Intensitätsfunktion und Zivilstand : Beiträge zu einer Theorie der unabhängigen und zusammengesetzten Ordnungen

Autor(en): **Friedli, W.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **21 (1926)**

PDF erstellt am: **23.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-967427

Intensitätsfunktion und Zivilstand

(Beiträge zu einer Theorie der unabhängigen und zusammengesetzten Ordnungen).

Von Dr. **W. Friedli,** Bern.

A. Theoretischer Teil.

1.

Die Intensitätsfunktion ist ein grundlegender Begriff in der mathematischen Theorie der Versicherung. Er ist notwendig, um das mehr oder weniger starke Ab- oder Zunehmen der betrachteten Personengesamtheiten mit der Zeit zu charakterisieren, also als *Masszahl* zu dienen. Und weil die zeitlichen Veränderungen der Gesamtheiten, es handelt sich meistens um Abnahmen mit der Zeit, das Grundmoment der Versicherung bilden, muss diese Masszahl auch in den Formeln für die Barwerte, Prämien und Reserven offen oder versteckt auftreten, als *Rechnungsgrösse.*

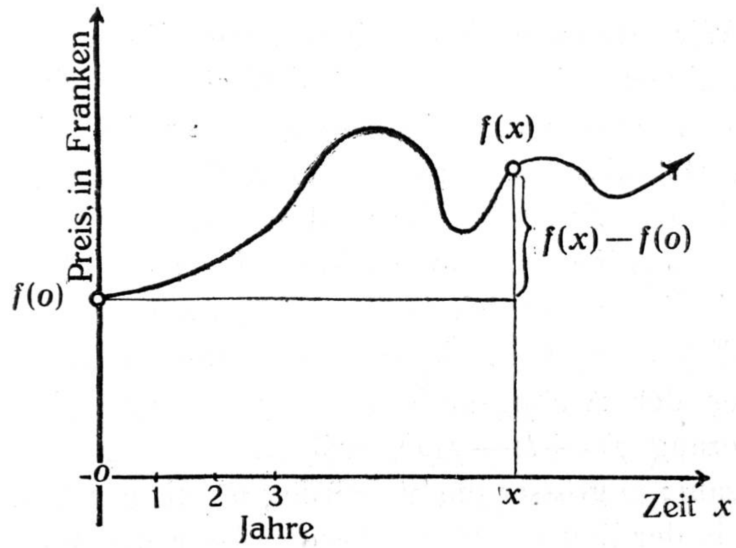
Die Anwendungen der Intensitätsfunktion als Masszahl und Rechnungsgrösse sind denn auch sehr häufig: In der Messung der Sterblichkeit und verwandter Erscheinungen, in der Berechnung von Versicherungswerten nach der kontinuierlichen Methode, bei Anwendung gewisser Näherungsformeln (Woolhouse u. a.), in der Leibrentenversicherung (Ersetzung ungleicher Alter durch gleiche), in der mathematischen Theorie von stetig sich erneuernden Gesamtheiten nach Moser (die Intensität tritt in der Kernfunktion der Integralgleichung auf). Namentlich muss schon hier erwähnt werden, dass erst durch die Anwendung der Intensitätsfunktion eine Abklärung auf dem Gebiete der unabhängigen Wahrscheinlichkeiten erfolgt ist.

Bezeichnet $f(x)$ die von uns betrachtete veränderliche Grösse, welche wir uns als Funktion der Zeit oder einer andern unabhängigen Variablen x gegeben denken und die wir kurz als ursprüngliche Funktion bezeichnen können, so bedeutet die Intensitätsfunktion der Abnahme der ursprünglichen Funktion den Quotienten

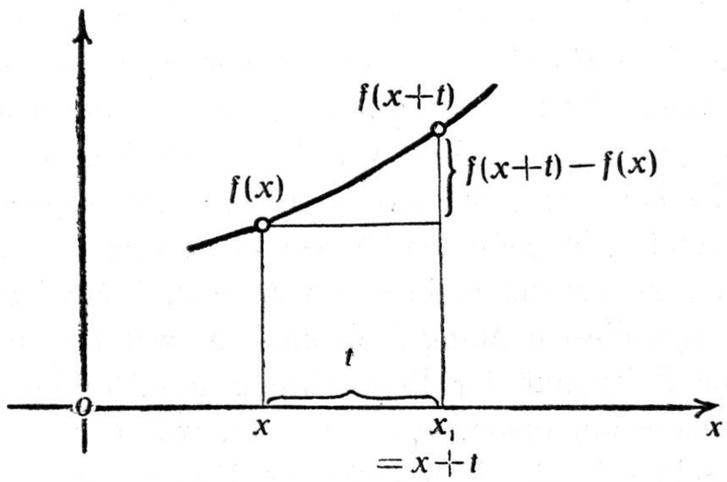
$$\mu[f(x)] = -\frac{f'(x)}{f(x)} \tag{1}$$

d. h. das Verhältnis zwischen dem negativen Differentialquotienten und der ursprünglichen Funktion selbst.

Wir wollen an einem praktischen Beispiel zeigen, wie man auf den Begriff der Intensität gelangen kann. Es bedeute x die Zeit, gemessen vom 1. Januar 1914 als Zeitnullpunkt an, und $f(x)$ den *Preis* einer bestimmten Ware, z. B. irgendeines Lebensmittels, in Franken. Wir nehmen an, dieser Preis erleide stetige Veränderungen mit der Zeit (eine Annahme, die praktisch nicht zutrifft) und $f(x)$, die Funktion, welche den Preis zum Ausdruck bringt, sei differenzierbar. Dann würde das Bild der Funktion etwa wie folgt aussehen:



Wir greifen nun zwei Zeitpunkte x und $x_1 = x + t$ heraus und können folgende Zahlen bilden, welche ein Mass für die Preisänderung bilden:



1. $f(x+t) - f(x)$ Preiszunahme in der Zeit t, in Franken.

2. $\dfrac{f(x+t) - f(x)}{f(x)}$ relative Preiszunahme in der Zeit t, Verhältniszahl.

3. $\dfrac{f(x+t) - f(x)}{f(x)} \cdot \dfrac{1}{t}$ durchschnittliche relative Preiszunahme in der Zeit t; Verhältniszahl, bezogen auf die Zeit 1 Jahr.

Wir erkennen ohne weiteres, dass die 3. Masszahl die geeignetste ist. Sie erlaubt *Vergleiche* zwischen den Preisbewegungen verschiedener Jahre, weil sie sich auf das Verhältnis des Preises zum Anfangspreis bezieht und ihr der Zeitraum eines Jahres zugrundegelegt ist. Sie ist überdies ein empfindliches Mass: Je kürzer die Zeit t ist, innert der sich die Preissteigerung $f(x+t)-f(x)$ aus $f(x)$ entwickelt, desto grösser die Masszahl; je kleiner der Anfangspreis ist, der in der Zeit t die Steigerung $f(x+t)-f(x)$ erfährt, desto grösser die Masszahl; je grösser die Steigerung ist, die der Anfangspreis in der Zeit t erfährt, desto grösser die Masszahl.

