Die Differentialgleichung

so erhält man durch Subtraktion (I — II)

$$\text{III.} \qquad \frac{d\overset{a}{J}(x)}{dx} = -\frac{a}{x}\overset{a}{J}(x) + \overset{a-1}{J}(x)$$

durch Addition von I und III wird ferner

$$\text{IV.} \qquad \overset{a-1}{J}(x) - \overset{a+1}{J}(x) = 2\frac{d\overset{a}{J}(x)}{dx}$$

Dies sind die bekannten vier Funktionalgleichungen, durch die die Zylinderfunktionen meist definiert werden.*)

Der Vollständigkeit halber sei hier noch erwähnt, dass mit Hilfe der Formel

$$F(a, b, c, 1) = \frac{\Gamma(c)\,\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)}$$

die Funktion $\overset{a}{J}(x)$ für unendlich grosse Argumente geschätzt werden kann. Auch in den Kettenbruchentwicklungen lässt sich die Bessel'sche Funktion erster Art leicht als spezielle hypergeometrische Funktion erkennen.

II. Kapitel.

Die Differentialgleichung.

§ 3. Definitionsbemerkungen.

Im ersten Kapitel wurde auf ganz einfache Art die Bessel'sche Funktion $\overset{a}{J}(x)$ durch eine hypergeometrische Reihe dargestellt, worauf dann aus den allgemeinen Eigenschaften der letzteren die Bessel'sche Funktion als deren Spezialfall untersucht wurde. Vom theoretischen Standpunkte aus, wobei wir hauptsächlich an die in der Einleitung erwähnten Grunddefinitionen denken, bieten diese ersten Betrachtungen wenig, sie basieren auf einer einfachen Schlussweise, die uns über die eigentliche funktionentheoretische Beschaffenheit der Funktion wenig Auskunft gibt.

*) Nielsen: Handbuch der Theorie der Zylinderfunktionen, Leipzig 1904.

Ein tiefersehendes Studium der Funktion $\overset{a}{J}(x)$, insbesondere was deren Verwandtschaft mit der hypergeometrischen Funktion anbetrifft, lässt sich bedeutend erfolgreicher und klarer durchführen, wenn die Definitionsdifferentialgleichung an die Spitze gestellt wird.

Aus den im ersten Abschnitte mit I und II bezeichneten Funktionalgleichungen der Zylinderfunktion findet man leicht die in der mathematischen Literatur zuerst bei Bessel*) auftretende, nach ihm benannte Differentialgleichung:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{a^2}{x^2}\right)y = 0 \tag{1}$$

Um die im folgenden kommenden Bestimmungen der Integrationskonstanten möglichst einfach durchführen zu können, ziehen wir zur Definition der Funktion $\overset{a}{J}(x)$ noch die im ersten Abschnitte unter (4) gefundene Gleichung hinzu, die lautet:

$$\left|\frac{\Gamma(a+1)}{\left(\frac{x}{2}\right)^a} \cdot \overset{a}{J}(x)\right|_{x=0} = 1 \tag{2}$$

d. h. wir definieren die Funktion $\overset{a}{J}(x)$ als dasjenige partikuläre Integral der Differentialgleichung (1), das mit dem Faktor $\frac{\Gamma(a+1)}{\left(\frac{x}{2}\right)^a}$ multipliziert für sämtliche Werte des Parameters a zu 1 wird, falls das Argument der Funktion Null gesetzt wird.

§ 4. Herleitung der allgemeinen hypergeometrischen Differentialgleichung. — Die Riemann'sche P-Funktion.

Nach dieser einleitenden Bemerkung zur Definition der Bessel'schen Funktion erster Art müssen wir einiges über die hypergeometrischen Differentialgleichungen vorausschicken, bevor die Gleichung (1) als ein Spezialfall der allgemeinen hypergeometrischen Differentialgleichung, der Differentialgleichung der Riemann'schen P-Funktion, betrachtet werden kann.

*) Werke, I pag. 47.

Schon Euler*) fand, dass sich die Reihe

$$y = F(a, b, c, x)$$

als partikuläres Integral der Differentialgleichung

$$(3) \qquad x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + \left\{ c - (a+b+1)\,x \right\} \frac{dy}{dx} - a\,b\,y = 0$$

darstellen lässt.

