

**Zeitschrift:** Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Bern  
**Herausgeber:** Naturforschende Gesellschaft in Bern  
**Band:** 8 (1951)

**Vereinsnachrichten:** Sitzungsberichte der Mathematischen Vereinigung in Bern

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 13.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# SITZUNGSBERICHTE

## der Mathematischen Vereinigung in Bern

*164. Sitzung, Freitag, den 20. Januar 1950*

Vortrag von Herrn Prof. Dr. Max Schürer (Bern): «Ueber die Methode der kleinsten Quadrate.»

Der Referent zeigt, daß sich mit Hilfe der Indicesrechnung die umfangreichen Ableitungen der Gebrauchsformeln (vgl. insbesondere Helmert, Die Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate) in eine bedeutend kürzere, konzisere Form bringen lassen.

Die Ausführungen erscheinen in extenso an anderer Stelle.

---

*165. Sitzung, Freitag, den 17. Februar 1950*

Herr Prof. Dr. Alexander Dinghas (Freie Universität, Berlin) spricht über «Neuere Entwicklungen des klassischen isoperimetrischen Problems».

Die charakteristischen Fortschritte, die innerhalb der Geschichte des isoperimetrischen Problems in den zwei letzten Dezennien verzeichnet werden können, bestehen darin, daß es gelang, die klassische isoperimetrische Ungleichung für Körper eines  $k$ -dimensionalen euklidischen oder nicht euklidischen Raumes von Stufe zu Stufe unter stets schwächer werdenden Voraussetzungen abzuleiten. Mit dieser Entwicklung ist auch eine entsprechende Wandlung in Methode und Begriffsfestsetzung naturgemäß verbunden; insbesondere ist der klassische nach den Prinzipien der Analysis indirekt gebildete Oberflächenbegriff ersetzt worden durch einen solchen, der nach den Prinzipien der Mengengeometrie direkt angesetzt wird. Es handelt sich um die (untere) Minkowskische Oberfläche. Die Probleme wurden damit der mengengeometrischen Methode direkt zugänglich und die Verwendung analytischer Hilfsmittel trat immer mehr in den Hintergrund. Dies brachte Gewinn im doppelten Sinn: In dem Maße, wie die Theoreme an Allgemeinheit ihrer Gültigkeit zunahmen, wurden ihre Beweise kürzer und sogar elementarer. Der Referent ist mit zahl-

reichen Abhandlungen an dieser fortschrittlichen Entwicklung wesentlich beteiligt<sup>1)</sup>. Der Hauptteil des Vortrages ist dem heute wohl allgemeinsten und zugleich kürzesten Isoperimetriebeweis für den  $k$ -dimensionalen euklidischen Raum gewidmet, der sich auf eine beliebige abgeschlossene und beschränkte Punktmenge bezieht. Dieser ist vollständig veröffentlicht<sup>2)</sup>. Auf eine einläßlichere Darstellung darf deshalb hier verzichtet werden.

Die vorstehenden Bemerkungen sind als Kommentar zum Vortrag zu interpretieren und stehen mit Äußerungen des Referenten nur in sehr losem Zusammenhang.

166. Sitzung, Dienstag, den 28. Februar 1950 (Mitteilungsabend)

1. Herr Dr. Hans Lehmann (Bern) spricht über «Ein einfaches geometrisches Motiv».

Ein rechtwinkliges Dreieck  $ABC$  (vgl. Fig. 1) sei durch zwei rechtwinklige Dreiecke, deren eine Katheten auf derselben Geraden durch den Scheitel des rechten Winkels liegen, ergänzt. Diese Ergänzungsdreiecke sind ähnlich und es folgt  $xy = uv$ .

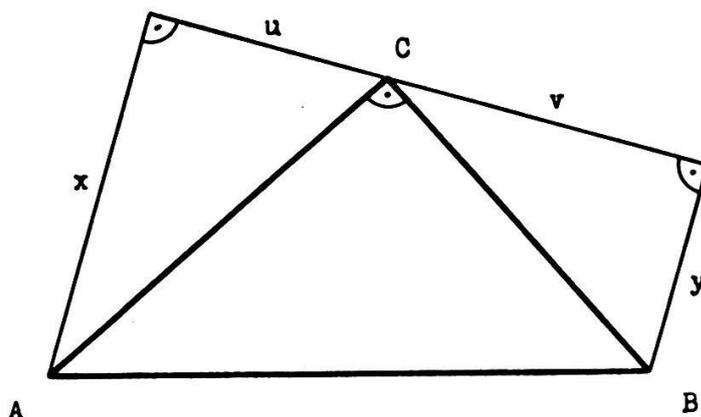


Fig. 1

Diese einfache Grundfigur läßt sich in einer ganzen Reihe elementargeometrischer Figuren wiedererkennen und liefert zwanglos neben Beweisen für den Höhensatz und den Satz des Pythagoras auch Aussagen über den Goldenen Schnitt, das Höhenfußdreieck, den Feuerbachkreis und die Kegelschnitte.