Wir hätten also einen geeigneten Preisindex gefunden. Er ist aber noch zu sehr *Durchschnittszahl*, da er aus einer beliebig langen Zeitspanne t durch proportionale Umrechnung auf ein Jahr gewonnen wurde. Die Preisänderungen können manchmal sehr rasch und sehr intensiv erfolgen, so dass der Durchschnitt aus einer Periode von t Zeiteinheiten (Jahren) die Erscheinung nur unvollkommen, verschwommen, wiedergibt. Die gefundene Masszahl erlaubt nicht, die *Tendenz* zu erkennen, in welcher die Preisentwicklung geht. Um diesem Mangel abzuhelfen, wählt man den zweiten Zeitpunkt der Beobachtung des Preises möglichst nahe am ersten $x_1 = x + \Delta x$, wo Δx möglichst klein sein soll. Es bedeutet dann immer noch

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{f(x)\cdot\Delta x}$$

unsere Masszahl. Dieser Ausdruck behält einen angebbaren Wert, wenn wir Δx der Grenze 0 zustreben lassen; wir bezeichnen den Grenzwert als die Intensität der Preiszunahme

$$\mu[f(x)] = \underset{\Delta x = 0}{\text{Limes}} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{f(x)\,\Delta x}$$

$$= \frac{1}{f(x)} \frac{d\,f(x)}{dx}$$

$$= \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Wir erkennen, dass auch die Intensitätsfunktion eine Relativzahl angibt; es ist die Zunahme, bezogen auf den Anfangsbetrag, also hier den Grössenbetrag selbst, da $f(x+\Delta x)$ beim Grenzübergang mit $f(x)$ zusammenfällt, und bezogen auf die Zeiteinheit.

Satz. Die Intensitätsfunktion gibt die Zunahme oder Abnahme der ursprünglichen Funktion im *Zeitpunkt* x (nicht mehr in einem endlichen Zeitintervall Δx) an, bezogen auf den Grössenbetrag 1 und die Zeit 1.

Die durch diesen Satz ausgedrückte anschauliche Definition des Begriffes Intensität rührt von Herrn Prof. *Moser* her[1]). Im Versicherungswesen hat man es meist mit abnehmenden ursprünglichen Funktionen zu tun, weshalb man allgemein von Intensität der Abnahme spricht und sie durch die Formel (1) definiert.

An die mathematische Definition der Formel (1) können wir noch folgende weitere anschliessen, welche mit ihr äquivalent ist:

$$\mu[f(x)] = -\frac{d}{dx} \operatorname{Log} f(x) \tag{2}$$

d. h. die negative Intensitätsfunktion ist nichts anderes als die in der Mathematik als logarithmische Ableitung bezeichnete abgeleitete Funktion. Aus dieser Feststellung können wir sofort folgende wichtige Eigenschaften der Intensitätsfunktion ableiten:

---

[1]) Mitt., Heft 1, pag. 30.

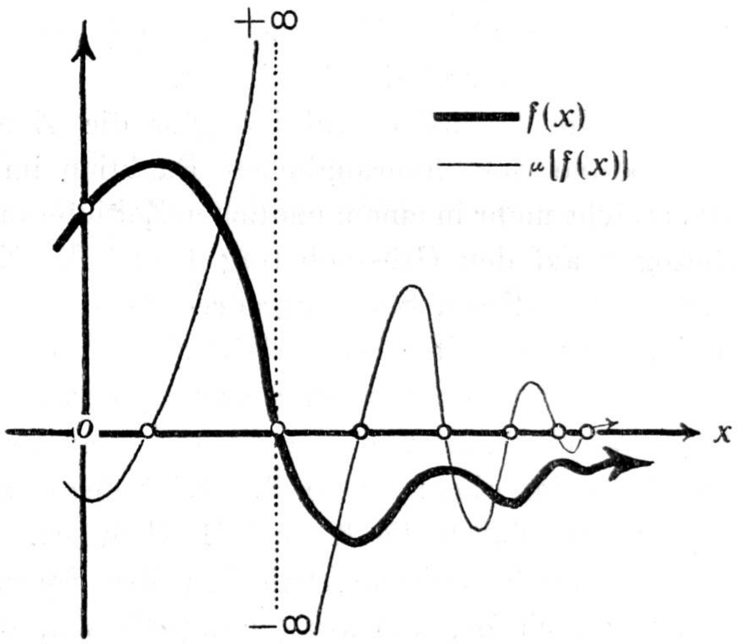
$$\text{I.} \qquad \mu[Cf(x)] = \mu[f(x)]$$

$$\text{II.} \qquad \mu[f_1(x)\, f_2(x)] = \mu[f_1(x)] + \mu[f_2(x)]$$

$$\text{III.} \qquad \mu\left[\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right] = \mu[f_1(x)] - \mu[f_2(x)]$$

$$\text{IV.} \qquad \mu[(f(x))^n] = n \cdot \mu[f(x)]$$

Bezüglich des Schwankungsbereiches erkennt man, dass die Intensitätsfunktion alle reellen Werte zwischen $-\infty$ und $+\infty$ annehmen kann



Wir halten die Eigenschaften fest:

Die Intensitätsfunktion besitzt wie die Logarithmenfunktion die weiten Grenzen $-\infty$ *und* $+\infty$ *und hat wie diese die Besonderheit, die rechnerischen Operationen um einen Grad zu reduzieren.*

Handelt es sich um eine Absterbeordnung, so pflegt man die ursprüngliche Funktion nicht in Klammern zu setzen, sondern nur das Alter x beizufügen, also

$$\mu[l_{(x)}] = \mu_x.$$

Zu den gefundenen Sätzen geben wir folgende Beispiele:

$$\mu(D_x) = \mu(l_x v^x)$$
$$= \mu_x + \delta$$
$$\mu(p_x) = \mu\left[\frac{l_{x+1}}{l_x}\right]$$
$$= \mu_{x+1} - \mu_x$$
$$\mu(v^{nx}) = n\delta$$

Der Begriff Intensität wird öfters unter anderer Bezeichnung angewendet. Beispielsweise ist die sogenannte „Wachstumsrate“ der Bevölkerung nichts anderes als die Intensität der Zunahme einer Bevölkerung. Nach *Czuber* (math. Bevölkerungstheorie) und *Knibbs* (The Mathematical Theory of Population) lautet die Bevölkerungsgleichung

$$B_{t+dt} = B_t[1 + \Phi(t)\,dt]$$

woraus wir ersehen, dass

$$\Phi(t) = \frac{B_{t+dt} - B(t)}{B(t) \cdot dt}$$
$$= \frac{B'(t)}{B(t)}$$

und dies ist, wie gesagt, die Intensität der Zunahme der Funktion $B(t)$, welche die Volkszahl darstellt.

Auch ist zu erwähnen, dass öfters die Intensität mit dem Wahrscheinlichkeitsbegriff verquickt wird. *Karup* gibt die Definition: „Unter der Sterblichkeitsintensität versteht man die Wahrscheinlichkeit des Sterbens für eine unendlich kleine Zeitlänge, dividiert durch diese letztere selbst.“ Man erkennt, dass diese Definition viel weniger anschaulich, allgemein und klar ist als die von *Moser* gegebene; sie verwendet den Begriff Wahrscheinlichkeit, führt also den zu umschreibenden Begriff auf einen andern, erst zu erklärenden Begriff zurück. Sie ist aus diesem Grunde ungeeignet.

2.

In allen Gebieten der exakten Naturwissenschaften bedeutete der Übergang vom Endlichen zum Unendlichen (Unendlichkleinen) einen bahnbrechenden Schritt zur möglichst genauen Erforschung der Naturvorgänge. Erst von jener Epoche an ergaben sich die tiefen Einblicke „ins innere Walten der Natur", welche die enormen Fortschritte der Technik ermöglichten.

Auch für die Versicherungsmathematik erwies sich die Anwendung der Methoden der Infinitesimalrechnung als äusserst fruchtbar. Das Verdienst, die unendlich kleinen Veränderungen der sogenannten „Ordnungen" und der aus ihnen abgeleiteten Rechnungselemente zuerst studiert und den Begriff der *Intensität* eingeführt zu haben, kommt *Gompertz* (1779—1865) zu. Es war am *16. Juni 1825,* als er seine wichtige Arbeit „über die Natur des Sterbegesetzes und eine neue Methode der Leibrentenberechnung" in der Royal Society von London vortrug, in der nämlichen Sitzung, in welcher *Faraday* seine berühmte Arbeit über den Benzolkern vorlas. Beide Arbeiten sind im nämlichen Bande der Philosophical Transactions of the Royal Society of London abgedruckt [1]).

