

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern**

Band (Jahr): - **(1911)**

PDF erstellt am: **22.07.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{\left(\frac{h}{b} - \beta\right)\left(\frac{h}{c} + \gamma\right)} - \frac{1}{\left(\frac{h}{b} + \beta\right)\left(\frac{h}{c} - \gamma\right)} = \frac{2\left(\beta \frac{h}{c} - \gamma \frac{h}{b}\right)}{\left(\frac{h^2}{b} - \beta^2\right)\left(\frac{h^2}{c} - \gamma^2\right)}$$

und wo  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{C}$  sich aus  $\mathfrak{A}$  mittelst des Buchstabenrades ergeben. In Folge von 47 und 48 kommt nun  $a \alpha \mathfrak{A} = \frac{4 \Delta (b \beta - c \gamma)}{a b c \alpha} = \frac{b \beta - c \gamma}{R \alpha}$ , und wir erhalten die erste der folgenden Gleichungen

$$\begin{aligned} \text{Gerade } n N \dots & \frac{(b \beta - c \gamma) x}{\alpha} + \frac{(c \gamma - a \alpha) y}{\beta} + \frac{(a \alpha - b \beta) z}{\gamma} = 0 \\ \text{Gerade } n' N' \dots & \frac{(b \beta - c \gamma) x}{\alpha} - \frac{(c \gamma + a \alpha) y}{\beta} + \frac{(a \alpha + b \beta) z}{\gamma} = 0 \\ \text{Gerade } n'' N'' \dots & \frac{(b \beta + c \gamma) x}{\alpha} + \frac{(c \gamma - a \alpha) y}{\beta} - \frac{(a \alpha + b \beta) z}{\gamma} = 0 \\ \text{Gerade } n''' N''' \dots & - \frac{(b \beta + c \gamma) x}{\alpha} + \frac{(c \gamma + a \alpha) y}{\beta} + \frac{(a \alpha - b \beta) z}{\gamma} = 0. \end{aligned} \tag{54}$$

Die Gleichungen der Geraden  $n' N'$ ,  $n'' N''$ ,  $n''' N'''$  entstehen aus der Gleichung der Geraden  $n N$ , wenn in dieser  $\alpha$  in  $-\alpha$ , oder  $\beta$  in  $-\beta$ , oder  $\gamma$  in  $-\gamma$  umgesetzt wird.

Allen diesen vier Geraden in 54 genügt der Punkt

$$x : y : z = a \alpha^2 : b \beta^2 : c \gamma^2.$$

Dieses ist aber der Höhenpunkt  $H$  des Dreiecks  $ABC$ , denn  $H$  als Winkelgegenpunkt des Umkreisentrums  $O$  hat die Coordinaten  $x : y : z = \frac{1}{\cos A} : \frac{1}{\cos B} : \frac{1}{\cos C}$ , das heisst gemäss 45

$$x \sim \frac{a \alpha}{\beta \gamma} = \frac{a \alpha^2}{\alpha \beta \gamma}, \text{ und somit } x : y : z = a \alpha^2 : b \beta^2 : c \gamma^2, \text{ w. z. z.}$$

Die vier Geraden  $n N$ ,  $n' N'$ ,  $n'' N''$ ,  $n''' N'''$  gehen daher alle durch den Höhenpunkt  $H$  des Dreiecks  $ABC$ .

Auf diesen Geraden liegen auch respektive die Punkte  $x : y : z = \alpha : \beta : \gamma$ ,  $x : y : z = -\alpha : \beta : \gamma$ ,  $x : y : z = \alpha : -\beta : \gamma$ ,  $x : y : z = \alpha : \beta : -\gamma$ , deren Bedeutung wir in § 9 kennen lernen werden.

### § 9.

Bilden wir jetzt die Gleichung der Geraden  $p P$ .

Mittelst den in 51 angegebenen Coordinaten der Punkte p und P erhalten wir für diese Gleichung

$$\begin{vmatrix} \frac{x}{\alpha}, & \frac{y}{c\gamma}, & \frac{z}{b\beta} \\ 1, & \frac{1}{\frac{h}{b} - \beta}, & \frac{1}{\frac{h}{c} - \gamma} \\ 1, & -\frac{1}{\frac{h}{b} + \beta}, & -\frac{1}{\frac{h}{c} + \gamma} \end{vmatrix} = 0.$$