<sup>1)</sup> Von ihm stammt der erste symmetrisierungsfreie Beweis: «Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel für den  $n$ -dimensionalen Raum», S.-B. Akad. Wiss. Wien, math.-naturw. Kl. IIa, 149 (1940), 399—432. Hier ist noch der klassische Oberflächenbegriff verwendet; dies trifft auch zu für eine weitere vereinfachte Arbeit: «Ueber die isoperimetrische Ungleichung im gewöhnlichen Raum», Mh. Math. Physik 51 (1944), 153—172. Auf den Minkowskischen Oberflächenbegriff stützt sich die Abhandlung: «Einfacher Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel im euklidischen Raum von  $n$  Dimensionen», Math. Nachr. 2 (1949), 107—113.

<sup>2)</sup> Die letzte Arbeit nach Verzeichnis in 1).

Fig. 2 zeigt seine Anwendung zur Herleitung der Heronschen Formel:

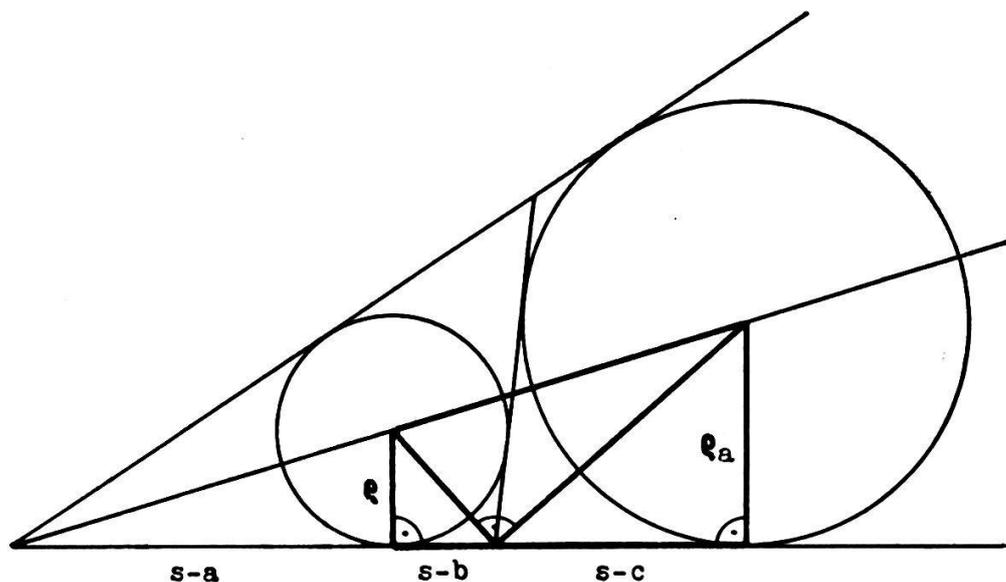


Fig. 2

Es ist nach der Grundfigur

$$q \cdot q_a = (s-b) (s-c),$$

nach dem Strahlensatz

$$\begin{aligned} q : q_a &= (s-a) : s \\ \text{und es folgt} \quad q^2 &= (s-a) (s-b) (s-c) : s \\ \text{oder} \quad F^2 &= s^2 q^2 = (s-a) (s-b) (s-c) s. \end{aligned}$$

### 2. Herr Dr. Alfred Maret (Biel) spricht «Ueber Flächeninhalt und Volumen».

Diese Mitteilung des Referenten ist als Anregung für den Unterricht gedacht. Bei einer ersten Einführung des Flächenbegriffs zeigt es sich, daß schon für eine so elementare Figur wie das Dreieck in der Formel für den Flächeninhalt andere (zum Beispiel Seiten und Höhen) als die üblichen Bestimmungsstücke (wie Seiten und Winkel entsprechend den Kongruenzsätzen) auftreten. Eine Flächenberechnung erfordert demnach eine gewisse Umrechnung, welche der Schüler im allgemeinen auf dieser Stufe nicht durchführen kann und deshalb durch eine Zwischenkonstruktion ersetzen muß. Aus diesem Grunde lenkt der Referent die Aufmerksamkeit auf gewisse Scharen von Figuren und Körpern, welche einer direkten Flächenberechnung zugänglich sind. Es sind dies zum Beispiel Vierecke und Achtecke mit aufeinander orthogonal stehenden Diagonalen. Demonstrationen recht anschaulicher Modelle ergänzen seine Ausführungen.

