Kreis um BC als Durchmesser

$$x(x\cos A - y\cos B - z\cos C) - yz = o. \qquad 66.$$

Führen wir hier aus 64 die Coordinaten, sei es des Punktes i′ sei es des Punktes I′ ein, so sehen wir, dass diese Werte in der Tat der Kreisgleichung 66 identisch genügen. Auch von den Coordinaten 50 der Punkte i und I wird man sich mittelst der Relationen 45 und 46 leicht überzeugen, dass dieselben der Kreisgleichung 66 genügen.

Bilden wir nun die Gleichung der Geraden i′ I′.

Aus den Coordinaten 64 der Punkte i′ und I′ erhält man hiefür:

$$\text{Gerade } i'\,I' \ldots x\sin(B - C) + y\sin B - z\sin C = o. \qquad 67.$$

Diese Gerade schneidet die Seite BC im Punkte $y:z = \frac{1}{b}:\frac{1}{c}$.

Die Gerade i′ I′ geht somit durch die Mitte der Seite BC, und in Verbindung mit Satz 36 finden wir:

Die Punkte i′ und I′ sind in dem um BC als Durchmesser geschlagenen Kreise die Endpunkte des zur Geraden BC senkrechten Durchmessers. 68.

§ 12.

Aus dem Viereck i′ I′ i I, wo u und u′ die beiden auf BC liegenden Diagonalpunkte, folgt ferner:

Es liegen u und u′ harmonisch zur Strecke AD, wo A die Mitte der Seite BC, und D der Fusspunkt des Höhenperpendikels AD ist. Gemäss 10 liegen u u′ aber auch harmonisch zur Strecke BC. Es sind also u und u′ die Doppelpunkte der durch die Punktenpaare B, C und A, D bestimmten Involution. 69.

Aus 69 folgt auch:

Legt man zu dem um BC als Durchmesser beschriebenen Kreise durch die Punkte i und I, wo dieser Kreis von dem durch A gehenden Höhenperpendikel des Dreiecks ABC geschnitten wird, einen Orthogonalkreis, so sind u und u′ die Schnittpunkte dieses Orthogonalkreises mit der Seite BC. 70.

Denn sei λ der Mittelpunkt dieses Orthogonalkreises, so ist die Potenz von λ in Bezug auf den um BC beschriebenen Kreis

$\overline{\lambda I}^2 = \lambda B \cdot \lambda C$. Und im rechtwinkligen Dreieck $\lambda I \mathfrak{A}$ ist $\overline{\lambda I}^2 = \lambda D \cdot \lambda \mathfrak{A}$. Für die Schnittpunkte u und u′ des Kreises λ mit BC hat man also $\left.\begin{matrix}\overline{\lambda u}^2\\ \overline{\lambda u'}^2\end{matrix}\right\} = \lambda B \cdot \lambda C = \lambda D \cdot \lambda \mathfrak{A}$ und es sind also u und u′ harmonisch sowohl zu BC als zu $\mathfrak{A}$D, w. s. s.

Hat man so u, u′ und analog v, v′ und w, w′ direkt aus den ursprünglichen Punkten i, I; k, K; l, L konstruiert, so erhalten wir auch direkt die Punkte S, S′, S″, S‴ aus

$$\left.\begin{matrix}A\,u\\ B\,v\\ C\,w\end{matrix}\right\} = S;\quad \left.\begin{matrix}A\,u\\ B\,v'\\ C\,w'\end{matrix}\right\} = S';\quad \left.\begin{matrix}A\,u'\\ B\,v\\ C\,w'\end{matrix}\right\} = S'';\quad \left.\begin{matrix}A\,u'\\ B\,v'\\ C\,w\end{matrix}\right\} = S'''. \qquad 57'.$$

Seien λ, μ, ν die Mittelpunkte der Kreise, die wir respektive durch i, I, durch k, K, durch l, L orthogonal zu den respektive um BC, um CA, um AB als Durchmessern beschriebenen Kreisen legen, so sind in den letztern Kreisen λ, μ, ν die Pole der Geraden iI, kK, lL, und somit in Bezug auf die Strecken BC, CA, AB harmonisch zu den Höhenfusspunkten D, E, F.