Vergleichen wir dies mit der Gleichung von n N, so kommt

$$-\frac{\mathfrak{A}x}{\alpha} + \frac{\mathfrak{B}'y}{c\gamma} + \frac{\mathfrak{C}'z}{b\beta} = 0,$$

wo  $\mathfrak{A}$  dieselbe Bedeutung hat wie oben  $\mathfrak{A} = \frac{b\beta - c\gamma}{R\alpha^2}$ , und wo

$$\mathfrak{B}' = \frac{1}{\frac{h}{c} - \gamma} + \frac{1}{\frac{h}{c} + \gamma} = \frac{2h}{c - \gamma^2} = \frac{4\Delta c\gamma}{abc \cdot \alpha\beta} = \frac{c\gamma}{R\alpha\beta},$$

$$\mathfrak{C}' = -\frac{1}{\frac{h}{b} + \beta} - \frac{1}{\frac{h}{c} - \beta} = -\frac{2h}{b - \beta^2} = -\frac{b\beta}{R\gamma\alpha}.$$

Wir erhalten so die erste der folgenden Gleichungen:

$$\text{Gerade } pP \dots \frac{(b\beta - c\gamma)x}{a\alpha^2} - \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 0,$$

$$\text{Gerade } p'P' \dots \frac{(b\beta + c\gamma)x}{a\alpha^2} - \frac{y}{\beta} - \frac{z}{\gamma} = 0,$$

$$\text{Gerade } qQ \dots \frac{x}{\alpha} + \frac{(c\gamma - a\alpha)y}{b\beta^2} - \frac{z}{\gamma} = 0,$$

$$\text{Gerade } q'Q' \dots -\frac{x}{\alpha} + \frac{(c\gamma + a\alpha)y}{b\beta^2} - \frac{z}{\gamma} = 0,$$

$$\text{Gerade } rR \dots -\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{(a\alpha - b\beta)z}{c\gamma^2} = 0,$$

$$\text{Gerade } r'R' \dots -\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta} + \frac{(a\alpha + b\beta)z}{c\gamma^2} = 0.$$

55.

Alle diese sechs Geraden gehen durch den Höhenpunkt H des Dreiecks ABC oder durch den Punkt

$$x : y : z = a \alpha^2 : b \beta^2 : c \gamma^2.$$

Aus den Gleichungen dieser Geraden ziehen wir noch die folgenden Schlüsse:

Die Geraden HpP und Hp'P' schneiden die Seite BC in zwei zu BC harmonischen Punkten u und u', für

$$\text{welche } u \dots \frac{y}{z} = \frac{\beta}{\gamma}, \quad u' \dots \frac{y}{z} = -\frac{\beta}{\gamma}.$$

Die Geraden HqQ und Hq'Q' schneiden die Seite CA in zwei zu CA harmonischen Punkten v und v', für

$$\text{welche } v \dots \frac{z}{x} = \frac{\gamma}{\alpha}, \quad v' \dots \frac{z}{x} = -\frac{\gamma}{\alpha}.$$

Die Geraden HrR und Hr'R' schneiden die Seite AB in zwei zu AB harmonischen Punkten w und w', für

$$\text{welche } w \dots \frac{x}{y} = \frac{\alpha}{\beta}, \quad w' \dots \frac{x}{y} = -\frac{\alpha}{\beta}.$$

Diesen Punkten u, u', v, v', w, w', deren Coordinaten also:

	x,	y,	z
u	0,	β,	γ
u'	0,	-β,	γ
v	α,	0,	γ
v'	α,	0,	-γ
w	α,	β,	0
w'	-α,	β,	0

56.

werden wir noch wiederholt begegnen.

Zunächst ergibt sich aus diesen Coordinaten:

Die Geraden Au, Bv, Cw schneiden sich in einem nämlichen Punkte S, für welchen

$$S \dots x : y : z = \alpha : \beta : \gamma.$$

Die Geraden Au, Bv', Cw' schneiden sich in einem nämlichen Punkte S', für welchen

$$S' \dots x : y : z = -\alpha : \beta : \gamma.$$

Die Geraden Au', Bv, Cw' schneiden sich in einem nämlichen Punkte S'', für welchen

$$S'' \dots x : y : z = \alpha : -\beta : \gamma.$$

57.

Die Geraden  $Au'$ ,  $Bv'$ ,  $Cw$  schneiden sich in einem  
 nämlichen Punkte  $S'''$ , für welchen 57.

$$S''' \dots x:y:z = \alpha:\beta:-\gamma.$$

Am Schlusse von § 8 sahen wir, dass diese Punkte  
 $S$ ,  $S'$ ,  $S''$ ,  $S'''$  respektive auf den Geraden  $HnN$ ,  $Hn'N'$ ,  
 $Hn''N''$ ,  $n'''N'''$  liegen.