---

[1]) Phil. Transact. of the Royal Society of London for the year MDCCCXXV:

Pag. 440: „XX. On new compounds of carbon an hydrogen, and on certain other products obtained during the decomposition of oil by heat." By M. *Faraday,* F. R. S.

Pag. 513: „XXIV. On the nature of the function expressive of the law of human mortality, and on a new mode of determining the value of Life Contingencies." In a letter to Francis Baily, Esq. F. R. S. By Benjamin *Gompertz,* F. R. S.

Es sei uns gestattet, bei dieser Gelegenheit zu erwähnen, dass die Royal Society in London am 16. Juni 1925 die 100jährige Wiederkehr der denkwürdigen Sitzung von 1825 in einer feierlichen Jubiläumssitzung festlich beging, um das Andenken von *Faraday* und seiner wichtigen Entdeckung zu ehren. Die Versammlung wurde präsidiert vom Herzog von Northumberland. Es nahmen eine grosse Zahl ausländischer Delegationen daran teil, auch die Schweiz war vertreten. Von den Professoren Armstrong und Cohen wurden wissenschaftliche Ansprachen gehalten. Ferner widmete Lord Balfour dem berühmten Faraday eine Erinnerungsrede [1]).

Die Chemiker haben das Andenken Faradays würdig geehrt. Ist auch die Arbeit von *Gompertz* von weniger grosser Tragweite als jene Faradays, so scheint es doch auch für die Versicherungsmathematiker gegeben, sich heute zu erinnern, dass dieser Mann vor 100 Jahren den Begriff Intensität geprägt und in die Literatur eingeführt hat [2]). In seiner erwähnten Arbeit ist das nach ihm benannte Gesetz

$$l_x = k g^{c^x}$$

abgeleitet, und zwar mit Hilfe der Intensitätsfunktion, die auf pag. 517 seiner Arbeit erstmals erwähnt wird: „and the *intensity of mortality* might then be said to be constant".

---

[1]) Nähere Angaben finden sich z. B. in der Zeitschrift Nature, Vol. CXV, January to June 1925, London, pag. 1001—1016. Daselbst finden sich auch die Referate und ein Aufsatz von Sir William J. Pope „Faraday als Chemiker", pag. 1002.

[2]) Dieser Tatsache wird *H. Braun* in seiner Geschichte der Lebensversicherung (1925) nicht gerecht. Er schreibt das Verdienst, die Intensitätsfunktion eingeführt zu haben, *Edmonds* (1832) zu (op. cit. pag. 254).

Der von Gompertz geschaffene neue Begriff wurde nur sehr langsam Gemeingut der Versicherungsmathematiker.

In Deutschland war es eigentlich erst *Karup*, der vor rund 50 Jahren den Begriff Intensität zu einem Grundbegriff der mathematischen Versicherungslehre erhob, indem er ihn zum Ausgangspunkt seiner wichtigen Untersuchungen über die unabhängigen Wahrscheinlichkeiten machte.

In der Schweiz berechneten *Schaertlin* (1888) und *Bohren* (1903) Werte der Intensität der Sterblichkeit für die schweizerische Bevölkerung und brachten damit den Begriff der schweizerischen Fachwelt näher. Es bleibt jedoch das unbestrittene Verdienst des Herrn Prof. *Moser*, das volle Verständnis für Wesen und Bedeutung der Intensitätsfunktion geweckt zu haben durch seine bereits erwähnte Publikation, die gleichzeitig die Reihe der „Mitteilungen schweizerischer Versicherungsmathematiker" eröffnete.

Herrn Prof. *Moser* verdanken wir auch die obenstehenden historischen Hinweise zur Geschichte des Intensitätsbegriffes, wofür ihm an dieser Stelle bestens gedankt sei.

3.

Wir untersuchen nun vorerst die Beziehungen, welche in einer Absterbeordnung die Wertereihen l_x, q_x und μ_x verbinden. Es bestehen die Relationen

$$l_x = C \cdot \prod_0^{x-1}(1-q_x), \quad \text{wo } C = l_0 \tag{3}$$

$$1-q_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} \tag{4}$$

$$\mu_x = -\frac{l'_x}{l_x} \tag{5}$$

Ist eine der drei Wertereihen vollständig gegeben, so sind die beiden andern eindeutig bestimmt, nämlich

Fall I: Gegeben l_x, gesucht q_x und μ_x.
Die Lösung dieser Aufgabe ist durch (4) und (5) gegeben.

Fall II: Gegeben ist q_x, gesucht l_x und μ_x.
Aus (3) ergibt sich l_x und daraus nach (5) μ_x.

Fall III: Gegeben ist μ_x, gesucht l_x und q_x.
Es gilt wegen Gleichung (2)

$$\Big|\operatorname{Log} f(x)\Big|_{x_1}^{x_2} = -\int_{x_1}^{x_2} \mu_x \cdot dx$$

also
$$\frac{f(x_2)}{f(x_1)} = e^{-\int_{x_1}^{x_2} \mu_x \, dx} \tag{6}$$

und speziell $l(x) = C \cdot e^{-\int_a^x \mu_x \, dx}$ wo $C = l(a)$ (6a)

Geht man vom Ausgangsalter $a = 0$ aus, so kommt speziell

$$\underline{l(x) = C e^{-\int_o^x \mu_x \, dx}} \qquad \text{wo } C = l(o) \tag{6b}$$

Die Auflösung der Differentialgleichung (5) nach der unbekannten ursprünglichen Funktion $l(x)$ liefert also das allgemeine Integral (6a), in welchem als willkürliche Integrationskonstante $C = l(a)$ auftritt. Ferner ist aus (6) auch sofort bekannt

$$1 - q_{(x)} = e^{-\int_x^{x+1} \mu_x \, dx} \tag{6c}$$

In der Praxis wird meistens die Reihe der q_x die gegebene sein. Es sei erinnert, wie q_x aus den Beobachtungszahlen resultiert. A, B, C . . . seien aus der Beobachtung entnommene Zahlen, auf das Alter x bezogen, und zwar

B die Anzahl Personen unter Risiko zu Beginn des Jahres,

E die Anzahl im Laufe des Jahres neu eintretender Personen,

A die Anzahl im Laufe des Jahres nicht infolge Todes vorzeitig austretender Personen,

T die Anzahl im Laufe des Jahres infolge Todes austretender Personen.

Die am meisten benützte Näherungsformel lautet

$$q_x = \frac{T}{B + \frac{E - A}{2}} \tag{7}$$

Der Nenner stellt die „Zahl der Personen unter einjährigem Sterberisiko“ dar. Die ein- und austretenden Personen unterliegen dem Sterberisiko nicht ein volles, sondern durchschnittlich ein halbes Jahr.

Damit haben wir alles Wesentliche erörtert, was bei einer Personengesamtheit, die aus *einer Ursache* abnimmt, von Bedeutung sein kann. Wir wollen eine solche Gesamtheit eine unabhängige Ordnung nennen, also definieren:

„*Eine Gesamtheit gleichaltriger Personen, welche mit der Zeit nur aus einer Ursache abnimmt, heisst unabhängige Ordnung.*“

Es ist dies ein neuer Begriff, ein Abstraktum, also etwas Theoretisches. Dies ist mit jeder gewöhnlichen Absterbeordnung der Fall, weshalb einzelne Autoren von „fiktiven Gesamtheiten“ oder „fingierten Personengruppen“ sprechen. Uns ist die Feststellung wesentlich, dass das Wort Absterbeordnung nichts Konkretes, aus der Beobachtung direkt Feststellbares, umschreibt, sondern einen theoretischen Begriff. Um diesen Begriff auf die Erfahrung zu stützen, bedient man sich der Näherungsformel (7), welche der Tatsache gerecht wird, dass praktisch nicht nur die Sterbefälle, sondern auch die vorzeitigen Austritte eine „gleichaltrige“ Gesamtheit lichten.

4.