### 3. Herr Paul Glur (Bern) spricht «Ueber die Zerlegungsgleichheit in der Ebene».

Zwei ebene Polygone A und B heißen (endlich-) zerlegungsgleich, falls sie sich in endlichviele Teilpolygone zerlegen lassen, derart, daß je ein Teil von A zu je einem Teil von B kongruent ist. Nach einem bekannten Satz der Elementargeometrie sind inhaltgleiche Polygone zerlegungsgleich. Schränkt man nun den Begriff

der Zerlegungsgleichheit ein zu demjenigen der translativen Zerlegungsgleichheit, indem man fordert, daß einander entsprechende Teile translationsgleich sein sollen, so ergibt sich folgender Sachverhalt: Inhaltsgleiche Rechtecke sind stets, inhaltsgleiche aber nicht translationsgleiche Dreiecke sind nie translativ zerlegungsgleich. Gestattet man außer den Translationen noch Spiegelungen an einem festen Punkt (oder Drehungen um  $180^\circ$ ), so erhält man als Verschärfung des eingangs erwähnten Satzes: Inhaltsgleiche Polygone sind stets spiegelergänzt-translativ zerlegungsgleich.

---

167. Sitzung, Freitag, den 12. Mai 1950

Vortrag von Herrn Dr. Hans Bieri (Bern) über «Kurvendiskussion als Methode».

Der Formelapparat der Variationsrechnung ist nicht elementar und, sofern man mehrfache Integrale sowie höhere Ableitungen zuläßt, überhaupt noch nicht in vollem Umfang aufgestellt worden. Es empfiehlt sich deshalb, namentlich im Hinblick auf das absolute Extremum, elementare Methoden heranzuziehen. Eine solche Methode ist die *Kurvendiskussion*. Ihre Kraft reicht aus, gewisse Maximumprobleme bei konvexen Rotationskörpern zu bewältigen.

Es bezeichne  $U^0$  eine Maßzahl eines konvexen Rotationskörpers, welche fest vorgegeben sei,  $U$  eine Maßzahl, deren Extremum zu bestimmen ist<sup>3)</sup>. Eine sinnvolle Nebenbedingung ruft in der Regel eine Beschränkung von  $U^0$  auf ein abgeschlossenes Intervall

$$(1) \quad U_1^0 \leq U^0 \leq U_2^0$$

hervor. Studiert wird nun das Bild der Maßzahlen in einer  $(U^0, U)$ -Ebene, wobei der Rand desselben das Hauptinteresse beansprucht.

Die Methode beginnt mit dem Herausgreifen einer Schar von Körpern, von welcher man vermutet, daß ihre Maßzahlen  $U$  extremal sind, wenn ihr  $U^0$  dem Intervall (1) angehört. Dann wird die Bildkurve dieser Schar so genau wie möglich diskutiert<sup>4)</sup>.

Läßt sich nun jeder konvexe Rotationskörper von der ausgewählten Schar aus durch stetige Deformation erreichen und gelingt der Nachweis, daß alle zu den Deformationen gehörigen Bildkurven nur auf einer Seite der Ausgangskurve liegen, so ist damit das Problem des absoluten Extremums gelöst<sup>5)</sup>.

Mit Hilfe dieser elementaren Methode konnten folgende Variationsprobleme vollständig gelöst werden:

A.  $l$  konstant,  $V$  konstant

1.  $F = \text{Maximum}$

2.  $M = \text{Maximum}$

---

<sup>3)</sup> Derartige Maßzahlen sind zum Beispiel: Volumen  $V$ , Oberfläche  $F$ , Integral der mittleren Krümmung  $M$ , Länge  $l$ , Aequatorradius  $r$ .

<sup>4)</sup> Die Hauptschwierigkeit liegt in der Beurteilung der Kurvenkrümmung. Oft ist es möglich, durch geeignete Kunstgriffe den zweiten Differentialquotienten zu vermeiden.