Im Viereck  $pPp'P'$  wird die Seite  $Pp$  von der Gegen-  
 seite  $P'p'$  und von der Diagonalen  $BC$  in den Punkten  $H$  und  
 $u$  harmonisch geteilt. Projizieren wir diese Punkte  $H$ ,  $u$ ,  $p$ ,  $P$   
 von  $A$  aus auf die Gerade  $HnN$ , so ergibt sich, dass  $H$  und  $S$   
 harmonisch liegen zu  $n$  und  $N$ . Analog sind  $S'$ ,  $S''$ ,  $S'''$   
 respektive harmonisch zu  $H$  in Bezug auf  $n'N'$ ,  $n''N''$ ,  $n'''N'''$ .

Aus den so einfachen Ausdrücken der Coordinaten der  
 Punkte  $S$ ,  $S'$ ,  $S''$ ,  $S'''$  ergibt sich die folgende direkte Kon-  
 struktion dieser Punkte, sowie der Punkte  $u$ ,  $u'$ ,  $v$ ,  $v'$ ,  $w$ ,  $w'$ :

Durch die Punkte  $i$  und  $I$  ziehen wir Parallele zu  $BC$ ,  
 durch  $k$  und  $K$  Parallele zu  $CA$ , durch  $l$  und  $L$  Parallele zu  $AB$ ,  
 so bilden diese sechs neuen Geraden acht dem Stammdreieck  
 $ABC$  parallele und somit perspektivisch liegende Dreiseite, die  
 wir mit  $ikl$ ,  $IKL$ ,  $Ikl$ ,  $iKL$ ,  $iKl$ ,  $IkL$ ,  $ikL$ ,  $IKl$  bezeichnen  
 können, wo aber diese Buchstaben nicht die Ecken der betref-  
 fenden Dreiseite, sondern die durch die gleichnamigen  
 Punkte parallel zu den entsprechenden Seiten des  
 Stammdreiecks  $abc$  laufenden Seiten dieser Dreiseite  
 darstellen.

Dies vorausgesetzt sind die Punkte  $S$ ,  $S'$ ,  $S''$ ,  $S'''$  wie folgt  
 gegeben:

Dreiseite

$$\left. \begin{array}{l} ikl \\ IKL \\ abc \end{array} \right\} \dots \text{gemeins. perspektiv. Zentrum} = S$$

$$\left. \begin{array}{l} Ikl \\ iKL \\ abc \end{array} \right\} \dots \text{gemeins. perspektiv. Zentrum} = S'$$

$$\left. \begin{array}{l} iKl \\ IkL \\ abc \end{array} \right\} \dots \text{gemeins. perspektiv. Zentrum} = S''$$

$$\left. \begin{array}{l} i k L \\ I K l \\ a b c \end{array} \right\} \dots \text{gemeins. perspektiv. Zentrum} = S'''. \quad 58.$$

Und die Punkte  $u, u', v, v', w, w'$  sind bestimmt durch:

$$\left. \begin{array}{l} A S S' \\ B C \end{array} \right\} = u, \quad \left. \begin{array}{l} B S S'' \\ C A \end{array} \right\} = v, \quad \left. \begin{array}{l} C S S''' \\ A B \end{array} \right\} = w, \quad 59.$$

$$\left. \begin{array}{l} A S'' S''' \\ B C \end{array} \right\} = u', \quad \left. \begin{array}{l} B S''' S' \\ C A \end{array} \right\} = v', \quad \left. \begin{array}{l} C S' S'' \\ A B \end{array} \right\} = w'.$$

Aus den Coordinaten der Punkte  $S, S', S'', S'''$  erhalten wir endlich für die Gleichungen der harmonischen Polaren dieser Punkte in Bezug auf das Dreieck  $A B C$ :

$$\begin{aligned} \text{Gerade } u' v' w' \dots & \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 0 \\ \text{Gerade } u' v w \dots & -\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 0 \\ \text{Gerade } u v' w \dots & \frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 0 \\ \text{Gerade } u v w' \dots & \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} - \frac{z}{\gamma} = 0. \end{aligned} \quad 60.$$

### § 10.

Laut den in 50 gegebenen Coordinaten der Punkte  $k$  und  $l$  wird die Gleichung der Geraden  $kl$ :

$$\left| \begin{array}{ccc} \frac{x}{\alpha}, & y, & z \\ \frac{1}{c \gamma'}, & \frac{1}{h - \beta}, & \frac{\gamma}{a \alpha} \\ \frac{1}{b \beta'}, & \frac{\beta}{a \alpha'}, & \frac{1}{h - \gamma} \end{array} \right| = 0,$$

d. h.:  $\mathfrak{A} \frac{x}{\alpha} + \mathfrak{B} y + \mathfrak{C} z = 0$ , wo

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{\left(\frac{h}{b} - \beta\right)\left(\frac{h}{c} - \gamma\right)} - \frac{\beta \gamma}{a^2 \alpha^2}, \quad \text{oder gemäss 47:}$$