Die drei Punkte λ, μ, ν liegen daher in einer nämlichen Geraden, der Polaren des Höhenpunktes 71.
H des Dreiecks ABC in Bezug auf dieses Dreieck.

Dass die Mitte λ von uu′ harmonisch zu D in Bezug auf BC, ergibt sich auch unmittelbar daraus, dass uu′ harmonisch ist sowohl zu BC als zu $\mathfrak{A}$D, wo $\mathfrak{A}$ die Mitte von BC. Denn hieraus folgt zunächst $\lambda B \cdot \lambda C = \lambda \mathfrak{A} \cdot \lambda D$, d. h. da $\mathfrak{A}$ die Mitte von BC ist, $\overline{\lambda \mathfrak{A}}^2 - \overline{C \mathfrak{A}}^2 = \lambda \mathfrak{A} \cdot \lambda D$, woraus $\lambda \mathfrak{A} (\lambda \mathfrak{A} - \lambda D) = \overline{C \mathfrak{A}}^2$, d. h. $\mathfrak{A}\lambda \cdot \mathfrak{A}D = \left\{\begin{matrix}\overline{\mathfrak{A} C}^2\\ \overline{\mathfrak{A} B}^2\end{matrix}\right.$. Also ist λ harmonisch zu D in Bezug auf BC, wie zu zeigen.

Die obigen um λ, μ, ν als Mittelpunkten respektive um uu′, vv′, ww′ als Durchmessern beschriebenen Kreise wollen wir der Kürze wegen ebenfalls mit λ, μ, ν bezeichnen. Da uu′ harmonisch zu BC und ebenso harmonisch zu $\mathfrak{A}$D, so ist jeder durch B und C gelegte Kreis und jeder durch $\mathfrak{A}$ und D gelegte Kreis orthogonal zum Kreise λ. Daraus folgt:

Der Umkreis und der Neunpunktkreis des Stamm-
dreiecks ABC sind Orthogonalkreise der drei Kreise
λ, μ, ν. Die drei Kreise λ, μ, ν gehören daher einem näm-
lichen Kreisbüschel an, nämlich dem Büschel der 72.
Orthogonalkreise des durch den Umkreis und den
Neunpunktkreis von Dreieck ABC bestimmten Kreis-
büschels.

Wir sehen also wieder, dass die Punkte λ, μ, ν in
einer Geraden liegen, und zwar ist diese Gerade die
Linie gleicher Potenzen in Bezug auf den Umkreis 73.
und auf den Neunpunktkreis von Dreieck ABC. Diese
Gerade $\lambda\mu\nu$ steht daher senkrecht zur Eulerschen
Geraden OH des Dreiecks ABC.

In dem durch die Seiten BA und CA und durch die Höhenperpendikel BE und CF des Stammdreiecks gebildeten Vierseit sind BC, EF, AH die drei Diagonalen. Somit wird BC von FE harmonisch zu D geschnitten. Die Gerade EF geht also durch den Punkt λ.

Die Gerade $\lambda\mu\nu$ ist daher auch die perspek-
tivische Axe des Stammdreiecks ABC und des Drei- 74.
ecks DEF der Höhenfusspunkte.

