$$\left.\begin{matrix} \mathrm{i\,k\,L} \\ \mathrm{I\,K\,l} \\ \mathrm{a\,b\,c} \end{matrix}\right\} \text{.. gemeins. perspektiv. Zentrum} = \mathrm{S}'''. \qquad 58.$$

Und die Punkte u, u′, v, v′, w, w′ sind bestimmt durch:

$$\left.\begin{matrix} \mathrm{A\,S\,S'} \\ \mathrm{B\,C} \end{matrix}\right\} = \mathrm{u}, \quad \left.\begin{matrix} \mathrm{B\,S\,S''} \\ \mathrm{C\,A} \end{matrix}\right\} = \mathrm{v}, \quad \left.\begin{matrix} \mathrm{C\,S\,S'''} \\ \mathrm{A\,B} \end{matrix}\right\} = \mathrm{w},$$

$$\left.\begin{matrix} \mathrm{A\,S''\,S'''} \\ \mathrm{B\,C} \end{matrix}\right\} = \mathrm{u}', \quad \left.\begin{matrix} \mathrm{B\,S'''\,S'} \\ \mathrm{C\,A} \end{matrix}\right\} = \mathrm{v}', \quad \left.\begin{matrix} \mathrm{C\,S'\,S''} \\ \mathrm{A\,B} \end{matrix}\right\} = \mathrm{w}'. \qquad 59.$$

Aus den Coordinaten der Punkte S, S′, S″, S‴ erhalten wir endlich für die Gleichungen der harmonischen Polaren dieser Punkte in Bezug auf das Dreieck A B C:

$$\begin{aligned} &\text{Gerade } \mathrm{u'\,v'\,w'} \ldots \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = o \\ &\text{Gerade } \mathrm{u'\,v\,w} \ldots -\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = o \\ &\text{Gerade } \mathrm{u\,v'\,w} \ldots \frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = o \\ &\text{Gerade } \mathrm{u\,v\,w'} \ldots \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} - \frac{z}{\gamma} = o. \end{aligned} \qquad 60.$$

§ 10.

Laut den in 50 gegebenen Coordinaten der Punkte k und l wird die Gleichung der Geraden k l:

$$\begin{vmatrix} \frac{x}{\alpha}, & y, & z \\ \frac{1}{c\,\gamma}, & \frac{1}{\frac{h}{b} - \beta}, & \frac{\gamma}{a\,\alpha} \\ \frac{1}{b\,\beta}, & \frac{\beta}{a\,\alpha}, & \frac{1}{\frac{h}{c} - \gamma} \end{vmatrix} = o,$$

d. h.: $\frac{\mathfrak{A}\,x}{\alpha} + \mathfrak{B}\,y + \mathfrak{C}\,z = o$, wo

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{\left(\frac{h}{b} - \beta\right)\left(\frac{h}{c} - \gamma\right)} - \frac{\beta\,\gamma}{a^2\,\alpha^2}, \text{ oder gemäss 47:}$$

$$\mathfrak{A} = \frac{\left(\frac{h}{b} + \beta\right)\left(\frac{h}{c} + \gamma\right) - \beta\gamma}{a^2\,\alpha^2} = \frac{2\triangle(2\triangle + b\beta + c\gamma)}{a^2\,\alpha^2\,bc} =$$

$$= \frac{2\triangle + b\beta + c\gamma}{2R\,a\,\alpha^2}.$$

Ferner:

$$\mathfrak{B} = \frac{\gamma}{a\,b\,\alpha\,\beta} - \frac{1}{c\gamma\left(\frac{h}{c} - \gamma\right)} = \frac{c\gamma^2\frac{h}{c} - c\gamma^3 - a\,b\,\alpha\,\beta}{a\,b\,c\,\alpha\,\beta\,\gamma\left(\frac{h}{c} - \gamma\right)}.$$

In Folge von 49 ist der Zähler $= c\gamma^2\frac{h}{c} - 2\triangle\gamma\frac{h}{c} = 2\triangle\gamma\left(\gamma - \frac{h}{c}\right)$. Also wird $\mathfrak{B} = -\frac{2\triangle}{a\,b\,c\,\alpha\,\beta}$, oder schliesslich $\mathfrak{B} = -\frac{1}{2R\,\alpha\,\beta}$ und analog $\mathfrak{C} = -\frac{1}{2R\,\gamma\,\alpha}$.

Wir finden so die erste der Gleichungen

$$\begin{aligned}
&\text{Gerade kl} \ldots \frac{(2\triangle + b\beta + c\gamma)\,x}{a\,\alpha^2} - \frac{y}{\beta} - \frac{z}{\gamma} = o \\
&\text{Gerade KL} \ldots \frac{(2\triangle - b\beta - c\gamma)\,x}{a\,\alpha^2} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = o \\
&\text{Gerade kL} \ldots \frac{(2\triangle + b\beta - c\gamma)\,x}{a\,\alpha^2} - \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = o \\
&\text{Gerade Kl} \ldots \frac{(2\triangle - b\beta + c\gamma)\,x}{a\,\alpha^2} + \frac{y}{\beta} - \frac{z}{\gamma} = o,
\end{aligned} \qquad 61.$$

und mittelst des Buchstabenrades erhalten wir hieraus die Gleichungen der analogen Geraden li, LI, lI, Li und ik, IK, iK, Ik.

Aus den Gleichungen 61 geht unmittelbar hervor:

Die Geraden kl und KL schneiden sich und die Gerade BC im Punkte u′. Und die Geraden kL und Kl schneiden sich und die Gerade BC im Punkte u, d. h wir haben:

$$\begin{aligned}
&\left.\begin{matrix}\text{kL}\\ \text{Kl}\end{matrix}\right\} = u, \quad \left.\begin{matrix}\text{lI}\\ \text{Li}\end{matrix}\right\} = v, \quad \left.\begin{matrix}\text{iK}\\ \text{Ik}\end{matrix}\right\} = w, \\
&\left.\begin{matrix}\text{kl}\\ \text{KL}\end{matrix}\right\} = u', \quad \left.\begin{matrix}\text{li}\\ \text{LI}\end{matrix}\right\} = v', \quad \left.\begin{matrix}\text{ik}\\ \text{IK}\end{matrix}\right\} = w',
\end{aligned} \qquad 62.$$