Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern
Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern
Band: - (1911)

Artikel: Zur Geometrie des Dreiecks
Autor: Droz-Farny, A. / Silder, G. / Schenker, O.
Kapitel: 15
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-319223

seits wissen, dass die Gerade Va Wa durch den Mittelpunkt α des letztern Kreises geht, und zu BC parallel ist, so ist unsere Behauptung erwiesen.

In dem von den Geraden Ia, IIa, IIIa, IVa gebildeten Vierseit sind also zwei Gegenecken im Kreise um BC als Durchmesser die Endpunkte i′ und I′ des zu BC senkrechten Durchmessers, zwei andere Gegenecken sind die Fusspunkte E und F der Höhenper- 106.
pendikel BE und CF des Stammdreiecks ABC, und das dritte Paar Gegenecken sind im Kreise um AH als Durchmesser die Endpunkte Va und Wa des zu AH senkrechten Durchmessers.

Eine Verifikation dieses Satzes erhalten wir wie folgt: Es ist EF die gemeinsame Sehne der Kreise um BC und um AH als Durchmesser, daher steht die Gerade $\mathfrak{A}\alpha$ senkrecht zu EF und geht durch die Mitte von EF. Die Mitten der drei Diagonalen I′ i′, EF, Va Wa des obigen Vierseits liegen somit in einer Geraden, w. s. s.

§ 15.

Betrachten wir neben dem obigen Vierseite noch die analogen, die sich respektive auf CA und AB beziehen, so schneiden sich also drei sich entsprechende Diagonalen der drei Vierseite im Umkreiszentrum O des Stammdreiecks, drei andere sich entsprechende Diagonalen bilden das Dreieck der Höhenfusspunkte des Stammdreiecks, und die drei übrigen sich entsprechenden Diagonalen bilden ein zum Stammdreieck paralleles und kongruentes Dreieck, das mit jenem Umkreiszentrum und Höhenpunkt gegenseitig vertauscht und gemeinsamen Neunpunktkreis hat; der Mittelpunkt dieses Neunpunktkreises ist das Ähnlichkeitszentrum der beiden Dreiecke.

Die Gleichungen für die Seiten der zu Ia, IIa, IIIa, IVa zwei analogen Vierseite erhalten wir aus 98 mittelst des Buchstabenrades:

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{Gerade Ib} \;.\,. & x \sin A - y \cos B + z \cos C = 0 \\
\text{Gerade IIb} \;.\,. & x \cos A - y \cos B + z \sin C = 0 \\
\text{Gerade IIIb} \;.\,. & x \sin A + y \cos B - z \cos C = 0 \\
\text{Gerade IVb} \;.\,. & - x \cos A + y \cos B + z \sin C = 0,
\end{array}\right\} \quad 98'.$$

und

Gerade Ic .. $x \cos A + y \sin B - z \cos C = 0$
Gerade IIc .. $x \sin A + y \cos B - z \cos C = 0$
Gerade IIIc .. $-x \cos A + y \sin B + z \cos C = 0$ 98''.
Gerade IVc .. $x \sin A - y \cos B + z \cos C = 0$.

Die Anschauung dieser Gleichungen 98, 98', 98'' zeigt, dass von den entsprechenden zwölf Geraden je zwei miteinander identisch sind, so dass diese drei 107.
Vierseite nur von sechs voneinander verschiedenen Geraden gebildet werden.

Diese sechs Geraden wollen wir jetzt mit g_a, g_a', g_b, g_b', g_c, g_c' bezeichnen, nämlich

g_a = Ib = IVc ... $x \sin A - y \cos B + z \cos C = 0$
g_a' = IIIb = IIc ... $x \sin A + y \cos B - z \cos C = 0$
g_b = Ic = IVa ... $x \cos A + y \sin B - z \cos C = 0$
g_b' = IIIc = IIa ... $-x \cos A + y \sin B + z \cos C = 0$ 108.
g_c = Ia = IVb ... $-x \cos A + y \cos B + z \sin C = 0$
g_c' = IIIa = IIb ... $x \cos A - y \cos B + z \sin C = 0$.

