

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern**

Band (Jahr): - **(1911)**

PDF erstellt am: **22.07.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

seits wissen, dass die Gerade  $Va Wa$  durch den Mittelpunkt  $\alpha$  des letztern Kreises geht, und zu  $BC$  parallel ist, so ist unsere Behauptung erwiesen.

In dem von den Geraden  $Ia, IIa, IIIa, IVa$  gebildeten Vierseit sind also zwei Gegenecken im Kreise um  $BC$  als Durchmesser die Endpunkte  $i'$  und  $I'$  des zu  $BC$  senkrechten Durchmessers, zwei andere Gegenecken sind die Fusspunkte  $E$  und  $F$  der Höhenpendikel  $BE$  und  $CF$  des Stammdreiecks  $ABC$ , und das dritte Paar Gegenecken sind im Kreise um  $AH$  als Durchmesser die Endpunkte  $Va$  und  $Wa$  des zu  $AH$  senkrechten Durchmessers.

Eine Verifikation dieses Satzes erhalten wir wie folgt: Es ist  $EF$  die gemeinsame Sehne der Kreise um  $BC$  und um  $AH$  als Durchmesser, daher steht die Gerade  $\mathfrak{A}\alpha$  senkrecht zu  $EF$  und geht durch die Mitte von  $EF$ . Die Mitten der drei Diagonalen  $I'i'$ ,  $EF$ ,  $Va Wa$  des obigen Vierseits liegen somit in einer Geraden, w. s. s.

### § 15.

Betrachten wir neben dem obigen Vierseite noch die analogen, die sich respektive auf  $CA$  und  $AB$  beziehen, so schneiden sich also drei sich entsprechende Diagonalen der drei Vierseite im Umkreiszentrum  $O$  des Stammdreiecks, drei andere sich entsprechende Diagonalen bilden das Dreieck der Höhenfusspunkte des Stammdreiecks, und die drei übrigen sich entsprechenden Diagonalen bilden ein zum Stammdreieck paralleles und kongruentes Dreieck, das mit jenem Umkreiszentrum und Höhenpunkt gegenseitig vertauscht und gemeinsamen Neunpunktkreis hat; der Mittelpunkt dieses Neunpunktkreises ist das Ähnlichkeitszentrum der beiden Dreiecke.

Die Gleichungen für die Seiten der zu  $Ia, IIa, IIIa, IVa$  zwei analogen Vierseite erhalten wir aus 98 mittelst des Buchstabenrades:

$$\begin{aligned}
 \text{Gerade Ib} & \dots x \sin A - y \cos B + z \cos C = 0 \\
 \text{Gerade IIb} & \dots x \cos A - y \cos B + z \sin C = 0 \\
 \text{Gerade IIIb} & \dots x \sin A + y \cos B - z \cos C = 0 \\
 \text{Gerade IVb} & \dots -x \cos A + y \cos B + z \sin C = 0, \quad \text{und}
 \end{aligned}
 \tag{98'}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Gerade Ic} & \dots x \cos A + y \sin B - z \cos C = 0 \\
 \text{Gerade IIc} & \dots x \sin A + y \cos B - z \cos C = 0 \\
 \text{Gerade IIIc} & \dots -x \cos A + y \sin B + z \cos C = 0 \\
 \text{Gerade IVc} & \dots x \sin A - y \cos B + z \cos C = 0.
 \end{aligned}
 \tag{98''}$$

Die Anschauung dieser Gleichungen 98, 98', 98'' zeigt, dass von den entsprechenden zwölf Geraden je zwei miteinander identisch sind, so dass diese drei 107. Vierseite nur von sechs voneinander verschiedenen Geraden gebildet werden.

Diese sechs Geraden wollen wir jetzt mit  $g_a, g_a', g_b, g_b', g_c, g_c'$  bezeichnen, nämlich

$$\begin{aligned}
 g_a & = \text{Ib} = \text{IVc} \dots x \sin A - y \cos B + z \cos C = 0 \\
 g_a' & = \text{IIIb} = \text{IIc} \dots x \sin A + y \cos B - z \cos C = 0 \\
 g_b & = \text{Ic} = \text{IVa} \dots x \cos A + y \sin B - z \cos C = 0 \\
 g_b' & = \text{IIIc} = \text{IIa} \dots -x \cos A + y \sin B + z \cos C = 0 \\
 g_c & = \text{Ia} = \text{IVb} \dots -x \cos A + y \cos B + z \sin C = 0 \\
 g_c' & = \text{IIIa} = \text{IIb} \dots x \cos A - y \cos B + z \sin C = 0.
 \end{aligned}
 \tag{108.}$$