Diese Differentialgleichung kann auf sehr einfache Weise, nach den in der Einleitung erwähnten Methoden, auf direktem Wege durch unendliche Reihen wie durch bestimmte Integrale integriert werden.

In neuerer Zeit stellte sich nun aber heraus, dass die hypergeometrische Reihe

$$y = F(a, b, c, x)$$

als Definition der hypergeometrischen Funktion wenig zulässig erscheint. Besonders darum, weil man heute bei Funktionen, die sich durch Differentialgleichungen definieren lassen, nicht nur ein bestimmtes partikuläres Integral ins Auge fasst, sondern allgemein jedwelche mögliche Lösung der betreffenden Differentialgleichung als eine diesbezügliche Funktion auffasst.

Man definiert daher heute als hypergeometrische Funktion allgemein die obige Reihe, noch multipliziert mit einer Potenz von x, einer solchen von (1 — x) und einer von x unabhängigen willkürlichen Konstanten, nämlich

$$(4) \qquad y = C\,x^{\alpha}(1-x)^{\gamma}\,F(a, b, c, x)$$

Aus den beiden ersten Differentialquotienten dieser Funktion ergibt sich durch einfache Koeffizientenvergleichung mit Gleichung (3) die Differentialgleichung, der unsere neue Funktion als partikuläres Integral genügt.

Führt man der Symmetrie des Resultates wegen die folgenden sechs Konstanten ein:

$$(5) \qquad \begin{array}{lll} \alpha = \alpha & \beta = a - \alpha - \gamma & \gamma = \gamma \\ \alpha' = 1 - c + \alpha & \beta' = b - \alpha - \gamma & \gamma' = c - a - b + \gamma \end{array}$$

*) Jecklin, Diss. phil. Bern 1901. pag. 12 ff.

woraus durch Addition folgt, dass

$$(6) \qquad \alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' = 1$$

so wird die neue Definitionsdifferentialgleichung:

$$(7) \quad x^2 (1-x)^2 \frac{d^2 y}{d x^2} - x(1-x) \left\{ (\alpha + \alpha' - 1) + (\beta + \beta' + 1) x \right\} \frac{d y}{d x}$$
$$+ \left\{ \alpha \alpha' - (\alpha \alpha' + \beta \beta' - \gamma \gamma') x + \beta \beta' x^2 \right\} y = 0$$

oder unter Berücksichtigung von (6)

$$(8) \qquad \frac{d^2 y}{d x^2} + \left\{ \frac{1-\alpha-\alpha'}{x} + \frac{1-\gamma-\gamma'}{x-1} \right\} \frac{d y}{d x}$$
$$+ \left\{ -\frac{\alpha \alpha'}{x} + \frac{\gamma \gamma'}{x-1} + \beta \beta' \right\} \frac{y}{x(x-1)} = 0^{*)}$$

Dies ist die allgemeine hypergeometrische Differentialgleichung, deren Lösung wir durch die Funktion

$$y = C\, x^\alpha (1-x)^\gamma F(a, b, c, x)$$

oder unter Berücksichtigung von (5), durch

$$(9) \quad y = C x^\alpha (1-x)^\gamma F(\alpha + \beta + \gamma, \alpha + \beta' + \gamma, 1 + \alpha - \alpha', x)$$

definiert haben.

Es werde nun diese neue Definitionsgleichung (8), in Bezug auf das Verhalten der komplexen Variablen x im Zahlenfelde, des Nähern betrachtet.

Die Differentialgleichung weist in den Punkten

$$x = 0 \qquad x = 1 \qquad x = \infty$$

Stellen singulären Charakters auf, denn für diese Werte werden die Koeffizienten der Gleichung unendlich gross. Wir sind nun keineswegs an die spezielle Differentialgleichung (8) gebunden, sondern wir suchen der Vollkommenheit halber, die drei singu lären Punkte derselben allgemein zu definieren, indem wir die zu Gleichung (8) analoge Differentialgleichung zu konstruieren suchen, die in Bezug auf ihre Koeffizienten die Unstetigkeitsstellen

$$x = a, \qquad x = b, \qquad x = c$$

aufweist.

---

*) S. u. a. Klein, hypergeometrische Funktion.