Es gehen

g_a und g_a' durch den Höhenfusspunkt D,
g_b und g_b' durch den Höhenfusspunkt E,
g_c und g_c' durch den Höhenfusspunkt F,

und man hat

Vierseit IVa IIa Ia IIIa = $g_b\, g_b'\, g_c\, g_c'$
Vierseit IVb IIb Ib IIIb = $g_c\, g_c'\, g_a\, g_a'$
Vierseit IVc IIc Ic IIIc = $g_a\, g_a'\, g_b\, g_b'$.

Die 15 Ecken des Sechsseits 108 sind die Höhenfusspunkte D, E, F des Stammdreiecks A B C, die Punkte i' J'; k', K'; l', L' auf den respektive um B C, C A, A B als Durchmesser beschriebenen Kreisen je die Endpunkte der zu 109.
diesen Dreieckseiten senkrechten Durchmesser, und endlich die Punkte Va, Wa; Wb Ub; Uc, Vc, auf den um A H, B H, C H als Durchmesser beschriebenen Kreisen je die Endpunkte der zu diesen Höhenabschnitten senkrechten Durchmesser.

Stellen wir gemäss 33, 34, 35, 99, 100, 106 die Punkte zusammen, die auf den sechs Geraden g liegen, so finden wir:

Auf jeder der sechs Geraden g liegen neun ausgezeichnete Punkte, nämlich 110.

Gerade	Punkte
g_a	D, k′, L′, Wb, Uc, $\left\{\begin{matrix} R\,P'\,v \\ R'\,p'\,v' \end{matrix}\right.$, $\left\{\begin{matrix} r'\,P\,v \\ r\,p\,v' \end{matrix}\right.$, $\left\{\begin{matrix} P'\,q\,w \\ p'\,Q'\,w' \end{matrix}\right.$, $\left\{\begin{matrix} r\,q'\,w \\ P\,Q\,w' \end{matrix}\right.$
g_a'	D, K′, l′, Ub, Vc, $\left\{\begin{matrix} R'\,p\,v \\ R\,P\,v' \end{matrix}\right.$, $\left\{\begin{matrix} r\,p'\,v \\ r'\,P'\,v' \end{matrix}\right.$, $\left\{\begin{matrix} P\,Q'\,w \\ p\,q\,w' \end{matrix}\right.$, $\left\{\begin{matrix} p'\,Q\,w \\ P'\,q'\,w' \end{matrix}\right.$
g_b	E, l′, J′ Uc, Va, $\left\{\begin{matrix} P\,Q'\,w' \\ P'\,q'\,w' \end{matrix}\right.$, $\left\{\begin{matrix} p'\,Q\,w \\ p\,q\,w' \end{matrix}\right.$, $\left\{\begin{matrix} Q'\,r\,u \\ q'\,R'\,u' \end{matrix}\right.$, $\left\{\begin{matrix} q\,r'\,u \\ Q\,R\,u' \end{matrix}\right.$
g_b'	E, L′, i′, Vc, Wa, $\left\{\begin{matrix} P'\,q\,w \\ P\,Q\,w' \end{matrix}\right.$, $\left\{\begin{matrix} p\,q'\,w \\ p'\,Q'\,w' \end{matrix}\right.$, $\left\{\begin{matrix} Q\,R'\,u \\ q\,r\,u' \end{matrix}\right.$, $\left\{\begin{matrix} q'\,R\,u \\ Q'\,r'\,u' \end{matrix}\right.$
g_c	F, i′, K′, Va, Wb, $\left\{\begin{matrix} Q\,R'\,u \\ Q'\,r'\,u' \end{matrix}\right.$, $\left\{\begin{matrix} q'\,R\,u \\ q\,r\,u' \end{matrix}\right.$, $\left\{\begin{matrix} R'\,p\,v \\ r'\,P'\,v' \end{matrix}\right.$, $\left\{\begin{matrix} r\,p'\,v \\ R\,P\,v' \end{matrix}\right.$
g_c'	F, J′ k′, Wa, Ub, $\left\{\begin{matrix} Q'\,r\,u \\ Q\,R\,u' \end{matrix}\right.$, $\left\{\begin{matrix} q\,r'\,u \\ q'\,R'\,u' \end{matrix}\right.$, $\left\{\begin{matrix} R\,P'\,v \\ r\,p\,v' \end{matrix}\right.$, $\left\{\begin{matrix} r'\,P\,v \\ R'\,p'\,v' \end{matrix}\right.$.