Wir stellen uns nun die Aufgabe, eine besondere *Sterbetafel für aktive Personen* zu konstruieren. Sie gilt dann nicht mehr für die gesamte Bevölkerung, Aktive und Invalide, sondern nur noch für die Gesamtheit der aktiven Personen. Die Beobachtung liefert folgende Zahlen: Es werden T^a Sterbefälle von Aktiven (x) beobachtet. Sie gehen hervor aus dem Bestand der x-jährigen Aktiven zu Beginn des Jahres B^a und den Neueintretenden E^a, nicht aber aus den vor Jahresende Ausgetretenen. Letztere geben zu keinen Sterbefällen von Aktiven mehr Anlass und scheiden daher aus der Betrachtung aus; solcher Fälle gibt es aber insgesamt A, nämlich

$$A = A^a + J,$$

also eigentliche vorzeitige Austritte von Aktiven A^a und Invalidierungsfälle J. Diese Austretenden unterliegen dem Sterberisiko der Aktiven nur durchschnittlich ein halbes Jahr, so dass die Zahl der ganzjährigen Beobachtungsfälle, also der Personen unter Risiko, beträgt:

$$B^a + \frac{E^a - A}{2} = B^a + \frac{E^a - (A^a + J)}{2}$$

Infolgedessen ist die einjährige Aktiven-Sterbenswahrscheinlichkeit der Aktiven q_x^a oder deutlicher q_x^{aa}, zu berechnen aus

$$(8) \qquad q_x^{aa} = \frac{T^a}{B^a + \frac{E^a - A^a - J}{2}}$$

Es wird nun die nur für Aktive gültige Sterbetafel sich ergeben aus

$$(9) \qquad \underline{l_x^1 = C \cdot \prod_{x=a}^{x-1} (1 - q_x^{aa})}$$

Es ist dies eine *unabhängige Ordnung* im Sinne unserer Definition im 3. Abschnitt. Den Akzent 1 haben wir angebracht, um anzudeuten, dass diese Sterbetafel nicht für eine allgemeine Personengesamtheit wie (3), sondern nur für eine besondere Gesamtheit (Aktive), die aber wohl definiert ist, zutrifft. Auch diese Absterbeordnung ist etwas Theoretisches, ein abstrakter Begriff, wie jede Absterbeordnung. Niemand wird die durch (8) angedeutete empirische Berechnungsweise der Sterbenswahrscheinlichkeit anfechten, entspricht sie doch der allgemein bei der Ableitung von Sterbetafeln gültigen Methode, wie sie durch (7) zum Ausdruck gebracht ist.

Solcher unabhängigen Ordnungen können wir noch viele andere bilden. Wir haben lediglich die einzige wirkende Ursache genau zu umschreiben und die Gesamtheit von einem fest gegebenen Anfangsbestand C an mit Hilfe der Beziehung (3) bzw. der mit ihr äquivalenten Relation (9) zu berechnen. Wichtig ist die Feststellung, dass für jede solche unabhängige Ordnung $f(x)$ die Formeln (3), (4) und (5) sowie infolgedessen auch (6a), (6b) und (6c) gelten, also

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= C\prod_{x=a}^{x-1}(1-q(x)) = C e^{-\int_a^x \mu_x dx} \\ 1-q(x) &= \frac{f(x+1)}{f(x)} = e^{-\int_x^{x+1} \mu_x dx} \\ \mu_x &= -\frac{f'(x)}{f(x)} \end{aligned}\right\} \quad \mathrm{I.}$$

durch welches fundamentale Gleichungssystem jede beliebige unabhängige Ordnung ausgezeichnet ist.

Um den Begriff der unabhängigen Ordnung noch recht deutlich zu machen, erwähnen wir einige weitere Beispiele.

1. *Die Invalidierungsordnung der Aktiven.* Darunter verstehen wir diejenige unabhängige Ordnung, welche sich ergibt, wenn auf eine Gesamtheit von anfänglich $f(a) = C$ gleichaltrigen aktiven Personen als einzige Abgangsursache die Invalidität einwirkt. Wir erkennen, dass auch dies ein durchaus abstrakter Begriff ist. Die Brücke zur Beobachtung wird jedoch auch hier sofort geschlagen durch eine zu (8) symmetrische Formel; nämlich

$$\text{(8a)} \qquad i(x) = \frac{J}{B^a + \frac{E^a - (A^a + T^a)}{2}}$$

wo $i(x)$ die einjährige Abgangswahrscheinlichkeit in der betrachteten unabhängigen Ordnung darstellt. In der Tat! Die Ausscheidungen aus der Beobachtung betreffen A Personen, nämlich A^a vorzeitige Austritte und T^a Sterbefälle von Aktiven, also

$$A = A^a + T^a$$

so dass die Zahl der Personen unter einjährigem Risiko für die betrachtete Abgangsursache durch den Nenner von (8a) wiedergegeben ist.

Die Invalidierungsordnung berechnet sich dann aus

$$l^2_{(x)} = C \prod_{x=a}^{x-1} (1 - i_x) \tag{9a}$$

wobei $C = l(a)$. Den Index 2 haben wir angebracht, um diese Ordnung von den bereits betrachteten unabhängigen Ordnungen $l(x)$ und $\overset{1}{l}(x)$ zu unterscheiden. Was die Bezeichnung anbetrifft, so machen wir darauf aufmerksam, dass in der Absterbeordnung nicht die Zahl der schon Gestorbenen, sondern diejenige der noch nicht Gestorbenen zum Ausdruck kommt, in der Invalidierungsordnung die Zahl der noch nicht Invalidierten.

2. Die Verheiratungsordnung der Ledigen. Wir setzen eine Gesamtheit von gleichaltrigen ledigen Männern (x) voraus, die nur durch Heiratsfälle abnimmt. Es ist dies wiederum eine unabhängige Ordnung, für welche die Relationen gelten

$$f(x) = C \cdot \prod_{x=a}^{x-1} (1 - h_x) = e^{-\int_a^x \varrho_x dx}$$

$$1 - h(x) = \frac{f(x+1)}{f(x)} = e^{-\int_x^{x+1} \varrho_x dx}$$

$$\varrho_x = -\frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$h(x) = \frac{H^l}{B^l + \frac{E - A}{2}} \qquad \text{wo } A = A^l + T^l.$$

Es bedeuten dabei $h(x)$ die einjährige Ausscheidewahrscheinlichkeit in der betrachteten unabhängigen Ordnung (einjährige Heiratswahrscheinlichkeit für ledige Männer), ϱ_x die Ausscheideintensität (Heiratsintensität der ledigen Männer); ferner H^l die Zahl der bei anfänglich B^l vorhandenen, E neu hinzugetretenen, A^l vorzeitig und freiwillig aus der Beobachtung ausgeschiedenen und T^l vor Jahresschluss verstorbenen ledigen Männern eingetretenen Heiratsfälle. Die Beobachtungen denken wir uns, wie in den andern Beispielen, an den Versicherten einer Versicherungseinrichtung oder den Bewohnern eines Landes durchgeführt, so dass alle die genannten Beobachtungszahlen eine konkrete Bedeutung erhalten.

