

Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern
Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern
Band: - (1942)

Vereinsnachrichten: Sitzungsberichte der Mathematischen Vereinigung in Bern

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 12.05.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Sitzungsberichte der Mathematischen Vereinigung in Bern

119. Sitzung, Freitag, den 6. Februar 1942.

Herr Dr. B. Eckmann (Zürich) spricht über das Thema: „Ueber Zusammenhänge zwischen algebraischen und topologischen Problemen“.

Es soll von einigen Problemen die Rede sein, die elementaren Fragen der reellen Algebra und der höherdimensionalen Geometrie entspringen und in einem neuern Zweig der Topologie, die Theorie der stetigen Deformationen (Homotopietheorie) führen, wo sie zum Teil gelöst werden können, während sie sich einer elementaren Behandlungsweise bisher zu entziehen scheinen.

Der Versuch, eine lineare Gleichung

$$(1) \quad a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = 0$$

für alle (reellen) Werte der Koeffizienten gleichzeitig in nicht-trivialer Weise zu lösen, wie dies bei geradem n ohne weiteres möglich ist:

$$(2) \quad x_1 = a_2, x_2 = -a_1, x_3 = a_4, x_4 = -a_3, \text{ usw.,}$$

legt folgende Definition nahe: Wir verstehen unter einer stetigen Lösung der reellen linearen Gleichung (1) ein System von n reellen Funktionen $x_i = f_i(a_1, \dots, a_n)$, $i = 1, \dots, n$, die für alle reellen Werte der Koeffizienten $a_1, \dots, a_n \neq (0, \dots, 0)$ stetig sind, nie alle verschwinden und die Gleichung

$$\sum a_i f_i(a_1, \dots, a_n) = 0$$

erfüllen. Für gerades n gibt es derartige stetige Lösungen (z. B. (2)), für ungerades n dagegen nicht, wie aus einem bekannten topologischen Satz folgt. Man kann nämlich ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Bedingungen $\sum a_i^2 = 1$ und $\sum x_i^2 = 1$ hinzunehmen und die a_i und x_i als Komponenten von zwei orthogonalen Einheitsvektoren im n -dimensionalen Euklidischen Raum R^n interpretieren; dann ist eine stetige Lösung von (1) gleichbedeutend mit einem Richtungsfeld in der $(n-1)$ -dimensionalen Sphäre S^{n-1} , d. h. mit einem stetigen singularitätenfreien Feld von tangentialen Einheitsvektoren der S^{n-1} . Ein solches Feld gibt es bei ungeradem n nicht (Satz von Poincaré-Brouwer).

Genau dasselbe Resultat gilt nun auch im Komplexen, d. h. wenn die a_i alle komplexen Werte $(0, \dots, 0)$ durchlaufen und man auch komplexe Funktionen $x_i = f_i(a_1, \dots, a_n)$ zulässt. Um dies zu beweisen, muss man aber die Theorie der Richtungsfelder ersetzen durch die Theorie der sog.

Faserungen¹⁾, die in gewisser Hinsicht die bei den Richtungsfeldern und andererseits die in der Topologie der Gruppenräume auftretenden Begriffsbildungen verallgemeinert. Die Behauptung, dass die Gleichung (1) bei ungeraden n im Komplexen keine stetige Lösung besitzt, wird dabei auf die Diskussion einer dimensionserniedrigenden Sphärenabbildung zurückgeführt²⁾; die Untersuchung derartiger Abbildungen gehört zu den aktuellen Problemen der Topologie.