Es gehen

$g_a$  und  $g_a'$  durch den Höhenfusspunkt D,  
 $g_b$  und  $g_b'$  durch den Höhenfusspunkt E,  
 $g_c$  und  $g_c'$  durch den Höhenfusspunkt F,

und man hat

$$\begin{aligned}
 \text{Vierseit IVa IIa Ia IIIa} & = g_b g_b' g_c g_c' \\
 \text{Vierseit IVb IIb Ib IIIb} & = g_c g_c' g_a g_a' \\
 \text{Vierseit IVc IIc Ic IIIc} & = g_a g_a' g_b g_b'.
 \end{aligned}$$

Die 15 Ecken des Sechsseits 108 sind die Höhenfusspunkte D, E, F des Stammdreiecks A B C, die Punkte  $i', J'; k', K'; l', L'$  auf den respektive um B C, C A, A B als Durchmesser beschriebenen Kreisen je die Endpunkte der zu 109. diesen Dreieckseiten senkrechten Durchmesser, und endlich die Punkte  $V_a, W_a; W_b, U_b; U_c, V_c$ , auf den um A H, B H, C H als Durchmesser beschriebenen Kreisen je die Endpunkte der zu diesen Höhenabschnitten senkrechten Durchmesser.

Stellen wir gemäss 33, 34, 35, 99, 100, 106 die Punkte zusammen, die auf den sechs Geraden  $g$  liegen, so finden wir:

Auf jeder der sechs Geraden  $g$  liegen neun ausgezeichnete Punkte, nämlich 110.

Gerade	Punkte
$g_a$	$D, k', L', Wb, Uc, \left\{ \begin{array}{l} RP'v \\ R'p'v' \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} r'Pv \\ rpv' \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} P'qw \\ p'Q'w' \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} rq'w \\ PQw' \end{array} \right\}$
$g_a'$	$D, K', l', Ub, Vc, \left\{ \begin{array}{l} R'pv \\ RPv' \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} rp'v \\ r'P'v' \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} PQ'w \\ pqw' \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} p'Qw \\ P'q'w' \end{array} \right\}$
$g_b$	$E, l', J' Uc, Va, \left\{ \begin{array}{l} PQ'w' \\ P'q'w'' \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} p'Qw \\ pqw' \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} Q'ru \\ q'R'u' \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} qr'u \\ QRu' \end{array} \right\}$
$g_b'$	$E, L', i', Vc, Wa, \left\{ \begin{array}{l} P'qw \\ PQw' \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} pq'w \\ p'Q'w' \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} QR'u \\ qr'u' \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} q'Ru \\ Q'r'u' \end{array} \right\}$
$g_c$	$F, i', K', Va, Wb, \left\{ \begin{array}{l} QR'u \\ Q'r'u'' \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} q'Ru \\ qr'u' \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} R'pv \\ r'P'v' \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} rp'v \\ RPv' \end{array} \right\}$
$g_c'$	$F, J' k', Wa, Ub, \left\{ \begin{array}{l} Q'ru \\ QRu' \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} qr'u \\ q'R'u' \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} RP'v \\ rpv' \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} r'Pv \\ R'p'v' \end{array} \right\}$

Wenn das Dreieck  $ABC$  stumpfwinklig wird, so werden auf diesen Geraden je die 4 letztangegebenen Punkte imaginär, die Geraden  $g$  selber aber und je die 5 erstangeführten Punkte auf denselben bleiben reell.

Durch den Höhenfusspunkt  $D$  gehen die Kreise um  $AC$  und um  $AB$  als Durchmesser; die Geraden  $Dk'$  und  $DK'$ , oder  $DL'$  und  $DL'$  sind daher zu einander senkrecht. Im Punkte  $D$  stehen also die Geraden  $g_a$  und  $g_a'$  zu einander senkrecht, und analog im Punkte  $E$  sind die Geraden  $g_b$  und  $g_b'$ , und im Punkte  $F$  sind die Geraden  $g_c$  und  $g_c'$  zu einander senkrecht.

Bilden wir aus den sechs Geraden  $g$  in der Reihenfolge  $g_a g_b' g_c g_a' g_b g_c'$  ein einfaches Sechseck, so sind die aufeinanderfolgenden Ecken derselben die Punkte  $L' i' K' l' J' k'$ , und die Verbindungslinien je zweier Gegenecken d. h. die Geraden  $L' l'$ ,  $i' J'$ ,  $K' k'$  schneiden sich in einem nämlichen Punkte, dem Umkreiszentrum  $O$  des Stammdreiecks.