<sup>5)</sup> In günstigen Fällen wird der Einzigkeitsbeweis mit geliefert.

B.  $l$  konstant,  $r$  konstant,  $V$  konstant

1.  $F = \text{Maximum}$

2.  $M = \text{Maximum}$

Bezüglich der beiden Probleme ( $M$  konstant,  $F = \text{Extremum}$ ) unter den zusätzlichen Nebenbedingungen A oder B sind die Untersuchungen noch nicht abgeschlossen.

Die Methode der Kurvendiskussion scheint den Maximumproblemen dieses Problemkreises angepaßt zu sein. Die entsprechenden Minimumprobleme erfordern vermutlich nichtelementare Hilfsmittel.

168. Sitzung, Freitag, den 27. Oktober 1950

Vortrag von Herrn Dr. Arnold Streit (Bern) «Ueber die Dreiteilung des Winkels».

Berührt eine Ellipse mit den Brennpunkten  $F$  und  $G$  die Schenkel eines Winkels  $AOB$ , so ist nach einem elementargeometrischen Satz  $\sphericalangle AOF = \sphericalangle GOB$ . Liegt diese berührende Ellipse derart, daß auch gilt  $\sphericalangle AOF = \sphericalangle FOG$ , so teilen offenbar die Strahlen  $OF$  und  $OG$  den Winkel  $AOB$  in drei gleiche Teile.

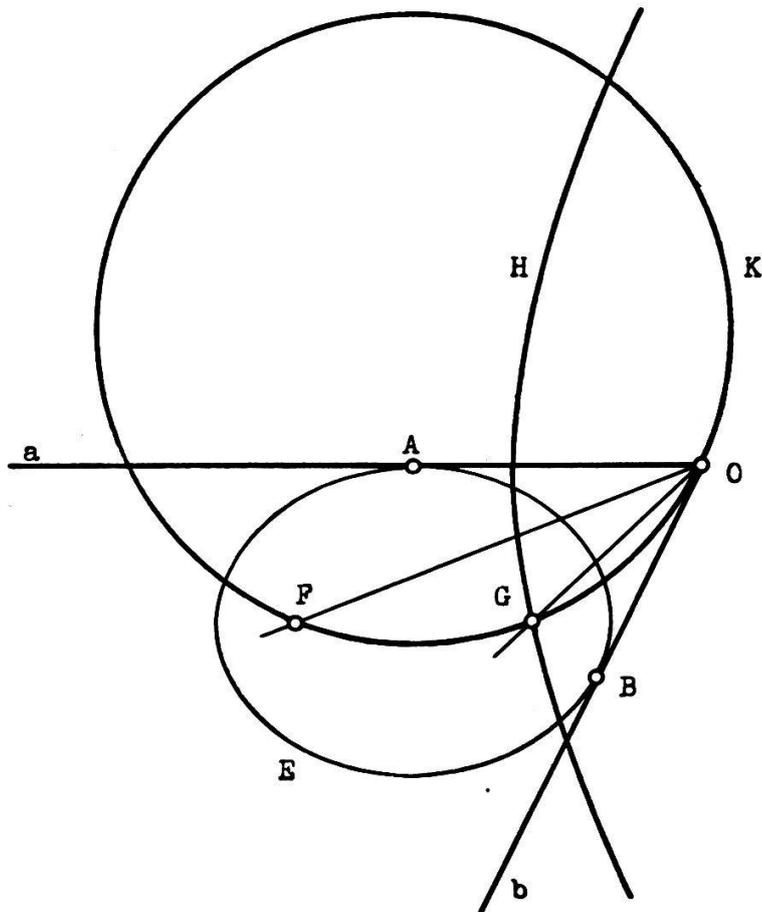


Fig. 3

Dieser Sachverhalt führt den Referenten auf folgende Lösung der Dreiteilung eines Winkels. Es seien (vgl. Fig. 3) O der Scheitel und a und b die Schenkel des gegebenen Winkels. Dazu läßt sich eine Ellipse E mit den Brennpunkten F und G bestimmen durch die Forderungen:

1. E berühre a in einem willkürlich gewählten Punkt A mit einem Nebenscheitel;
2. es sei  $\sphericalangle AOF = \sphericalangle FOG$ ;
3. E berühre b.

OF und OG teilen dann den gegebenen Winkel in drei gleiche Teile.