Aus diesem Satz entnimmt man leicht eine algebraische Folgerung (die auch im Reellen von Interesse ist): n sei ungerade; wenn n komplexe (reelle) Polynome in n Variablen a_i für alle komplexen (reellen) Werte der a_i die Identität

$$\sum a_i f_i(a_1, \dots, a_n) = 0$$

erfüllen, so besitzen sie eine von $(0, \dots, 0)$ verschiedene gemeinsame Nullstelle. —

Wenn er im Reellen statt einer stetigen Lösung der Gleichung (1) $m > 1$ solche gibt, die durchwegs linear unabhängig sind (das ist nach dem obigen höchstens bei geradem n , und natürlich nur für $m < n$ möglich), so bedeutet dies geometrisch die Existenz eines m -Feldes in der S^{n-1} , d. h. eines Systems von m Richtungsfeldern, die in jedem Punkt der S^{n-1} linear unabhängig sind; wenn es in der S^{n-1} ein $(n-1)$ -Feld gibt, so ist sie parallelisierbar³⁾. Mit Hilfe von Sätzen über Faserungen kann man nun zeigen⁴⁾, dass es dann und nur dann in der S^{2n-1} ein 2-Feld gibt, wenn die Gleichung (1) im Komplexen eine stetige Lösung besitzt. Es folgt also (für $n = 2k + 1$):

In einer Sphäre der Dimension $4k + 1$ gibt es kein 2-Feld; sie ist also sicher nicht parallelisierbar. Dagegen weiss man, dass die Sphären S^1, S^3, S^7 parallelisierbar sind, während die Sphären gerader Dimension es sicher nicht sind. Offen bleibt also die Frage der Parallelisierbarkeit für die Sphären S^{11}, S^{15} , usw.

Dass aus diesen Ergebnissen analog wie oben algebraische Folgerungen gezogen werden können, liegt auf der Hand. Ähnliche Folgerungen sind schon von Stiefel und Hopf⁵⁾ (zwar nicht für beliebige, sondern nur für ungerade stetige Funktionen, dafür aber nicht nur für die Dimensionen $4k + 1$) angegeben worden.

120. Sitzung, Freitag, den 15. Mai 1942.

Herr Prof. Dr. A. Mercier spricht über das Thema: „Quantentheorie als didaktisches Problem“.

¹⁾ B. Eckmann, Zur Homotopietheorie gefaseter Räume (Comm. math. helv. 14 (1941/42)), wo weitere Literaturangaben über Faserungen zu finden sind.

²⁾ B. Eckmann, Systeme von Richtungsfeldern in Sphären und stetige Lösungen komplexer linearer Gleichungen (erscheint demnächst in den Comm. math. helv.), § 3.

³⁾ E. Stiefel, Richtungsfelder und Fernparallelismus in n -dimensionalen Mannigfaltigkeiten (Comm. math. helv. 8 [1936]).

⁴⁾ vgl. ¹⁾, Satz 26.

⁵⁾ Comm. math. helv. 13 (1940).

Wir verweisen auf die im gleichen Heft erscheinende Publikation des Referenten.

121. Sitzung, Freitag, den 30. Oktober 1942.

Herr Prof. Dr. H. Hadwiger spricht über das Thema: „Konvergenz- und Divergenzbegriffe und ihre Klassifikation“.

Für Zahlenfolgen bzw. komplexwertige Funktionen eines reellen Parameters bei linksseitiger Annäherung an einen Randpunkt des Definitionsintervalls werden die Begriffe Endwert und Endwertmenge eingeführt. Je nach dem diese Endwertmenge einpunktig oder mehrpunktig bzw. beschränkt oder unbeschränkt ist, heisst das Verhalten der Folge oder der Funktion bestimmt oder unbestimmt bzw. konvergent oder divergent. So ergeben sich die vier Verhaltensarten: *bestimmt konvergent*, *bestimmt divergent*, *unbestimmt konvergent* und *unbestimmt divergent*. Es wird eine Erweiterung des Abelschen Stetigkeitssatzes, die sich auf Grund der neuen Begriffe aussprechen lässt, in Aussicht gestellt. Ferner weist der Referent auf eine Erweiterung des Steinitz'schen Umordnungssatzes hin, die sich ebenfalls auf den neuen Begriff der unbestimmten Konvergenz stützt (Vgl. H. Hadwiger, Ein Satz über bedingt konvergente Vektorreihen, Math. Zeitschr. 47, 1942, 663—668).