Die sechs Geraden  $g$  sind also einem nämlichen Kegelschnitte  $G$  umschrieben. 112.

Da nun nach 111 in den Höhenfusspunkten des Stammdreiecks je zwei der Geraden  $g$  zu einander senkrecht stehen, so folgt: Der Neunpunktkreis des Stammdreiecks ist der Ort der Scheitel eines den Kegelschnitt  $G$  umgleitenden rechten Winkels. Der Kegelschnitt  $G$  ist somit konzentrisch zum Neunpunktkreise des Stamm-113. dreiecks, und wenn  $\alpha$  und  $\beta$  die halben Axen des Kegelschnittes  $G$  sind, so hat man je nachdem derselbe eine Ellipse oder eine Hyperbel ist  $4\alpha^2 + 4\beta^2 = R^2$ , oder  $4\alpha^2 - 4\beta^2 = R^2$ .

Im Neunpunktkreis seien  $D', E', F'$  die Diametralpunkte der Höhenfusspunkte  $D, E, F$ , oder die Punkte, wo die Geraden  $l'i', K'k', L'l'$  den Neunpunktkreis wiederum schneiden, so gehen durch  $D'$  die respektive zu  $g_a$  und  $g_a'$  parallelen Tangenten  $\gamma_a$  und  $\gamma_a'$  unseres Kegelschnittes, durch  $E'$  die respektive zu  $g_b$  und  $g_b'$  parallelen Tangenten  $\gamma_b$  und  $\gamma_b'$ , und durch  $F'$  die respektive zu  $g_c$  und  $g_c'$  parallelen Tangenten  $\gamma_c$  und  $\gamma_c'$ .

Die Geraden  $g$  und  $\gamma$  zusammen bilden drei dem Neunpunktkreise eingeschriebene und dem Kegel-114. schnitt  $G$  umschriebene Rechtecke.

Die Geraden  $\gamma$  bilden ein zu den Geraden  $g$  paralleles und kongruentes einfaches Sechseck, das den Höhenpunkt  $H$  des Stammdreiecks zum Brianchon'schen Punkte hat.

Diese Geraden  $\gamma$  haben zu einem zu  $ABC$  parallelen und kongruenten Dreieck, das mit diesem gemeinsamen Neunpunktkreis aber Umkreiszentrum und Höhenpunkt vertauscht hat, und dessen Seiten 115. auf den Geraden  $V_a W_a, W_b U_b, U_c V_c$  liegen, dieselben Beziehungen wie die Geraden  $g$  zum Stammdreieck  $ABC$ .

Es ist nun leicht, Tangenten von  $G$  in beliebiger Anzahl zu konstruieren: Sei z. B.  $w$  ein variabler Punkt

der Geraden  $I'i'$ , so möge  $k'w$  die Gerade  $g_c$  in  $Z$ , und  $L'w$  die Gerade  $g_b$  in  $Y$  schneiden, so ist  $YZ$  eine variable Tangente von  $G$ . Oder es möge  $K'w$  die Gerade  $g_c'$  in  $Z'$ , und  $l'w$  die Gerade  $g_b'$  in  $Y'$  schneiden, so ist auch  $Y'Z'$  eine variable Tangente von  $G$ .

Das Buchstabenrad ergibt hieraus analoge Konstruktionen von Tangenten von  $G$ , wenn wir  $w$  die Gerade  $K'k'$  oder die Gerade  $L'l'$  durchlaufen lassen.

Lassen wir in 116  $Z$  in den Schnittpunkt von  $g_b$  und  $g_c$  rücken, so geht  $Y$  in den Berührungspunkt  $\beta$  von  $g_b$  über. Oder lassen wir  $Y$  in den Schnittpunkt von  $g_b$  und  $g_c$  rücken, so geht  $Z$  in den Berührungspunkt  $\gamma$  von  $g_c$  über.

Der Strahl, der den Schnittpunkt  $Va$  von  $g_b$  und  $g_c$  mit  $k'$  verbindet, schneide also  $i'I'$  in  $w$ , so trifft  $L'w$  die Gerade  $g_b$  in ihrem Berührungspunkt  $\beta$ . Und wenn der Strahl, der den Schnittpunkt  $Va$  von  $g_b$  und  $g_c$  mit  $L'$  verbindet,  $i'I'$  in  $w$  schneidet, so trifft  $k'w$  die Gerade  $g_c$  in ihrem Berührungspunkt  $\gamma$ .