Diese verallgemeinerte Differentialgleichung erhält man durch die Substitution:

$$x = \frac{(z - a)(c - b)}{(z - b)(c - a)}$$

oder nach z aufgelöst

$$z = \frac{b(a - c)x - a(b - c)}{(a - c)x - (b - c)}$$

aus welchen beiden Gleichungen der Uebergang der Pole 0 ∞ 1 in a b c rasch ersichtlich ist. Fürdie Differentialgleichung (8) erhält man dann die Form*):

$$(10)\quad \frac{d^2y}{dz^2} + \left\{ \frac{1 - \alpha - \alpha'}{z - a} + \frac{1 - \beta - \beta'}{z - b} + \frac{1 - \gamma - \gamma'}{z - c} \right\} \frac{dy}{dz}$$

$$+ \left\{ \frac{\alpha\alpha'(a - b)(a - c)}{z - a} + \frac{\beta\beta'(b - a)(b - c)}{z - b} + \frac{\gamma\gamma'(c - a)(c - b)}{z - c} \right\} \frac{y}{(z - a)(z - b)(z - c)} = 0$$

Diese Differentialgleichung ist nun im Gegensatze zu (8) in Bezug auf die Konstanten $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ ganz symmetrisch gebaut, und zwar gehören zu dem Pole a die Konstanten $\alpha\alpha'$ zu b.... $\beta\beta'$ und zu c.... $\gamma\gamma'$.

Als Lösung obiger Differentialgleichung erhält man nun die durch Riemann**), allerdings auf ganz andere Art definierte P-Funktion

$$(11)\qquad y = P \left| \begin{matrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{matrix} \right|$$

Setzt man

$$a = 0 \qquad b = \infty \qquad c = 1$$

*) Papperitz, Math. Annalen, Bd. 25.

**) Riemann, Beiträge zur Theorie der durch die Gauss'sche Reihe F (a, b, c, x) darstellbaren Funktion. Werke pag. 62 ff.

so wird die Funktion zu

$$(12) \qquad y = P \left| \begin{matrix} 0 & \infty & 1 & \\ \alpha & \beta & \gamma & x \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{matrix} \right|$$

und dies ist die Lösung der Differentialgleichung (8).

Aus dieser speziellen P-Funktion, die Riemann noch einfacher mit

$$(13) \qquad y = P \left| \begin{matrix} \alpha & \beta & \gamma & \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & x \end{matrix} \right|$$

bezeichnet, deren einzelne Funktionszweige sich alle durch hypergeometrische Reihen darstellen lassen, folgt indirekt, dass die allgemeine P-Funktion (11) als Lösung der Differentialgleichung (10) definiert werden darf.

Die Konstanten α, α'; β, β'; γ, γ' nennt man die Exponenten der P-Funktion und zwar treten dieselben wie schon bemerkt stets paarweise auf, indem jedes Exponentenpaar $\alpha\,\alpha'$, $\beta\,\beta'$, $\gamma\,\gamma'$ zu den singulären Punkten a, b, c resp. 0, ∞, 1 in gewissen Beziehungen steht. Ferner muss auch für die P-Funktion die frühere Bedingung bestehen bleiben, dass

$$\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' = 1$$

ist, des weitern haftet der Riemann'schen Definition noch die Einschränkung an, dass keine der Exponentendifferenzen

$$\alpha - \alpha', \quad \beta - \beta', \quad \gamma - \gamma'$$

eine ganze Zahl sein darf.

§ 5. Zusammenhang der Bessel'schen Differentialgleichung mit der hypergeometrischen. — Darstellung der Funktion $\overset{a}{J}(x)$ als Riemann'sche P-Funktion.

Klein*) findet folgenden Zusammenhang zwischen den Differentialgleichungen (10) und (1)

Setzt man in (10)

$$a = 0, \ b = \infty, \ c = c, \ \alpha = a \text{ und } \alpha' = -a$$

*) Hypergeometrische Funktion, pag. 281 ff.

so erhält man, falls z durch x ersetzt wird:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + \left\{ \frac{1}{x} + \frac{1 - \gamma - \gamma'}{x - c} \right\} \frac{d y}{d x} + \left\{ \frac{c a^2}{x} + \beta \beta' + \frac{c \gamma \gamma'}{x - c} \right\} \frac{y}{x (x - c)} = 0$$

oder

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + \left\{ \frac{1}{x} + \frac{1 - \gamma - \gamma'}{x - c} \right\} \frac{d y}{d x} + \left\{ \frac{c a^2}{x^2 (x - c)} + \frac{\beta \beta' - \gamma \gamma'}{x (x - c)} + \frac{\gamma \gamma'}{(x - c)^2} \right\} y = 0$$