Wir setzen das Dreieck ABC spitzwinklig voraus, so
liegt der Höhenpunkt H im Innern des Dreiecks und somit auch
im Innern des Umkreises. Aber H ist der positive Ähnlichkeits-
punkt des Umkreises und des Neunpunktkreises mit dem
Ähnlichkeitsverhältnis $^1/_2$. Unter der obigen Voraussetzung wird
daher der Neunpunktkreis vom Umkreise vollständig um-
schlossen. Das durch den Umkreis und den Neunpunktkreis
bestimmte Büschel ist daher ein solches der zweiten Art, und
somit das Büschel der Orthogonalkreise ein solches der ersten
Art. Die drei Kreise λ, μ, ν schneiden sich also in den
nämlichen reellen Punkten Π und P der Eulerschen
Geraden des Stammdreiecks. Diese Punkte sind die
Nullpunkte des durch den Umkreis und den Neun-
punktkreis von Dreieck ABC bestimmten Büschels, 75
oder die Doppelpunkte der durch Umkreis und Neun-
punktkreis auf den Eulerschen Geraden bestimmten

Involution. Oder es sind Π und P einander sowohl in Bezug auf den Umkreis als in Bezug auf den Neunpunktkreis harmonisch zugeordnet.

Zu diesen Resultaten gelangen wir auch wie folgt: Das durch die Geraden $u' v' w'$, $u' v w$, $u v' w$, $u v w'$ gebildete Vierseit das wir das Vierseit U nennen wollen, hat die Strecken $u u'$, $v v'$, $w w'$ zu Diagonalen. Nach einem bekannten Satze liegen daher die Mitten λ, μ, ν dieser Strecken in einer nämlichen Geraden, und die respektive um $u u'$, $v v'$, $w w'$ als Durchmesser beschriebenen Kreise, d. h. die obgenannten respektive durch i, I, durch k, K, durch l, L gelegten Orthogonalkreise der respektive um BC, um CA, um AB als Durchmesser geschlagenen Kreise, gehören einem nämlichen Kreisbüschel an, dessen Potenzlinie durch das Umkreiszentrum des Diagonaldreiecks des Vierseits U geht. Dieses Diagonaldreieck ist aber das Stammdreieck ABC. Obige Potenzlinie geht somit durch das Umkreiszentrum O des Dreiecks ABC. Diese Gerade geht aber auch durch den Höhenpunkt H von Dreieck ABC, denn es hat H in Bezug auf die Kreise λ, μ, ν respektive die Potenzen $Hi \cdot HI$; $Hk \cdot HK$; $Hl \cdot HL$, und da diese Produkte einander gleich sind, so ist also auch H ein Punkt der Potenzlinie. Wir finden also wieder: die Potenzlinie des Kreisbüschels λ, μ, ν ist die Eulersche OH Gerade des Stammdreiecks ABC.

Da wir das Dreieck ABC als spitzwinklig voraussetzen, so sind, wie wir pag. 217 gesehen, die Potenzen $Hi \cdot HI$ u. s. w. negativ. Der Punkt H liegt daher im Innern der Kreise λ, μ, ν. Wir sehen also wieder, dass das von diesen Kreisen gebildete Büschel ein solches der ersten Art ist, dass sich daher die drei Kreise λ, μ, ν in zwei reellen gemeinsamen Punkten Π und P auf der Eulerschen Geraden des Stammdreiecks schneiden. Wir haben ferner $H\Pi \cdot HP = Hi \cdot HI$, d. h. nach 1

$$H\Pi \cdot HP = -4\,R^2 \cos A \cos B \cos C \qquad 76.$$

wo R der Radius des Umkreises von Dreieck ABC.

Und da der Umkreis von ABC ein Orthogonalkreis der Kreise λ, μ, ν ist, so haben wir auch

$$O\Pi \cdot OP = R^2. \qquad 77.$$

Aber auch der Neunpunktkreis von ABC ist ein Orthogonalkreis der Kreise λ, μ, ν. Wenn somit m der Mittelpunkt des Neunpunktkreises von Dreieck ABC, so ist

$$m\Pi \cdot mP = \frac{R^2}{4}. \qquad 78.$$

Bezeichnen wir mit Ω die Mitte von $P\Pi$ oder den Schnittpunkt der Axe $\lambda\mu\nu$ unseres Kreisbüschels mit der Geraden OH, so ist

$$O\Pi \cdot OP = \overline{O\Omega}^2 - \overline{\Omega\Pi}^2, \quad m\Pi \cdot mP = \overline{m\Omega} - \overline{\Pi\Omega}^2,$$
$$H\Pi \cdot HP = \overline{H\Omega}^2 - \overline{\Omega\Pi}^2.$$