3. Die Sterbetafel der aktiven Ledigen. Diese unabhängige Ordnung entsteht, wenn eine Gesamtheit von gleichaltrigen aktiven ledigen Männern (oder Frauen) nur durch die Wirkung der Sterblichkeit gelichtet wird. Wir brauchen kaum wieder zu betonen, dass auch dies ein Begriff, ein Abstraktum, ist. Es gelten die analogen Relationen wie in der Sterbetafel der Aktiven, mit dem einzigen Unterschied, dass wir zu den Austritten sowohl Invalidierungen von Ledigen als Heiratsfälle von Ledigen zu rechnen haben, also

$$A = A^l + H^l + J^l$$

womit
$$q_x^{\overline{aall}} = \frac{T^l}{B^l + \dfrac{E - (A^l + H^l + J^l)}{2}}$$

Es wird
$$f(x) = C \prod_{x=a}^{x-1} (1 - q^{\overline{aall}}) \quad \text{usw.}$$

4. Die Stornierungstafel der Versicherten. Wir verstehen darunter jene unabhängige Ordnung, die sich ergibt, wenn man sich eine Gesamtheit gleichaltriger Versicherter einer Versicherungsgesellschaft durch die einzige Ursache des vorzeitigen Abganges (Storno) beeinflusst denkt. Die Stornierungstafel hängt also mit der Stornierungswahrscheinlichkeit s_x wie folgt zusammen:

$$f(x) = C \prod_{x=a}^{x-1} (1 - s_x),$$

wobei die Brücke zur Beobachtung an den Versicherten geschlagen wird durch die Relation

$$s_x = \frac{A}{B + \frac{E-T}{2}}$$

und wo weiterhin beispielsweise

$$1 - s_x = e^{-\int_x^{x+1} a_x \, dx}$$

wo a_x die Ausscheideintensität in der betrachteten unabhängigen Ordnung, also kurz die Stornointensität, bedeutet.

Als letztes Beispiel betrachten wir 5. *Die Sterbetafel der nicht an Lungentuberkulose sterbenden Bevölkerung.* Die Lungentuberkulose verursacht bei B Personen (x) im Beobachtungszeitraum T^l Todesfälle, alle andern Todesursachen verursachen

$$T^{nl} = T - T^l$$

Sterbefälle. Für die genannte unabhängige Ordnung $l'(x)$, deren Abgangsintensität Ψ_x betragen möge, gelten neben den übrigen die Formeln

$$l'(x) = C \prod_{x=a}^{x-1} (1 - q_x^{nl}) = C e^{-\int_a^x \Psi_x dx}$$

$$q_x^{nl} = 1 - \frac{l'(x+1)}{l'(x)}$$

$$= 1 - e^{-\int_x^{x+1} \Psi_x dx}$$

$$= \frac{T^{nl}}{B + \frac{E - A - T^l}{2}}$$

wobei die Beobachtungszahlen B, E, A, T und T^l durch die Volkszählung und die Todesursachenstatistik der Volkszählungsperiode zu beschaffen sind. Mit dieser Andeutung gehen wir zu einem neuen Abschnitt über.

Eine Feststellung sei hier noch ausdrücklich angebracht. Wir haben zur Veranschaulichung des Begriffes unabhängige Ordnung die Formel (7) in den Vordergrund gerückt und mit ihrer Hilfe nachzuweisen versucht, dass die unabhängigen Ordnungen näherungsweise leicht berechnet werden können. Es sei jedoch ausdrücklich betont, dass unsere Darlegungen unverändert Gültigkeit behalten, wenn wir eine andere Näherungsformel für den Zusammenhang zwischen der einjährigen Abgangswahrscheinlichkeit und den Beobachtungszahlen oder den theoretisch genauen, formellen Ansatz, welcher *Intensität* und Beobachtungszahlen verbindet, wählen. *Wichtig ist für unsere Darlegung nur, dass stets die Wirkung der betrachteten einzigen Abgangsursache isoliert werden kann, und zwar ist das Prinzip durchwegs das nämliche.*

5.

Wir setzen nun eine gleichaltrige Personengesamtheit voraus, bei welcher zwei Abgangsursachen einwirken. Welches ist die entstehende Funktion, welche die Anzahl Personen der Gesamtheit für jedes Alter x wiedergibt? Wir wollen eine solche Gesamtheit eine zusammengesetzte Ordnung nennen.

Definition. Eine Gesamtheit von gleichaltrigen Personen[1]*, welche aus zwei Abgangsursachen mit der Zeit abnimmt, heisst zusammengesetzte Ordnung.*

Die Abgangsintensität der betrachteten Gesamtheit μ_x besteht nach Voraussetzung aus zwei Komponenten $\overset{1}{\mu}_x$ und $\overset{2}{\mu}_x$, wo die Akzente die beiden verschiedenen Ursachen andeuten.

$$\mu_x = \overset{1}{\mu}_x + \overset{2}{\mu}_x \tag{9}$$

Dies ist die Intensität der gesuchten Funktion.

Nun ist ganz allgemein jede ursprüngliche Funktion mit ihrer Intensität durch die Relation verknüpft

$$f(x) = K \cdot e^{-\int_a^x \mu_x dx}, \quad \text{wo } K = f(a)$$

folglich gilt wegen (9):

$$f(x) = f(a)\, e^{-\int_a^x \overset{1}{\mu}_x dx - \int_a^x \overset{2}{\mu}_x dx} = f(a)\, e^{-\int_a^x \overset{1}{\mu}_x dx} \cdot f(a)\, e^{-\int_a^x \overset{2}{\mu}_x dx} \cdot \frac{1}{f(a)}$$

Nun ist aber das erste Produkt nichts anderes als der Ausdruck einer unabhängigen Ordnung, in der *nur*

[1]) Wir könnten allgemein von Gesamtheit von Elementen gleichen Argumentes sprechen.

die 1. Ausscheidungsursache wirkt (Intensität $\overset{1}{\mu}_x$) und die von einer Anfangszahl $\overset{1}{f}(a) = f(a)$ ausgeht, das zweite Produkt nichts anderes als der Ausdruck einer unabhängigen Ordnung, in der nur die 2. Ursache wirkt (Intensität $\overset{2}{\mu}_x$) und die von einer Anfangszahl $\overset{2}{f}(a) = f(a)$ ausgeht.

Wir setzen nun der Kürze halber die Konstante $\frac{1}{f(a)}$ kurzerhand gleich C und finden den *Satz*

$$\underline{f(x) = C\overset{1}{f}(x)\overset{2}{f}(x)}, \qquad \text{wo } C = \frac{1}{f(a)} \tag{10}$$

Wirken auf eine Gesamtheit gleichzeitig zwei Ausscheideintensitäten ein, so ergibt sich die Ausscheideordnung der Gesamtheit als Produkt der zwei unabhängigen Abgangsordnungen, welche aus der Einzelwirkung jeder der beiden Intensitäten für sich hervorgehen.

Oder kürzer:

Jede zusammengesetzte Ordnung lässt sich als das Produkt zweier (oder mehrerer) unabhängiger Ordnungen darstellen, die sich je aus der Einzelwirkung jeder der Ursachen ergeben.

Es ist ganz klar, dass dieser Satz bei Einwirkung beliebig vieler Einzelursachen Geltung hat und nicht auf den Fall zweier Ursachen beschränkt bleibt.

Nun ist wiederum $\frac{f(x+1)}{f(x)} = 1 - q_x$.

Also $$\frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{\overset{1}{f}(x+1)\overset{2}{f}(x+1)}{\overset{1}{f}(x)\overset{2}{f}(x)}$$

oder $$\underline{1-q_x = (1-\overset{1}{q}_x)(1-\overset{2}{q}_x)} \qquad (11)$$

In der Literatur wird gewöhnlich nur dieser letztere Satz bewiesen und als Grundlage der Theorie der sogenannten *unabhängigen Wahrscheinlichkeiten* benützt.

Unsere bisherigen Darlegungen lassen aber erkennen, dass es dieses besondern Beweises gar nicht bedarf. Die Theorie der zusammengesetzten Ordnungen wird viel einfacher und durchsichtiger, wenn vorerst der Begriff unabhängige Ordnung geschaffen wird. Die Zerlegung der wirkenden Gesamtabgangsintensität in zwei Komponenten führt dann ohne weiteres zu unserm Satz (10), welcher die Beziehung (11) als Folgerung mitenthält. Von einer besondern „unabhängigen" Wahrscheinlichkeit ist bei diesem Aufbau der Theorie nirgends die Rede. Die auftretenden Wahrscheinlichkeiten sind nicht von anderer Art als die einjährige Sterbenswahrscheinlichkeit einer gewöhnlichen Absterbeordnung.

