{b}+\beta}$,	γ
P	$-\alpha$,	$\frac{c\gamma}{\frac{h}{b}+\beta}$,	$\frac{b\beta}{\frac{h}{c}+\gamma}$	P′	α,	$-\frac{c\gamma}{\frac{h}{b}+\beta}$,	$\frac{b\beta}{\frac{h}{a}-\gamma}$
Q	$\frac{c\gamma}{\frac{h}{a}+\alpha}$,	$-\beta$,	$\frac{a\alpha}{\frac{h}{c}+\gamma}$	Q′	$\frac{c\gamma}{\frac{h}{a}-\alpha}$,	β,	$-\frac{a\alpha}{\frac{h}{c}+\gamma}$
R	$\frac{b\beta}{\frac{h}{a}+\alpha}$,	$\frac{a\alpha}{\frac{h}{b}+\beta}$,	$-\gamma$	R′	$-\frac{b\beta}{\frac{h}{a}+\alpha}$,	$\frac{a\alpha}{\frac{h}{b}-\beta}$,	γ

51.

und hieraus kommt für die Strahlen A p, A P, A p′, A P′ und die daraus durch das Buchstabenrad hervorgehenden:

$$\text{A p} \,..\, \frac{y}{z} = \frac{c\gamma\left(\frac{h}{c}-\gamma\right)}{b\beta\left(\frac{h}{b}-\beta\right)}, \quad \text{B q} \,..\, \frac{z}{x} = \frac{a\alpha\left(\frac{h}{a}-\alpha\right)}{c\gamma\left(\frac{h}{c}-\gamma\right)},$$

$$\text{C r} \,..\, \frac{x}{y} = \frac{b\beta\left(\frac{h}{b}-\beta\right)}{a\alpha\left(\frac{h}{a}-\alpha\right)},$$

$$\text{A P} \,..\, \frac{y}{z} = \frac{c\gamma\left(\frac{h}{c}+\gamma\right)}{b\beta\left(\frac{h}{b}+\beta\right)}, \quad \text{B Q} \,..\, \frac{z}{x} = \frac{a\alpha\left(\frac{h}{a}+\alpha\right)}{c\gamma\left(\frac{h}{c}+\gamma\right)}, \qquad 52.$$

$$CR\ldots\frac{x}{y}=\frac{b\beta\left(\frac{h}{b}+\beta\right)}{a\alpha\left(\frac{h}{a}+\alpha\right)},\tag{52.}$$

$$Ap'\ldots\frac{y}{z}=-\frac{c\gamma\left(\frac{h}{c}+\gamma\right)}{b\beta\left(\frac{h}{b}-\beta\right)},\quad Bq'\ldots\frac{z}{x}=-\frac{a\alpha\left(\frac{h}{a}+\alpha\right)}{c\gamma\left(\frac{h}{c}-\gamma\right)},$$

$$Cr'\ldots\frac{x}{y}=-\frac{b\beta\left(\frac{h}{b}+\beta\right)}{a\alpha\left(\frac{h}{a}-\alpha\right)},$$

$$AP'\ldots\frac{x}{y}=-\frac{c\gamma\left(\frac{h}{c}-\gamma\right)}{b\beta\left(\frac{h}{b}+\beta\right)},\quad BQ'\ldots\frac{z}{x}=-\frac{a\alpha\left(\frac{h}{a}-\alpha\right)}{c\gamma\left(\frac{h}{c}+\gamma\right)},$$

$$CR'\ldots\frac{x}{y}=-\frac{b\beta\left(\frac{h}{b}-\beta\right)}{a\alpha\left(\frac{h}{\alpha}+\alpha\right)}.$$

Die Strahlen Ap, Bq, Cr schneiden sich in einem nämlichen Punkte n, wo

$$n\ldots x:y:z=\frac{1}{a\alpha\left(\frac{h}{a}-\alpha\right)}:\frac{1}{b\beta\left(\frac{h}{b}-\beta\right)}:\frac{1}{c\gamma\left(\frac{h}{c}-\gamma\right)}.$$

Die Strahlen AP, BQ, CR schneiden sich in einem nämlichen Punkte N, wo

$$N\ldots x:y:z=\frac{1}{a\alpha\left(\frac{h}{a}+\alpha\right)}:\frac{1}{b\beta\left(\frac{h}{b}+\beta\right)}:\frac{1}{c\gamma\left(\frac{h}{c}+\gamma\right)}.$$

Die Strahlen Ap, Bq', CR' schneiden sich in einem nämlichen Punkte n' wo

$$n'\ldots x:y:z=-\frac{1}{a\alpha\left(\frac{h}{a}+\alpha\right)}:\frac{1}{b\beta\left(\frac{h}{b}-\beta\right)}:\frac{1}{c\gamma\left(\frac{h}{c}-\gamma\right)}.\tag{53.}$$

Die Strahlen AP, BQ′, Cr′ schneiden sich in einem nämlichen Punkte N′, wo 53.

$$N' \ldots x:y:z = -\frac{1}{a\alpha\left(\frac{h}{a}-\alpha\right)} : \frac{1}{b\beta\left(\frac{h}{b}+\beta\right)} : \frac{1}{c\gamma\left(\frac{h}{c}+\gamma\right)}.$$

Die Strahlen AP′, Bq, Cr′ schneiden sich in einem nämlichen Punkte n″, wo

$$n'' \ldots x:y:z = \frac{1}{a\alpha\left(\frac{h}{a}-\alpha\right)} : -\frac{1}{b\beta\left(\frac{h}{b}+\beta\right)} : \frac{1}{c\gamma\left(\frac{h}{c}-\gamma\right)}.$$