Die drei obigen Relationen geben daher auch

$$\overline{m\Omega}^2 - \overline{\Omega\Pi}^2 = \tfrac{1}{4} R^2$$
$$\overline{O\Omega}^2 - \overline{\Omega\Pi}^2 = R^2$$
$$\overline{H\Omega}^2 - \overline{\Omega\Pi}^2 = -4 R^2 \cos A \cos B \cos C.$$

Aber m ist die Mitte von OH. Wir haben daher

$$m\Omega = H\Omega + \tfrac{1}{2} OH, \quad O\Omega = H\Omega + OH,$$

und die obigen Relationen geben

$$(H\Omega + \tfrac{1}{2} OH)^2 - \overline{\Omega\Pi}^2 = \tfrac{1}{4} R^2$$
$$(H\Omega + OH)^2 - \overline{\Omega\Pi}^2 = R^2$$
$$\overline{H\Omega}^2 - \overline{\Omega\Pi}^2 = -4 R^2 \cos A \cos B \cos B.$$

Hieraus können wir die drei Grössen OH, $H\Omega$, $\Omega\Pi$ berechnen. Eliminieren wir zunächst $\overline{\Omega\Pi}^2$ durch Substraktion je zweier Gleichungen, so kommt

$$OH \cdot H\Omega + \tfrac{3}{4} \overline{OH}^2 = \frac{3R^2}{4}$$

$$OH \cdot H\Omega + \tfrac{1}{4} \overline{OH}^2 = \frac{R^2}{4} (1 + 16 \cos A \cos B \cos C),$$

und hieraus wieder

$$\overline{OH}^2 = R^2 (1 - 8 \cos A \cos B \cos C), \qquad 79.$$

und $OH \cdot H\Omega = 6 R^2 \cos A \cos B \cos C$, woraus

$$\overline{H\,\Omega}^2 = \frac{36\,R^2 \cos^2 A \cos^2 B \cos^2 C}{1 - 8 \cos A \cos B \cos b}. \qquad 80.$$

Die Relation $\overline{\Omega\Pi}^2 = \overline{H\,\Omega}^2 + 4\,R^2 \cos A \cos B \cos C$ gibt endlich

$$\left.\begin{array}{l}\overline{\Omega\Pi}^2\\ \overline{\Omega P}^2\end{array}\right\} = \frac{4\,R^2 (1 + \cos A \cos B \cos C) \cos A \cos B \cos C}{1 - 8 \cos A \cos B \cos C}. \qquad 81.$$

Ferner haben wir

$$\overline{O\,\Omega}^2 = \overline{\Omega H}^2 + R^2 \text{ und } 4 \cdot \overline{m\,\Omega}^2 = 4 \cdot \overline{\Omega\Pi}^2 + R^2,$$

woraus

$$\overline{O\,\Omega}^2 = \frac{R^2 \cdot (1 - 2 \cos A \cos B \cos C)^2}{1 - 8 \cos A \cos B \cos C}. \qquad 82.$$

$$4 \cdot \overline{m\,\Omega}^2 = \frac{R^2 \cdot (1 + 4 \cos A \cos B \cos C)^2}{1 - 8 \cos A \cos B \cos C}. \qquad 83.$$

Berechnen wir endlich die trimetrischen Normalkoordinaten des Punktes Ω oder des Schnittpunktes der Geraden $\lambda\,\mu\,\nu$ mit der Eulerschen Geraden O H. Wir haben:

Gerade $\lambda\,\mu\,\nu$, d. h. Polare des Höhenpunktes H in Bezug auf das Dreieck A B C

$$x \cos A + y \cos B + z \cos C = 0. \qquad 84.$$

Eulersche Gerade O H

$$x\,(b^2 - c^2) \cos A + y\,(c^2 - a^2) \cos B + z\,(a^2 - b^2) \cos C = 0. \qquad 85.$$