6.

Wir wollen nun wiederum unsere Theorie durch einige Beispiele stützen.

1. Beispiel. Die Ausscheideordnung zweier verbundener Leben.

Es kann sich dabei z. B. um die Ausscheideordnung von Ehepaaren handeln. Voraussetzung ist nur, dass alle Männer unter sich gleichaltrig, alle Frauen unter sich gleichaltrig seien, dass also ein konstanter Altersunterschied zwischen den Ehepaaren bestehe. Bezeichnen wir das Alter der Männer mit x, das der Frauen mit y, so sei $x-y=\varDelta$ (konstant), also $y = x-\varDelta$. Es ist also nur noch ein Argument vorhanden, das Alter x der Männer. Als Elemente der Gesamtheit sind die einzelnen Ehepaare (nicht die Personen) zu betrachten. Wir gehen aus vom Alter $x = a$ (z. B. $a = 25$) und suchen die (zusammengesetzte) Ausscheideordnung der Ehepaare. Die Intensität ist

$$\mu_x = \overset{1}{\mu}_x + \overset{2}{\mu}_x$$

worin $\overset{1}{\mu}_x$ die Sterbeintensität der Männer für sich und $\overset{2}{\mu}_x = \overline{\mu}_y = \overline{\mu}_{x-\Delta}$ diejenige der Frauen bedeutet; den Strich bringen wir an, um Verwechslungen mit der Gesamtintensität vorzubeugen. Die unabhängigen Ordnungen sind in unserem Fall

$$\overset{1}{l}(x) = \overset{1}{l}(a)\, e^{-\int_a^x \overset{1}{\mu}_x dx} = l(x)$$ die Absterbeordnung der Männer;

$$\overset{2}{l}(x) = \overset{2}{l}(a)\, e^{-\int_a^x \overset{2}{\mu}_x dx}$$

oder einfacher geschrieben

$$\overset{2}{l}(x) = \overline{l}(x-\Delta)$$
$$= \overline{l}(y) = \overline{l}(a-\Delta)\, e^{-\int_{a-\Delta}^y \overline{\mu}_y dy}$$ die Absterbeordnung der Frauen.

Wir setzen die Konstanten

$$\overline{l}(a-\Delta) = l(a) = f(a),$$

dann wird die gesuchte zusammengesetzte Ordnung

$$f(x) = \frac{1}{f(a)} \overset{1}{l}(x)\, \overset{2}{l}(x)$$

oder schliesslich

$$\underline{f(x) = C\, l_x\, l_y} \qquad (12)$$

d. h. die Ausscheideordnung der Ehepaare ist das Produkt aus der Absterbeordnung der Ehemänner und der Absterbeordnung der Ehefrauen (vgl. graphische Darstellung 1).

Dies ist aber ein bekannter Satz aus der Theorie der verbundenen Leben, dessen Verallgemeinerung lautet

$$l_{xyz} = C l_x l_y l_z \ldots$$

wobei
$$\mu_{xyz} = \mu_x + \mu_y + \mu_z + \ldots$$

Unsere Theorie hat sich also an diesem allgemein bekannten Satze bestätigt; sie enthält diesen als Spezialfall. Damit ist aber auch die Brücke zwischen der Theorie der verbundenen Leben und der Theorie der unabhängigen Ordnungen (Wahrscheinlichkeiten) geschlagen.

2. Beispiel. Die Aktivitätsordnung l_x^{aa}.

Die Ausscheideordnung der aktiven Personen ist eine zusammengesetzte Ordnung. Die zwei wirkenden Ursachen sind: Sterblichkeit der Aktiven und Invalidität der Aktiven, also

$$\mu_x^a = \mu_x^{aa} + \nu_x \tag{13}$$

und die beiden unabhängigen Ordnungen sind

$\overset{1}{l}(x)$ die Sterbetafel der Aktiven,

$\overset{2}{l}(x)$ die Invalidierungsordnung der Aktiven,

nämlich, vgl. Formeln (9) und (9a):

$$\left.\begin{aligned} \overset{1}{l}(x) &= C(1-q_a^{aa})(1-q_{a+1}^{aa}) \ldots (1-q_{x-1}^{aa}) \\ \overset{2}{l}(x) &= C(1-i_a)(1-i_{a+1}) \ldots (1-i_{x-1}), \\ \text{so dass} \quad & \underline{l_x^{aa} = \frac{1}{C} \overset{1}{l}(x) \overset{2}{l}(x),} \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

wo
$$C = l_a^{aa}.$$

In der graphischen Darstellung 2 haben wir eine Aktivitätsordnung auf diese Weise aus ihren zwei unabhängigen Faktoren zusammengesetzt. Es wurden die Wahrscheinlichkeiten von *Sucro* für bayrische mittlere Eisenbahnbeamte verwendet. Es sind dies richtig berechnete Wahrscheinlichkeiten, die unsern Formeln (8) und (8a) entsprechen (also sogenannte „unabhängige“ Wahrscheinlichkeiten). Die Darstellung ist an sich interessant. Sie zeigt an, wo die aufsummierten Wirkungen der Einzelursachen sich überschneiden; im vorliegenden Beispiel ist dies beim Alter 59 der Fall.

Eine Bemerkung praktischer Natur sei an dieses Beispiel angeschlossen. Viele private Versicherungsgesellschaften setzen

$$q_x^{aa} = \overset{i}{q}_x = q_x \text{ (allg. Tafel für Todesfallversicherte).}$$

Dann ist ganz einfach

$$\underline{\underline{l_x^{aa} = \frac{1}{C} l_x \overset{2}{l}_x}} \tag{14a}$$

wo l_x die gewöhnliche Sterbetafel der Gesellschaft für Todesfallversicherungen und $\overset{2}{l}_x$ die Invalidierungsordnung der Aktiven bedeutet. Eine einfachere Regel zur Berechnung einer Aktivitätsordnung lässt sich kaum finden.

3. Beispiel. Die Ausscheidetafel aktiver lediger Männer.

Es ist $\qquad \mu_x^{al} = \overset{1}{\mu}_x + \overset{2}{\mu}_x + \overset{3}{\mu}_x$

$\overset{1}{\mu}_x$ Sterbeintensität aktiver lediger Männer,

$\overset{2}{\mu}_x$ Invalidierungsintensität aktiver lediger Männer,

$\overset{3}{\mu}_x$ Heiratsintensität aktiver lediger Männer,

folglich ist die gesuchte Ausscheidetafel gegeben durch

$$f(x) = \frac{1}{C^2} \overset{1}{l}_x \overset{2}{l}_x \overset{3}{l}_x \tag{15}$$

Dabei bedeuten die unabhängigen Ordnungen der Reihe nach

$\overset{1}{l}_x$ Sterbetafel der aktiven ledigen Männer,

$\overset{2}{l}_x$ Invalidierungsordnung der aktiven ledigen Männer,

$\overset{3}{l}_x$ Verheiratungsordnung der aktiven ledigen Männer

und $C = \dfrac{1}{f(a)}$.

4. Beispiel. Die Dekremententafel der Versicherten.

$$\mu_{(x)+t} = \overset{1}{\mu}_{(x)+t} + \overset{2}{\mu}_{(x)+t}$$

$\overset{1}{\mu}_{(x)+t}$ Sterbeintensität der Versicherten $(x+t)$, die beim Alter x eingetreten sind,

$\overset{2}{\mu}_{(x)+t}$ Stornointensität der Versicherten $(x+t)$, die beim Alter x eingetreten sind.

$$f(x)+t = \frac{1}{f(x)} \overset{1}{l}_{(x)+t} \overset{2}{l}_{(x)+t}$$

$\overset{1}{l}_{(x)+t}$ Selektionssterbetafel der Versicherten,

$\overset{2}{l}_{(x)+t}$ Stornierungsordnung der Versicherten.