Nun lasse man c unendlich wachsen, gleichzeitig aber auch die Exponenten γ, γ' und β, β', doch derart dass

$$\beta + \beta', \ \gamma + \gamma' \ \text{sowie auch} \ \beta \beta' - \gamma \gamma'$$

endlich bleiben, ferner soll dabei

$$\lim \frac{\gamma \gamma'}{c^2} = 1$$

sein.

Führt man den genannten Grenzübergang unter Berücksichtigung der angeführten Bedingungen durch, so erhält man die Bessel'sche Gleichung

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + \frac{1}{x} \frac{d y}{d x} + \left\{ 1 - \frac{a^2}{x^2} \right\} y = 0 \tag{14}$$

oder in der Form von Anger*)

$$x^2 \frac{d^2 y}{d x^2} + x \frac{d y}{d x} + (x^2 - a^2) y = 0 \tag{15}$$

Die hypergeometrische Differentialgleichung geht somit in die Bessel'sche über, wenn die singulären Punkte 1 und ∞ der erstern im Unendlichen zusammenfallen, wenn also der Horizont zum wesentlich singulären Punkte der Differentialgleichung wird. Die Bessel'sche Differentialgleichung ist somit ein Grenzfall der hypergeometrischen.

*) Anger, Untersuchungen über die Funktion $\overset{h}{J_k}$, Danzig 1855.

Weil sich Gleichung (15) als Spezialfall von (10) geben lässt, ist auch deren Lösung, die Bessel'sche Funktion $\overset{a}{J}(x)$ durch eine Riemann'sche P-Funktion darstellbar. Diese Darstellung hat schon Olbricht*) allerdings auf ganz andern Wegen, vorgenommen.

Bezeichnet man mit v eine zum Unendlichgrosswerden bestimmte Zahl, so kann

$$c = \pm v$$

gesetzt werden, es ergeben sich für beide Vorzeichen gleiche Resultate. Ferner müssen die Grössen γ und γ' sowie auch β und β', falls sie unendlich gross gedacht werden, deren Summen aber endlich sein sollen, unbedingt entgegengesetztes Vorzeichen haben. Damit nun aber das Produkt im Zähler des Grenzwertes

$$\lim \frac{\gamma\gamma'}{c^2} = 1$$

positiv ist, müssen die Exponenten γ und γ' imaginär sein. Das gleiche gilt für die Exponenten β und β', da auch

$$\beta\beta' - \gamma\gamma'$$

endlich bleiben soll.

Man erhält deshalb für die Grössen der P-Funktionsdarstellung der Bessel'schen Transcendenten:

$$\lim_{v=\infty} \left\{ \begin{array}{llll} \alpha = a & \beta = iv & \gamma = iv & b = \infty \\ \alpha' = -a & \beta' = -iv & \gamma' = -iv & c = \pm v \end{array} \right\}$$

weshalb sich nach (11) als Lösung der Bessel'schen Differentialgleichung folgende P-Funktion ergibt:

$$\text{(16)} \qquad y = \lim_{v=\infty} P \left| \begin{array}{cccc} 0 & \infty & \pm v & \\ a & iv & iv & x \\ -a & -iv & -iv & \end{array} \right|$$

Man trachte nun danach diese spezielle P-Funktion in hypergeometrischen Reihen darzustellen. Zu diesem Zwecke

*) Olbricht, Diss. phil. Leipzig 1887.

muss die Funktion einer Transformation unterworfen werden, wonach die Verzweigungspunkte

$$\lim_{v=\infty} \quad 0 \quad \infty \quad \pm v$$

übergehen in die Werte

$$0 \quad \infty \quad 1$$

Viele von uns angestellte Transformationsversuche zeigten, dass eine einfache Transformation auf direkten Wegen sich hier kaum finden lässt. Wir kehren deshalb noch einmal zu der allgemeinen hypergeometrischen Differentialgleichung (10) zurück und leiten daraus die Bessel'sche Gleichung auf ganz andere Art her, indem wir nämlich an den Zusammenhang der Bessel'schen Funktionen mit den Kugelfunktionen denken. Die auf diese Weise hervorgehende P-Funktion lässt sich dann sehr leicht transformieren, worauf sich eine Darstellung durch hypergeometrische Reihen rasch finden lässt.