Analog werde  $i'I'$  vom Strahl, der den Schnittpunkt  $Wa$  von  $g_b'$  und  $g_c'$  mit  $K'$  verbindet in  $w$  geschnitten, so trifft  $l'w$  die Gerade  $g_b'$  in ihrem Berührungspunkt  $\beta'$ . Und wenn der Strahl, der den Schnittpunkt  $Wa$  von  $g_b'$  und  $g_c'$  mit  $l'$  verbindet,  $i'I'$  in  $w$  schneidet, so trifft  $K'w$  die Gerade  $g_c'$  in ihrem Berührungspunkte  $\gamma'$ .

Endlich möge der Strahl, der  $i'$  mit dem Schnittpunkt  $Uc$  von  $g_a$  und  $g_b$  verbindet,  $l'L'$  in  $w$  schneiden, so trifft  $K'w$  die Gerade  $g_a$  in ihrem Berührungspunkt  $\alpha$ . Und wenn der Strahl, der  $I'$  mit dem Schnittpunkt  $Vc$  von  $g_a'$  und  $g_b'$  verbindet  $l'L'$  in  $w$  schneidet so trifft  $k'w$  die Gerade  $g_a'$  in ihrem Berührungspunkte  $\alpha'$ .

Da wir ferner den Mittelpunkt  $\mu$  des Kegelschnittes  $G$  kennen, so ergeben die Berührungspunkte der Geraden  $g$  unmittelbar auch die Berührungspunkte der hiezu parallelen Geraden  $\gamma$ .

Auch die Berührungspunkte der in 116 konstruierten variablen Tangenten  $YZ$  und  $Y'Z'$  ergeben sich in ein-

facher Weise: Der Strahl, der  $I'$  mit dem Schnittpunkt von  $YZ$  und  $g_b'$  verbindet, schneide  $YL'$  in  $w$ , so trifft  $k'w$  die Gerade  $YZ$  in ihrem Berührungspunkte. 118. Oder der Strahl, der  $i'$  mit dem Schnittpunkte von  $Y'Z'$  und  $g_b$  verbindet, schneide  $YI'$  in  $w$ , so trifft  $K'w$  die Gerade  $Y'Z'$  in ihrem Berührungspunkte.

Haben wir den Berührungspunkt irgend einer Tangente  $G$  konstruiert z. B. den Berührungspunkt  $\alpha$  der Geraden  $g_a$ , so ist  $\mu\alpha$  ein Halbmesser von  $G$ , und ziehen wir durch den Mittelpunkt  $\mu$  zu  $g_a$  eine Parallele, so liegen auf dieser die zu  $\mu\alpha$  konjugierten Halbmesser. Sei  $\mu\alpha = u$  und bezeichnen wir den hierzu konjugierten Halbmesser mit  $v$ , so ist  $v$  gegeben durch  $u^2 + v^2 = \varsigma^2$ , wo  $\varsigma$  der Radius des Neunpunktkreises. Es ist somit  $v^2$  gleich der mit entgegengesetztem Zeichen genommenen Potenz des Berührungspunktes  $\alpha$  von  $g_a$  in Bezug auf den Neunpunktkreis.

Wir erhalten so nach Grösse und Richtung zwei konjugierte Halbmesser von  $G$ , und können schliesslich nach Grösse und Richtung die Axen des Kegelschnittes  $G$  konstruieren. 119.

Wenn ein Winkel des Stammdreiecks  $ABC$  gleich  $45^\circ$  ist, so geht der Kegelschnitt  $G$  in die Gerade über, welche die Höhenfusspunkte, die auf den jenen Winkel einschliessenden Seiten liegen, miteinander verbindet, s. 102 und 103. Durch jeden dieser beiden Fusspunkte gehen dann je sechs von den 12 Geraden  $g$  und  $\gamma$ . Wenn alle Winkel des Dreiecks  $ABC$  grösser als  $45^\circ$  sind, oder was auf dasselbe herauskommt, wenn das Dreieck  $i'k'l'$ , ganz innerhalb des Dreiecks  $ABC$  liegt, so ist  $G$  eine Ellipse. Wenn aber ein Winkel von  $ABC$  kleiner als  $45^\circ$  ist, so ist der Kegelschnitt  $G$  eine Hyperbel.

23. Februar 1902.



Corrigenda: Seite 231, Zeile 14 lies **p. 53.**

Seite 243, Schluss v. Absatz lies **H n''' N'''**, statt **n''' N'''**.