122. Sitzung, Freitag, den 27. November 1942.

Herr Dr. W. Michael spricht über das Thema: „Die Vorzeichenfrage der Elektrotechnik in kritischer Beleuchtung“.

In der Wechselstromtheorie, insbesondere wenn sie sich der symbolischen Methode bedient, bringt die Vorzeichenfrage einige Schwierigkeiten mit sich. Diese Schwierigkeiten haben ihren Grund darin, dass es im allgemeinen verschiedene Möglichkeiten der Darstellung gibt und dass in der Literatur von diesen verschiedenen Möglichkeiten — oft ohne nähere Erläuterung — Gebrauch gemacht wird.

Diese Tatsache erschwert das Studium der elektrotechnischen Literatur und wird misslich empfunden. Es sind daher schon seit längerer Zeit Bestrebungen im Gange, feste Vorzeichenregeln aufzustellen.

Diesem Zweck dient auch ein Entwurf von Prof. E m d e, für die Vorzeichenregeln der Elektrotechnik, den der Ausschuss für Einheiten und Formelgrössen in Deutschland veröffentlicht hat. Die Meinungen über diesen Entwurf sind im genannten Ausschuss noch geteilt, ein Zeichen, dass der Entwurf noch nicht ganz befriedigt. Der Ausschuss wünscht daher, dass die Fachgenossen den Fortgang der Arbeit durch ihre Kritik fördern mögen.

Grundbedingung für eine Verständigung in solchen grundsätzlichen Fragen ist zunächst die völlige begriffliche Abklärung des Sachverhaltes. Der Vortragende zeigte anhand möglichst einfacher Beispiele, wie diese zu erlangen sei. Wesentlich ist dabei, dass man sich über die Bedeutung des Bezugssystems (Raumdiagramm) klar sei und dass man den willkürlich

wählbaren (positiven) „Zählrichtungen“ für die elektrischen und magnetischen Grössen und den „wahren“ Richtungen derselben im Raume richtig unterscheiden lernt. Dies zuerst klar erkannt zu haben, ist das Verdienst von Dr. J. Sauter und Dr. O. Bloch (s. O. Bloch, „Die Ortskurven der graphischen Wechselstromtechnik“, Zürich 1917). Weitere Beiträge zur Klärung der Vorzeichenregeln wurden von verschiedenen Autoren geliefert, darunter von Ing. A. v. Brunn, Prof. Dr. Ing. Kloss und vom Vortragenden (s. W. Michael, Theorie der Wechselstrommaschinen in vektorieller Darstellung, Leipzig 1937).

Da die Vorzeichen der verschiedenen Grössen in den Vektordiagrammen von der Wahl des Bezugsbildes, das man dem zu untersuchenden Objekt (Gerät, Maschine) zugrunde legt, abhängen und nur in Verbindung mit diesem eindeutig bestimmbar sind, wird man nur dann einheitliche Vorzeichenregeln bekommen, wenn vorerst bestimmte Vereinbarungen hinsichtlich der zu wählenden Bezugssysteme getroffen werden. Es ist zu hoffen, dass die in dieser Richtung unternommenen Bemühungen des genannten Ausschusses bald von Erfolg gekrönt sein mögen.

123. Sitzung, Mittwoch, den 2. Dezember 1942.

Demonstrationen von mathematischen Lehrfilmen mit einem Begleitreferat des Herstellers, J. L. Nicolet (Pully, Vaud): „De l'utilité du dessin animé pour éveiller l'intuition mathématique“.

Es handelt sich um geschickt ausgeführte filmtechnische Interpretationen elementargeometrischer Sachverhalte und planimetrischer Sätze, die sich in den Dienst des elementaren Mathematikunterrichts stellen lassen.