Wenn das Dreieck ABC stumpfwinklig wird, so werden auf diesen Geraden je die 4 letztangegebenen Punkte imaginär, die Geraden g selber aber und je die 5 erstangeführten Punkte auf denselben bleiben reell.

Durch den Höhenfusspunkt D gehen die Kreise um AC und um AB als Durchmesser; die Geraden Dk′ und DK′, oder DL′ und Dl′ sind daher zu einander senkrecht. Im Punkte D stehen also die Geraden g_a und g_a' zu einander senkrecht, und analog im Punkte E sind die Geraden g_b und g_b', und im Punkte F sind die Geraden g_c und g_c' zu einander senkrecht. 111.

Bilden wir aus den sechs Geraden g in der Reihenfolge $g_a\,g_b'\,g_c\,g_a'\,g_b\,g_c'$ ein einfaches Sechseck, so sind die aufeinanderfolgenden Ecken derselben die Punkte L′ i′ K′ l′ J′ k′, und die Verbindungslinien je zweier Gegenecken d. h. die Geraden L′ l′, i′ J′, K′ k′ schneiden sich in einem nämlichen Punkte, dem Umkreiszentrum O des Stammdreiecks.

Die sechs Geraden g sind also einem nämlichen Kegelschnitte G umschrieben. 112.

Da nun nach 111 in den Höhenfusspunkten des Stammdreiecks je zwei der Geraden g zu einander senkrecht stehen, so folgt: Der Neunpunktkreis des Stammdreiecks ist der Ort der Scheitel eines den Kegelschnitt G umgleitenden rechten Winkels. Der Kegelschnitt G ist somit konzentrisch zum Neunpunktkreise des Stamm- 113.
dreiecks, und wenn α und β die halben Axen des Kegelschnittes G sind, so hat man je nachdem derselbe eine Ellipse oder eine Hyperbel ist $4\alpha^2 + 4\beta^2 = R^2$, oder $4\alpha^2 - 4\beta^2 = R^2$.

Im Neunpunktkreis seien D′, E′, F′ die Diametralpunkte der Höhenfusspunkte D, E, F, oder die Punkte, wo die Geraden I′ i′, K′ k′, L′ l′ den Neunpunktkreis wiederum schneiden, so gehen durch D′ die respektive zu g_a und g_a' parallelen Tangenten γ_a und γ_a' unseres Kegelschnittes, durch E′ die respektive zu g_b und g_b' parallelen Tangenten γ_b und γ_b', und durch F′ die respektive zu g_c und g_c' parallelen Tangenten γ_c und γ_c'.

Die Geraden g und γ zusammen bilden drei dem Neunpunktkreise eingeschriebene und dem Kegel- 114.
schnitt G umschriebene Rechtecke.

Die Geraden γ bilden ein zu den Geraden g paralleles und kongruentes einfaches Sechseck, das den Höhenpunkt H des Stammdreiecks zum Brianchon'schen Punkte hat.

Diese Geraden γ haben zu einem zu ABC parallelen und kongruenten Dreieck, das mit diesem gemeinsamen Neunpunktkreis aber Umkreiszentrum und Höhenpunkt vertauscht hat, und dessen Seiten 115.
auf den Geraden $V_a W_a$, $W_b U_b$, $U_c V_c$ liegen, dieselben Beziehungen wie die Geraden g zum Stammdreieck ABC.

Es ist nun leicht, Tangenten von G in beliebiger Anzahl zu konstruieren: Sei z. B. w ein variabler Punkt der Geraden $I'i'$, so möge $k'w$ die Gerade g_c in Z, und $L'w$ die Gerade g_b in Y schneiden, so ist YZ eine variable Tan- 116. gente von G. Oder es möge $K'w$ die gerade g_c' in Z', und $l'w$ die Gerade g_b' in Y' schneiden, so ist auch $Y'Z'$ eine variable Tangente von G.

Das Buchstabenrad ergibt hieraus analoge Konstruktionen von Tangenten von G, wenn wir w die Gerade $K'k'$ oder die Gerade $L'l'$ durchlaufen lassen.

Lassen wir in 116 Z in den Schnittpunkt von g_b und g_c rücken, so geht Y in den Berührungspunkt β von g_b über. Oder lassen wir Y in den Schnittpunkt von g_b und g_c rücken, so geht Z in den Berührungspunkt γ von g_c über.