Als Beispiel haben wir die „neue Bankliste“ der Gothaer von *Karup* (1903) mit den Gothaer Stornierungswahrscheinlichkeiten verwendet (vgl. graphische Darstellung. 3). Die zwei unabhängigen Ordnungen überschneiden sich erst beim Alter 54, eine schon an sich für den Privatversicherer bemerkenswerte Tatsache.

5. Beispiel. Die Ausscheideordnung der Witwen.

Auch dies ist eine zusammengesetzte Ordnung. Es bedeuten

$\overset{1}{\mu}_y$ die Sterbensintensität der Witwen,

$\overset{2}{\mu}_y$ die Heiratsintensität der Witwen,

$\overset{1}{l}_y$ die Absterbeordnung der Witwen,

$\overset{2}{l}_y$ die Verheiratungsordnung der Witwen,

dann wird

$$\overline{l_y^{ww}} = \frac{1}{\overline{l_a^{ww}}} \overset{1}{l}_y \overset{2}{l}_y$$

Auch hier ist eine graphische Darstellung der drei Ordnungen gemacht worden. Diese ist deswegen interessant, weil sie ein Beispiel einer unabhängigen Ordnung zeigt, die recht rasch *parallel* zur Altersachse verläuft, also keine Abnahme mehr aufweist. Die Wahrscheinlichkeiten entstammen der Arbeit von Dr. *M. Ney* über die Heirats-, Sterbe- und Scheidungswahrscheinlichkeiten in der schweizerischen Bevölkerung 1901/10 (Mitteilungen, 12. Heft). Es sind dies richtig berechnete Wahrscheinlichkeiten (nämlich sogenannte unabhängige Wahrscheinlichkeiten).

6. Beispiel. Die Absterbeordnung der schweizerischen Bevölkerung als zusammengesetzte Ordnung.

Im 20. Heft der „Mitteilungen" hat Herr H. *Steiner-Stooss* eine modifizierte schweizerische Absterbeordnung berechnet. Sie entspricht der Voraussetzung, dass die Lungentuberkulose als Todesursache ausgeschaltet ist. Herr Steiner benennt sie im Gegensatz zu $l_{(x)}$ mit $\overset{1}{l}(x)$. Es muss nun offenbar ein funktioneller Zusammenhang zwischen $l_{(x)}$ und $\overset{1}{l}(x)$ bestehen, nämlich

$$l_{(x)} = C\,\overset{1}{l}(x)\,\varphi(x)$$

wo $\varphi(x)$ noch zu bestimmen ist. Nun lässt sich die Sterbensintensität μ_x zerlegen in die Wirkung der Lungentuberkulose $\overset{2}{\mu}_x$ und die aller andern Todesursachen $\overset{1}{\mu}_x$, also

$$\mu_x = \overset{1}{\mu}_x + \overset{2}{\mu}_x$$

Die Absterbeordnung $\overset{1}{l}_x$ entsteht (man vergleiche bei Steiner), wenn nur die Intensität $\overset{1}{\mu}_x$ wirkt. Folglich wissen wir nun schon, was φ bedeutet: $\varphi(x)$ *ist die unabhängige Absterbeordnung, die den Tuberkulosefällen allein entspricht,* also muss sein

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= l(o)\cdot e^{-\int_o^x \overset{2}{\mu}_x\,dx} \\ &= \overset{2}{l}(x)\end{aligned}$$

und die *Absterbeordnung ist in ein Produkt zerlegt*

$$l_x = \frac{1}{l_o}\,\overset{1}{l}(x)\,\overset{2}{l}(x)$$

wo die beiden unabhängigen Ordnungen $\overset{1}{l}(x)$ und $\overset{2}{l}(x)$ dem Absterben ohne Berücksichtigung der Tuberkulosesterblichkeit und dem Absterben bei Berücksichtigung der Tuberkulosesterblichkeit allein entsprechen.

Wir schliessen: Der Begriff unabhängige Ordnung wurde bereits unbewusst in der Literatur verwendet; man hat jedoch nur den einen Faktor $\overset{1}{l}(x)$ bestimmt, den zweiten vergessen. Beide aber haben eine ebenso grosse Berechtigung wie die Absterbeordnung, trotzdem alle drei Begriffe auf „fingierten Gesamtheiten" beruhen.

Wir konnten sogar noch eine dritte unabhängige Ordnung für die Schweizerbevölkerung berechnen dank der Freundlichkeit des Herrn cand. math. *H. Wyss* in Bern. Herr Wyss hat Untersuchungen über die Krebsmortalität in der Schweiz durchgeführt und eine der Steinerschen Ordnung analoge Ordnung l^*_x berechnet. Diese ergibt sich, wenn die Wirkung der Krebsmortalität ausgeschlossen wird. Wir können daraus eine komplementäre Ordnung $\overset{3}{l}(x)$ berechnen, nämlich aus

$$l(x) = \frac{1}{l_o}\, l^*(x)\, \overset{3}{l}(x)$$

wo $\overset{3}{l}(x)$ die Absterbeordnung bei Wirkung von *Krebs* allein ergibt, also

$$\overset{3}{l}(x) = l_o \frac{l(x)}{l^*(x)}$$

Wir können schliesslich schreiben

$$l(x) = \frac{1}{(l_o)^2}\,{}'\overset{1}{l}(x)\, \overset{2}{l}(x)\, \overset{3}{l}(x)$$

Darin bedeuten

$\overset{2}{l}(x)$ die Absterbeordnung bei Wirkung von Lungentuberkulose allein,

$\overset{3}{l}(x)$ die Absterbeordnung bei Wirkung von Krebs allein,

$'\overset{1}{l}(x)$ die Absterbeordnung bei Wirkung aller Todesursachen ohne Krebs und Lungentuberkulose,

$l(x)$ die Absterbeordnung bei Wirkung aller Todesursachen.

Wir können auch eine weitere zusammengesetzte Ordnung erstellen, nämlich

$$f(x) = \frac{1}{l_o} \overset{2}{l}(x) \overset{3}{l}(x),$$

welche sich ergibt, wenn nur Krebs und Lungentuberkulose als Todesursachen berücksichtigt werden. Wir stellen anhand der graphischen Darstellung 5 fest, dass diese Ordnung bereits ganz den charakteristischen Verlauf einer gewöhnlichen Volksabsterbeordnung zeigt, es fehlt einzig der starke Abfall im Kindesalter (Kindersterblichkeit). Wir schliessen daraus: *Kindersterblichkeit, Krebs und Lungentuberkulose bestimmen in ihrer Gesamtwirkung den charakteristischen Verlauf der Absterbeordnung der Männer.*

Von Interesse ist auch die Feststellung, dass die Ordnungen $\overset{2}{l}(x)$ und $\overset{3}{l}(x)$ sich erst beim Alter 72 überschneiden.

7.

Blicken wir zurück! Durch Schaffung der Begriffe unabhängige und zusammengesetzte Ordnung ist es uns gelungen, einzig mit Hilfe der Intensitäten dasjenige Gebäude zu errichten, das bisher stets auf der Basis besonders definierter Wahrscheinlichkeiten aufgebaut wurde. Wir hatten nicht nötig, zwei Arten von Wahrscheinlichkeiten, sogenannte *abhängige* und *unabhängige* Wahrscheinlichkeiten, zu unterscheiden. Wir lernten nur eine an sich selbstverständliche Art statistischer Wahrscheinlichkeiten kennen, diejenigen, welche lange Zeit von ihrem Schöpfer *Karup* und seinen Schülern als „unabhängige" Wahrscheinlichkeiten gegen eine Schar von Anhängern der „abhängigen" Wahrscheinlichkeiten verteidigt werden mussten. Die Zweispurigkeit, welche infolge dieses Streites bis heute in der Literatur entstand, hat das ganze Gebiet, welches wir uns als Gebiet der zusammengesetzten Ordnungen zu charakterisieren erlaubten, zu einem sehr unübersichtlichen und für die Praktiker und Studenten dornenvollen gemacht.