Hieraus für den Schnittpunkt Ω beider Geraden

$x \cos A = (a^2 - b^2) - (c^2 - a^2) = 2\,a^2 - b^2 - c^2$. Somit

Punkt Ω

$$x : y : z = \frac{2\,a^2 - b^2 - c^2}{\cos A} : \frac{2\,b^2 - c^2 - a^2}{\cos B} : \frac{2\,c^2 - a - b^2}{\cos C} =$$
$$= \frac{a^2 - 2\,b\,c \cos A}{\cos A} : \frac{b^2 - 2\,c\,a \cos B}{\cos B} : \frac{c^2 - 2\,a\,b \cos C}{\cos C}. \qquad 86.$$

Kehren wir zu p. 251 oder zum Vierseit U zurück, und betrachten eines der in diesem Vierseit enthaltenen vier Dreiecke z. B. das Dreieck $u\,v'\,w'$. Seien $u\,\gamma$, $v'\,\delta'$, $w'\,\varepsilon'$ die drei Höhenperpendikel und h' der Höhenpunkt dieses Dreiecks, so liegen

γ auf dem Kreise λ, δ' auf dem Kreise μ, ε' auf dem Kreise ν. Aber γ und δ' liegen auch auf dem Kreise um $u\,v'$ als Durchmesser, und daher ist $h'\gamma \cdot h'u = h'\delta' \cdot h'v'$ und analog $= h'\varepsilon' \cdot h'w'$. Der Punkt h' hat daher in Bezug auf die Kreise λ, μ, ν dieselbe Potenz, und liegt somit auf der gemeinsamen Potenzlinie dieser drei Kreise. Dasselbe gilt von den Höhenpunkten der drei übrigen im Vierseit U enthaltenen Dreiecke. Die Höhenpunkte der im Vierseit U enthaltenen vier Dreiecke liegen daher ebenfalls auf der Eulerschen Geraden OH des Stammdreiecks ABC.

Diese vier Höhenpunkte liegen bekanntlich auf der Leitlinie der dem Vierseit eingeschriebenen Parabel. Wir können daher auch sagen: Die Leitlinie der dem Vierseit U
eingeschriebenen Parabel ist die Eulersche Gerade 87.
des Dreiecks ABC.

Die Diagonalen $u\,u'$, $v\,v'$, $w\,w'$ des Vierseits U sind spezielle Fälle der dem Vierseit U eingeschriebenen Kegelschnitte, und wir können die respektive um $u\,u'$, $v\,v'$ $w\,w'$ als Durchmesser beschriebenen Kreise als die Orte der Scheitel der diese Kegelschnitte $u\,u'$, $v\,v'$, $w\,w'$ umgleitenden rechten Winkel auffassen. Allgemein gilt nun der Satz: Für die einem gegebenen Vierseit eingeschriebene Schar von Kegelschnitten bilden die Ortskreise der Scheitel der je einen dieser Kegelschnitte umgleitenden rechten Winkel ein Kreisbüschel. Jedem Kegelschnitte der dem Vierseit U eingeschriebenen Schar entspricht so als Ort des Scheitels des diesen Kegelschnitt umgleitenden rechten Winkels ein Kreis des Büschels,
dem die Kreise λ, μ, ν angehören, oder des Büschels, 88.
das zum Umkreise und zum Neunpunktkreise des Stammdreiecks ABC orthogonal ist, und dessen Grundpunkte somit auf der Eulerschen Geraden von Dreieck ABC liegen.

§ 13.

In 64′ haben wir die Koordinaten der Punkte i' und I' aufgestellt, und mittelst des Buchstabenrades erhalten wir hieraus die Koordinaten von k', K' und von l', L'. Hieraus ergibt sich unmittelbar, dass die Dreiecke $i'\,k'\,l'$ und $I'\,K'\,L'$ zum Stammdreieck ABC perspektivisch liegen. Denn wir erhalten aus 64′