Der Strahl, der den Schnittpunkt Va von g_b und g_c mit k' verbindet, schneide also $i'I'$ in w, so trifft $L'w$ die Gerade g_b in ihrem Berührungspunkt β. Und wenn der 117. Strahl, der den Schnittpunkt Va von g_b und g_c mit L' verbindet, $i'I'$ in w schneidet, so trifft $k'w$ die Gerade g_c in ihrem Berührungspunkt γ.

Analog werde $i'I'$ vom Strahl, der den Schnittpunkt Wa von g_b' und g_c' mit K' verbindet in w geschnitten, so trifft $l'w$ die Gerade g_b' in ihrem Berührungspunkt β'. 117′. Und wenn der Strahl, der den Schnittpunkt Wa von g_b' und g_c' mit l' verbindet, $i'I'$ in w schneidet, so trifft $K'w$ die Gerade g_c' in ihrem Berührungspunkte γ'.

Endlich möge der Strahl, der i' mit dem Schnittpunkt Uc von g_a und g_b verbindet, $l'L'$ in w schneiden, so trifft $K'w$ die Gerade g_a in ihrem Berührungspunkt α. 117″. Und wenn der Strahl, der I' mit dem Schnittpunkt Vc von g_a' und g_b' verbindet $l'L'$ in w schneidet so trifft $k'w$ die Gerade g_a' in ihrem Berührungspunkte α'.

Da wir ferner den Mittelpunkt μ des Kegelschnittes G kennen, so ergeben die Berührungspunkte der Geraden g unmittelbar auch die Berührungspunkte der hiezu parallelen Geraden γ.

Auch die Berührungspunkte der in 116 konstruierten variabeln Tangenten YZ und $Y'Z'$ ergeben sich in ein-

facher Weise: Der Strahl, der I' mit dem Schnittpunkt von YZ und g_b' verbindet, schneide YL' in w, so trifft $k'w$ die Gerade YZ in ihrem Berührungspunkte. 118.
Oder der Strahl, der i' mit dem Schnittpunkte von $Y'Z'$ und g_b verbindet, schneide' Yl' in w, so trifft $K'w$ die Gerade $Y'Z'$ in ihrem Berührungspunkte.

Haben wir den Berührungspunkt irgend einer Tangente G konstruiert z. B. den Berührungspunkt α der Geraden g_a, so ist $\mu\alpha$ ein Halbmesser von G, und ziehen wir durch den Mittelpunkt μ zu g_a eine Parallele, so liegen auf dieser die zu $\mu\alpha$ konjugierten Halbmesser. Sei $\mu\alpha = u$ und bezeichnen wir den hiezu konjugierten Halbmesser mit v, so ist v gegeben durch $u^2 + v^2 = \varrho^2$, wo ϱ der Radius des Neunpunktkreises. Es ist somit v^2 gleich der mit entgegengesetztem Zeichen genommenen Potenz des Berührungspunktes α von g_a in Bezug auf den Neunpunktkreis.

Wir erhalten so nach Grösse und Richtung zwei konjugierte Halbmesser von G, und können schliesslich nach Grösse und Richtung die Axen des Kegelschnittes G konstruieren. 119.

Wenn ein Winkel des Stammdreiecks ABC gleich 45^0 ist, so geht der Kegelschnitt G in die Gerade über, welche die Höhenfusspunkte, die auf den jenen Winkel einschliessenden Seiten liegen, miteinander verbindet, s. 102 und 103. Durch jeden dieser beiden Fusspunkte gehen dann je sechs von den 12 Geraden g und γ. 120.
Wenn alle Winkel des Dreiecks ABC grösser als 45^0 sind, oder was auf dasselbe herauskommt, wenn das Dreieck $i'k'l'$, ganz innerhalb des Dreiecks ABC liegt, so ist G eine Ellipse. Wenn aber ein Winkel von ABC kleiner als 45^0 ist, so ist der Kegelschnitt G eine Hyperbel.

23. Februar 1902.

Corrigenda: Seite 231, Zeile 14 lies **p. 53.**
Seite 243, Schluss v. Absatz lies **H n'''** **N'''**, statt $n''' N'''$.