Setzt man in Gleichung (10)

$$z = \cos\frac{x}{n}$$

so werden die Differentialquotienten

$$\frac{dy}{dz} = -\frac{n}{\sin\frac{x}{n}} \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \left\{\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{n} \operatorname{cotg}\frac{x}{n}\right\} \frac{n^2}{\sin^2\frac{x}{n}}$$

Geben wir nun den Verzweigungspunkten

$$a \quad b \quad c$$

die Werte $\quad -1 \quad n \quad +1$

so geht (10) über in:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \left\{\frac{1-\alpha-\alpha'}{\cos\frac{x}{n}+1} + \frac{1-\beta-\beta'}{\cos\frac{x}{n}-n} + \frac{1-\gamma-\gamma'}{\cos\frac{x}{n}-1}\right\} \frac{\sin\frac{x}{n}}{n} \cdot \frac{dy}{dx} - \frac{1}{n}\operatorname{cotg}\frac{x}{n} \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$+\left\{\frac{2\alpha\alpha'(1+n)}{\cos\frac{x}{n}+1}+\frac{\beta\beta'(n^2-1}{\cos\frac{x}{n}-n}+\frac{2\gamma\gamma'(1-n)}{\cos\frac{x}{n}-1}\right\}\frac{\sin^2\frac{x}{n}}{n^2}\times$$

$$\times\frac{y}{(\cos\frac{x}{n}+1)(\cos\frac{x}{n}-n)(\cos\frac{x}{n}-1)}=0$$

Zur Grenze $\lim n=\infty$ übergegangen ergibt, falls die Exponentensummen $\alpha+\alpha'$ und $\beta+\beta'$ endlich bleiben,

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{2(1-\gamma-\gamma')}{x}\cdot\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x}\cdot\frac{dy}{dx}+\left\{\frac{\alpha\alpha'}{n^2}-\frac{\beta\beta'}{n^2}+\frac{4\gamma\gamma'}{n^2}\right\}y=0$$

Setzt man nun

$$\alpha=\gamma=\frac{a}{2},\qquad \alpha'=\gamma'=-\frac{a}{2}$$

und lässt man ferner die Exponenten β und β' unendlich wachsen, doch derart, dass deren Summe

$$\beta+\beta'=1$$

ist, so erhält man wiederum die Bessel'sche Differentialgleichung, nämlich

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+\left(1-\frac{a^2}{x^2}\right)y=0$$

deren Lösung sich nun als folgende P-Funktion ergibt:

$$(17)\qquad y=\lim_{n=\infty}P\left|\begin{array}{cccc}-1 & \infty & +1 & \\ \frac{a}{2} & n & \frac{a}{2} & \cos\frac{x}{n}\\ -\frac{a}{2} & -n+1 & -\frac{a}{2} & \end{array}\right|$$

In dieser Funktion sind zwei Exponentendifferenzen einander gleich. Solche P-Funktionen definiert Klein*) direkt als Kugelfunktionen, da sie stets auf solche führen. Auf diese Weise ergibt sich sehr einfach das Verwandtschaftsverhältnis zwischen den Bessel'schen- und Kugelfunktionen.

*) Klein, hypergeometrische Funktionen, pag. 219.

Riemann*) fand nun, dass sich P-Funktionen, in denen zwei Exponentendifferenzen einander gleich sind, durch 144 hypergeometrische Reihen darstellen lassen, wo je $^1/_3$, also 48 Entwicklungen um einen Verzweigungspunkt Geltung haben. Jeder der sechs Zweige der Funktion

$$P^{\alpha}\, P^{\alpha'} \quad P^{\beta}\, P^{\beta'} \quad P^{\gamma}\, P^{\gamma'}$$

liefert 24 Entwicklungen, wo diejenigen für $P^{\alpha}P^{\alpha'}$ resp. $P^{\beta}P^{\beta'}$ resp. $P^{\gamma}P^{\gamma'}$ in der Umgebung der Pole a resp. b resp. c konvergieren werden.