Zur Ermittlung ihrer Brennpunkte (die Ellipse selber wird nicht benötigt) ergibt sich folgender Weg: Der geometrische Ort des Brennpunktes G aller Ellipsen, welche 1. und 2. genügen, ist die Hyperbel H mit einem Brennpunkt in O, der eine ihrer Scheitel S teilt OA im Verhältnis 2 : 1 und ihr Mittelpunkt liegt symmetrisch zu S bezüglich A. Der geometrische Ort des Brennpunktes G aller Ellipsen, welche 1. und 3. genügen, ist der Kreis K, welcher b in O berührt und dessen Mittelpunkt auf der Normalen zu a durch A liegt.

Somit ergibt sich G als Schnittpunkt einer festen (das heißt von der Winkelöffnung unabhängigen) Hyperbel H und eines Kreises K. Dessen Konstruktion ist im allgemeinen mit Zirkel und Lineal nicht durchführbar; man erhält jedoch im Hinblick darauf, daß die Hyperbel nur in der Nachbarschaft eines Scheitels beansprucht wird (von den weiteren Schnittpunkten mit dem Kreis liegt einer trivial, die andern beiden liefern Nebenlösungen), brauchbare Näherungen, indem man sie durch geeignete Kreisbogen ersetzt.

Zum Schluß weist der Referent auf ein direktes, von den obigen Ausführungen unabhängiges Näherungsverfahren hin, das eine größere Genauigkeit erzielt.

---

### *169. Sitzung, Freitag, den 8. Dezember 1950*

Herr Prof. Dr. Hugo Hadwiger (Bern) spricht über das Thema: «Ueber die mathematische Wahrscheinlichkeit.»

Die Grundlagen der heute bestehenden mit axiomatischer Strenge aufgebauten Wahrscheinlichkeitstheorien enthalten keine Richtlinien, um eine eigentliche Berechnung eines Wahrscheinlichkeitswertes in einem konkreten Fall vorzunehmen. Ihre Axiomatik sichert die Existenz dieser Werte und liefert die Grundgesetze für ihre gegenseitige Verknüpfung. Auf diese Grundlage baut sich die Wahrscheinlichkeitsrechnung auf, die insofern eine formale Disziplin ist, als sie nur zu lehren hat, wie sich Wahrscheinlichkeitswerte aus andern als bekannt vorausgesetzten ermitteln lassen.

Innerhalb der klassischen Wahrscheinlichkeitsrechnung gibt es aber wie bekannt zahllose Fragestellungen, die ihre eindeutige Beantwortung durch die direkte Berechnung der entsprechenden Wahrscheinlichkeitswerte finden. Eine Behandlung dieser klassischen Aufgaben ist auch innerhalb der neuzeitlichen Theorien möglich. Die Berechnung stützt sich hierbei aber nicht mehr auf die Axiome, sondern wird durch willkürlich aber sinnvoll hinzukommende Annahmen über bestehende Gleichmöglichkeiten in die Wege geleitet. Solche Annahmen sind durchaus zulässig und bedeuten eine auf diese implizite Weise gegebene weiter gehende Idealisierung des

behandelten Modells. So stellt etwa die Forderung, daß die sechs Wahrscheinlichkeitswerte für die sechs in Betracht fallenden Wurfresultate bei einem Würfel gleich sein sollen, eine implizite Definition des vollkommenen Wurfes dar.

In allen diesen Fällen handelt es sich um Wahrscheinlichkeitsrechnung a priori.

Der Referent unternimmt nun den Versuch, durch zwei weitere zusätzlich hinzutretende Axiome eine Grundlage für die Wahrscheinlichkeitstheorie a priori zu schaffen. Es soll sich darum handeln, für die Festsetzungen betreffend die Gleichmöglichkeiten, die bisher von Fall zu Fall mit stets neuer Willkür vorgenommen werden mußten, ein simultan und allgemein durchgreifendes Prinzip bereitzustellen, das eine eindeutige Berechnung der Wahrscheinlichkeitswerte erlaubt. Es handelt sich um die Forderung der Invarianz gegenüber einer Gruppe und weiter um die Forderung der Einzigkeit der hier in Betracht fallenden Invarianten. Dieses Prinzip ist nicht neu und innerhalb der Lehre von den geometrischen Wahrscheinlichkeiten wurde es wie bekannt mit großem Erfolg angewendet.

Neu ist vielleicht der Versuch, diese Invarianzforderung in die Grundlage der allgemeinen Wahrscheinlichkeitstheorie einzubauen, und die Form zu suchen, welche dies unter Berufung auf eine abstrakte Gruppe ermöglicht.