Die Strahlen Ap′, BQ, CR′ schneiden sich in einem nämlichen Punkte N″, wo

$$N'' \ldots x:y:z = \frac{1}{a\alpha\left(\frac{h}{a}+\alpha\right)} : -\frac{1}{b\beta\left(\frac{h}{b}-\beta\right)} : \frac{1}{c\gamma\left(\frac{h}{c}+\gamma\right)}.$$

Die Strahlen Ap′, BQ′, Cr schneiden sich in einem nämlichen Punkte n‴, wo

$$n''' \ldots x:y:z = \frac{1}{a\alpha\left(\frac{h}{a}-\alpha\right)} : \frac{1}{b\beta\left(\frac{h}{b}-\beta\right)} : -\frac{1}{c\gamma\left(\frac{h}{c}+\gamma\right)}.$$

Die Strahlen AP′, Bq′, CR schneiden sich in einem nämlichen Punkte N‴, wo

$$N''' \ldots x:y:z = \frac{1}{a\alpha\left(\frac{h}{a}+\alpha\right)} : \frac{1}{b\beta\left(\frac{h}{b}+\beta\right)} : -\frac{1}{c\gamma\left(\frac{h}{c}-\gamma\right)}.$$

Als Gleichung der Geraden nN ergibt sich hieraus

$$\begin{vmatrix} a\alpha x, & b\beta y, & c\gamma z \\ \frac{1}{\frac{h}{a}-\alpha}, & \frac{1}{\frac{h}{b}-\beta}, & \frac{1}{\frac{h}{c}-\gamma} \\ \frac{1}{\frac{h}{a}+\alpha}, & \frac{1}{\frac{h}{b}+\beta}, & \frac{1}{\frac{h}{c}+\gamma} \end{vmatrix} = o,$$

d. h.: $a\alpha\mathfrak{A}x + b\beta\mathfrak{B}y + c\gamma\mathfrak{C}x = o$, wo

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{\left(\frac{h}{b} - \beta\right)\left(\frac{h}{c} + \gamma\right)} - \frac{1}{\left(\frac{h}{b} + \beta\right)\left(\frac{h}{c} - \gamma\right)} = \frac{2\left(\beta\frac{h}{c} - \gamma\frac{h}{b}\right)}{\left(\frac{h^2}{b} - \beta^2\right)\left(\frac{h^2}{c} - \gamma^2\right)}$$

und wo $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ sich aus $\mathfrak{A}$ mittelst des Buchstabenrades ergeben. In Folge von 47 und 48 kommt nun $a\,\alpha\,\mathfrak{A} = \frac{4\triangle(b\,\beta - c\,\gamma)}{a\,b\,c\,\alpha} = \frac{b\,\beta - c\,\gamma}{R\,\alpha}$, und wir erhalten die erste der folgenden Gleichungen

$$\begin{array}{ll} \text{Gerade n N} \ldots & \frac{(b\,\beta - c\,\gamma)\,x}{\alpha} + \frac{(c\,\gamma - a\,\alpha)\,y}{\beta} + \frac{(a\,\alpha - b\,\beta)\,z}{\gamma} = o \\ \text{Gerade n}'\,\text{N}' \ldots & \frac{(b\,\beta - c\,\gamma)\,x}{\alpha} - \frac{(c\,\gamma + a\,\alpha)\,y}{\beta} + \frac{(a\,\alpha + b\,\beta)\,z}{\gamma} = o \\ \text{Gerade n}''\,\text{N}'' \ldots & \frac{(b\,\beta + c\,\gamma)\,x}{\alpha} + \frac{(c\,\gamma - a\,\alpha)\,y}{\beta} - \frac{(a\,\alpha + b\,\beta)\,z}{\gamma} = o \\ \text{Gerade n}'''\,\text{N}''' \ldots & -\frac{(b\,\beta + c\,\gamma)\,x}{\alpha} + \frac{(c\,\gamma + a\,\alpha)\,y}{\beta} + \frac{(a\,\alpha - b\,\beta)\,z}{\gamma} = o. \end{array} \quad 54.$$

Die Gleichungen der Geraden n′ N′, n″ N″, n‴ N‴ entstehen aus der Gleichung der Geraden n N, wenn in dieser α in $-\alpha$, oder β in $-\beta$, oder γ in $-\gamma$ umgesetzt wird.

Allen diesen vier Geraden in 54 genügt der Punkt

$$x : y : z = a\,\alpha^2 : b\,\beta^2 : c\,\gamma^2.$$

Dieses ist aber der Höhenpunkt H des Dreiecks A B C, denn H als Winkelgegenpunkt des Umkreiszentrums O hat die Coordinaten $x : y : z = \frac{1}{\cos A} : \frac{1}{\cos B} : \frac{1}{\cos C}$, das heisst gemäss 45 $x \sim \frac{a\,\alpha}{\beta\,\gamma} = \frac{a\,\alpha^2}{\alpha\,\beta\,\gamma}$, und somit $x : y : z = a\,\alpha^2 : b\,\beta^2 : c\,\gamma^2$, w. z. z.

Die vier Geraden n N, n′ N′, n″ N″, n‴ N‴ gehen daher alle durch den Höhenpunkt H des Dreiecks ABC.

Auf diesen Geraden liegen auch respektive die Punkte $x : y : z = \alpha : \beta : \gamma$, $x : y : z = -\alpha : \beta : \gamma$, $x : y : z = \alpha : -\beta : \gamma$, $x : y : z = \alpha : \beta : -\gamma$, deren Bedeutung wir in § 9 kennen lernen werden.

§ 9.

Bilden wir jetzt die Gleichung der Geraden p P.