Die früher als Integral der Bessel'schen Differentialgleichung gefundene P-Funktion (16)

$$y = \lim_{v=\infty} P \left| \begin{matrix} 0 & \infty & v & \\ a & iv & iv & x \\ -a & -iv & -iv & \end{matrix} \right|$$

zeigt nun aber, dass von den 144 Reihendarstellungen zum Vorneherein $^2/_3$ wegfallen, denn die Pole b und c obiger Funktion fallen im Unendlichen zusammen, es entsteht eine wesentliche, singuläre Stelle, um die eine Entwicklung nicht existieren kann. Eine Darstellung der Funktionszweige P^{β}, $P^{\beta'}$, P^{γ}, $P^{\gamma'}$ ist nicht möglich. Aus der zweiten Darstellung ist ferner ersichtlich, dass eine Vertauschung der Exponentenpaare unter sich keine neuen Reihendarstellungen liefert, wie leicht durch Ausrechnung gezeigt werden kann. Die noch existierenden 48 Entwicklungen werden deshalb nochmals um $^1/_4$ reduziert, so dass schliesslich noch 12 hypergeometrische Reihen zur Darstellung unserer P-Funktion verbleiben. Diese 12 Reihen können vorläufig bloss als Symbole betrachtet werden, wie schon Olbricht**) bemerkt hat. Lassen sich die Grenzübergänge vollziehen, so erhält man durch passende Bestimmung der Integrationskonstanten Reihendarstellungen für die zwei partikulären Integrale $\overset{a}{J}(x)$ und $\overset{-a}{J}(x)$. Den einfachsten dieser Grenzübergänge, der zu einer wirklichen Reihendarstellung führt, wollen wir hier vornehmen.

*) Werke, pag. 73.

**) Diss. phil. Leipzig, 1887.

Nach Riemann*) gilt für P-Funktionen, deren zwei Exponentendifferenzen einander gleich sind, die Transformation

$$P\left|\begin{matrix} -1 & \infty & +1 & \\ \gamma & \beta & \gamma & x \\ \gamma' & \beta' & \gamma' & \end{matrix}\right| = P\left|\begin{matrix} 0 & \infty & 1 & \\ 0 & \frac{\beta}{2} & \gamma & x^2 \\ \frac{1}{2} & \frac{\beta'}{2} & \gamma' & \end{matrix}\right|$$

dies auf die Funktion (18) angewendet, ergibt:

$$(19)\quad y = \lim_{n=\infty} P\left|\begin{matrix} -1 & \infty & +1 & \\ \frac{a}{2} & n & \frac{a}{2} & \cos\frac{x}{n} \\ -\frac{a}{2} & -n & -\frac{a}{2} & \end{matrix}\right| = \lim_{n=\infty} P\left|\begin{matrix} 0 & \infty & 1 & \\ 0 & \frac{n}{2} & \frac{a}{2} & \cos^2\frac{x}{n} \\ \frac{1}{2} & -\frac{n}{2} & -\frac{a}{2} & \end{matrix}\right|$$

und dies wird zu, da $\lim_{n=\infty} \cos^2\frac{x}{n} = 1 - \frac{x^2}{n^2}$

$$y = \lim_{n=\infty} P\left|\begin{matrix} 0 & \infty & 1 & \\ 0 & \frac{n}{2} & \frac{a}{2} & \left(1-\frac{x^2}{n^2}\right) \\ \frac{1}{2} & -\frac{n}{2} & -\frac{a}{2} & \end{matrix}\right|$$

durch Vertauschung der Pole 0 und 1 ergibt sich

$$(20)\qquad y = \lim_{n=\infty} P\left|\begin{matrix} 0 & \infty & 1 & \\ \frac{a}{2} & \frac{n}{2} & 0 & \frac{x^2}{n^2} \\ -\frac{a}{2} & -\frac{n}{2} & \frac{1}{2} & \end{matrix}\right|$$

Die zwei in der Umgebung von a voneinander unabhängigen Zweige P^{α} und $P^{\alpha'}$ der Funktion

$$P\left|\begin{matrix} 0 & \infty & 1 & \\ \alpha & \beta & \gamma & x \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{matrix}\right|$$

*) Werke, pag. 71.

lauten nun in Form von hypergeometrischen Reihen

$$(21)\begin{cases} y_1 = P^{\alpha} = C\,x^{\alpha}\,(1-x)^{\gamma}\,F\,(\alpha+\beta+\gamma, \alpha+\beta'+\gamma, 1+\alpha-\alpha', x) \\ y_2 = P^{\alpha'} = C'\,x^{\alpha'}\,(1-x)^{\gamma}\,F\,(\alpha'+\beta+\gamma, \alpha'+\beta'+\gamma, 1-\alpha+\alpha', x) \end{cases}$$

hierin die Werte von (20) eingesetzt, ergibt

$$y_1 = \lim_{n=\infty} C\left(\frac{x^2}{n^2}\right)^{\frac{a}{2}} F\left(\frac{a}{2}+\frac{n}{2}, \frac{a}{2}-\frac{n}{2}, a+1, \frac{x^2}{n^2}\right)$$

$$y_2 = \lim_{n=\infty} C'\left(\frac{x^2}{n^2}\right)^{-\frac{a}{2}} F\left(-\frac{a}{2}+\frac{n}{2}, -\frac{a}{2}-\frac{n}{2}, 1-a, \frac{x^2}{n^2}\right)$$

nun kann gesetzt werden:

$$\lim_{n=\infty} F\left(\frac{n}{2}, -\frac{n}{2}, a+1, \frac{x^2}{n^2}\right) = \lim_{n=\infty} F\left(n, n, a+1, -\frac{x^2}{4n^2}\right)$$

somit ergeben sich folgende zwei, voneinander unabhängige partikuläre Lösungen der Bessel'schen Differentialgleichung

$$(22)\qquad \begin{aligned} y_1 &= \lim_{n=\infty} C_1\,x^a\,F\left(n, n, a+1, -\frac{x^2}{4n^2}\right) \\ y_2 &= \lim_{n=\infty} C_2\,x^{-a}\,F\left(n, n, 1-a, -\frac{x^2}{4n^2}\right) \end{aligned}$$

wie ersichtlich, geht y_1 in y_2 über, falls a durch $-$a ersetzt wird.

Bedenken wir nun, dass am Anfang dieses Kapitels die Bessel'sche Funktion erster Art als dasjenige partikuläre Integral der Bessel'schen Differentialgleichung definiert wurde, für das nach Gleichung (2)

$$\left|\frac{\Gamma(a+1}{\left(\frac{x}{2}\right)^a}\cdot y\right|_{x=0} = 1$$

ist, so ergibt sich danach für die erste der zwei Gleichungen (22) für C_1

$$\left| \frac{\Gamma(a+1) \cdot C_1 x^a}{\left(\frac{x}{2}\right)^a} \cdot F\left(n, n, a+1, -\frac{x^2}{4n^2}\right) \right|_{x=0} = 1$$

$$C_1 = \frac{1}{2^a} \cdot \frac{1}{\Gamma(a+1)}$$

analog wird

$$C_2 = \frac{1}{2^{-a}} \cdot \frac{1}{\Gamma(1-a)}$$

und es resultieren durch Einsetzen der Werte C_1 resp. C_2 in (22) die bekannten Funktionen

$$(23) \qquad \begin{aligned} \overset{a}{J}(x) &= \lim_{n=\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^a}{\Gamma(a+1)} F\left(n, n, a+1, -\frac{x^2}{4n^2}\right) \\ \overset{-a}{J}(x) &= \lim_{n=\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{-a}}{\Gamma(1-a)} F\left(n, n, 1-a, -\frac{x^2}{4n^2}\right) \end{aligned}$$

Das allgemeine Integral wird unter Zuziehung zweier willkürlicher Integrationskonstanten durch die Form gegeben

$$(24) \qquad Y = c\,\overset{a}{J}(x) + c_1\,\overset{-a}{J}(x)$$

Hiebei bleibt zu berücksichtigen, dass diese Darstellung nur für gebrochene Parameter gilt, denn in den P-Funktionen (16) und (17) dürfen laut Definition die Exponentendifferenzen nicht ganzzahlig sein.

Die spezielle Betrachtung für ganzzahlige Parameter fordert die Einführung der Neumann'schen Funktion $\overset{n}{Y}(x)$ resp. der Schläfli'schen $\overset{n}{K}(x)$ Funktion als zweites partikuläres Integral der Differentialgleichung.