Wir wollen nicht die ganze Geschichte dieser unabhängigen Wahrscheinlichkeiten an uns vorüberziehen lassen, sondern nur einige Hauptpunkte der Entwicklung hervorheben.

1875; *Karup,* Gotha, Gutachten betreffend die Invaliden- und Witwenpensionsverhältnisse der Reichsbeamten (nicht publiziert).

1893; *Karup,* Die Finanzlage der Gothaischen Staatsdienerwitwensozietät am 31. Dezember 1890.

1911; *Spangenberg,* Die Karupsche Theorie der unabhängigen Wahrscheinlichkeiten (Veröffentlichungen, Bd. XX, 1910).

1912; VII. Internationaler Kongress für Versicherungswissenschaft in Amsterdam.

Im übrigen sei auf die treffliche Literaturübersicht bei *Spangenberg* (op. cit.) verwiesen. Ferner müssen wir die Literaturzusammenstellung des Herrn Prof. Dr. *Bohren* erwähnen (Über den Stand der Theorie der Invalidenversicherung, Bd. 34 des Assekuranz-Jahrbuches); dort finden sich auch die Formeln für die abhängigen und unabhängigen Wahrscheinlichkeiten in übersichtlicher Weise gegenübergestellt.

Eine treffliche Arbeit darf heute nicht unerwähnt bleiben, diejenige des Herrn Prof. *du Pasquier* (Neuchâtel) in den „Mitteilungen", Hefte 7 und 8 (vgl. auch VII. Internationaler Kongress, 1912, Bd. II, pag. 399). Seine mathematische Grundlegung der Theorie dürfte die genaueste sein; sie baut auf der Theorie der Differentialgleichungen auf und zeichnet sich durch grosse Schärfe der Begriffsbestimmung aus. Wir stellen anhand unserer Literaturnachschlagungen fest, dass Herr *du Pasquier* der einzige ist, der vor uns den Begriff der unabhängigen Ordnungen aufgestellt und bewusst verwendet hat, nämlich im Gebiete der Invalidenversicherung. Er nennt sie „partielle Ausscheideordnungen" und kennt ihre Wichtigkeit als Elemente der zusammengesetzten Ordnungen (vgl. z. B. VII. Kongress, pag. 432). Leider hat er den Multiplikationssatz nicht gebührend in den Vordergrund gestellt und die Betrachtung nicht verallgemeinernd auf beliebige Gesamtheiten (Witwen usw.) ausgedehnt. Auch ist seine Darstellung sehr abstrakt, weshalb sie nicht für jedermann verständlich ist und noch nicht die ihr gebührende Beachtung bei den Versicherungsmathematikern gefunden hat.

Es sei jedoch in diesem Zusammenhang darauf aufmerksam gemacht, dass *Karup* und nach ihm *Spangenberg* und andere eine zusammengesetzte Ordnung wie folgt bilden

$$f(x) = f(a)\, \Phi_x\, \Psi_x$$

wo Φ_x und Ψ_x *echte Brüche* sind, nämlich die Produkte der unabhängigen Wahrscheinlichkeiten

$$\Phi_x = \prod_a^{x-1} (1-\overset{1}{q_x})$$

$$\Psi_x = \prod_a^{x-1} (1-\overset{2}{q_x})$$

Sie werden jedoch durchwegs als Hilfsgrössen aufgefasst (vgl. *Spangenberg* in den Veröffentlichungen, pag. 141, 151, 153). An einer einzigen Stelle äussert sich Spangenberg wie folgt (loc. cit. pag. 153): „Es ist in jedem Falle die gleiche Methode mittels der Hilfsgrössen (Φ_x und Ψ_x), welche man auch als ideale Ordnungen auffassen kann . . .“ Es ist dies aber nur eine landläufige Redewendung; der Begriff „ideale Ordnung“ wird nicht definiert, und es ist noch durchaus nicht bewusst an eine unabhängige Ordnung in unserem Sinne gedacht. Aber schon bei Spangenberg liegt dieser Begriff gleichsam in der Luft.

Die Kongressarbeiten von 1912 und die andern erwähnten Arbeiten haben die Berechtigung der unabhängigen Wahrscheinlichkeiten neben den abhängigen glänzend dargetan. Noch mehr: sie haben klar erwiesen, dass diese den Vorzug verdienen. Am konsequentesten ist in seiner Auffassung Herr Prof. *Rosmanith* in Prag, indem er schreibt (VII. Kongress 1912, Bd. II, pag. 362): „. . . Aus den angeführten Tatsachen ergibt sich in offenkundiger Weise, dass das System der „abhängigen“ Wahrscheinlichkeiten nur als ein Näherungsverfahren für das System der „unabhängigen“ oder „reinen“ Wahrscheinlichkeiten gewertet werden kann, *dass nur das letztere System zu einer logisch und mathematisch einwandfreien Begründung der Dekremententafeln führt.*“ Seine Aussetzungen an den abhängigen Wahrscheinlichkeiten betreffen im wesentlichen folgende Punkte (pag. 359):

1. Die abhängigen Wahrscheinlichkeiten zeigen einen ganz eigentümlichen Charakter, indem sie wohl bezüglich der Austritte reduziert sind, nicht aber bezüglich der zweiten, die Ausscheidung betreffenden Ursache;
2. sie sind für sich allein „unabhängig“ nicht erfassbar, sondern nur in Berücksichtigung ihrer gegenseitigen Abhängigkeit anzuwenden (indem von L_x aktiven Personen nur dann $L_x^a{}'q_x^{aa}$ gestorbene Aktive erwartet werden können, wenn gleichzeitig $L_x^a{}'i_x$ Aktive invalid geworden sind);
3. eine Wahrscheinlichkeit, die aus einem Beobachtungsmaterial bei Berücksichtigung *zweier* Ausscheidungsursachen gewonnen wurde, kann nicht zur Herstellung einer Dekremententafel für *drei* Ausscheidungsursachen verwendet werden, was anderseits bei den unabhängigen Wahrscheinlichkeiten ohne weiteres angängig ist;
4. es können nicht „kombinierte Abfallsordnungen“ hergestellt werden durch Kombination einzelner Wahrscheinlichkeitswerte, wenn die letzteren aus verschiedenen Beobachtungsmaterialien stammen.

Alle diese Mängel fallen bei den unabhängigen Wahrscheinlichkeiten dahin. Wir stehen nicht an, unserseits dem *Verdammungsurteil gegen die abhängigen Wahrscheinlichkeiten* beizupflichten. Wir würden es begrüssen, wenn inskünftig in Lehrbüchern und Publikationen die Theorie der Invaliden- und Witwenversicherung nur noch unter Anwendung unabhängiger Wahrscheinlichkeiten abgeleitet würde. Noch mehr, wir würden es als Fortschritt betrachten, wenn der Begriff der *unabhängigen Ordnung* als wesentlich erachtet und in den Vordergrund der Theorie gestellt würde. Es könnte dann die Theorie auf diejenige der verbundenen Leben zurückgeführt werden. Damit würde der Formelapparat der Invaliden- und Witwenversicherung vereinfacht, nämlich demjenigen der Leibrentenversicherung *eingegliedert*. Die scheinbaren Mängel und Unklarheiten der Theorie der abhängigen und unabhängigen Wahrscheinlichkeiten würden verschwinden, und die Zweispurigkeit in der Literatur würde inskünftig dahinfallen.

Nun wissen wir genau, dass es lange braucht, bis solche Umstellungen in einer Theorie Platz greifen. Vorderhand wären wir schon zufrieden, wenn inskünftig jeder Autor bei Veröffentlichung neuer Abfalltafeln deutlich angeben würde, ob seine Wahrscheinlichkeiten abhängige oder unabhängige seien. Wird dies unterlassen, so muss jeder Benützer der Tafeln dies einzeln immer zuerst feststellen, eine Feststellung, die nicht leicht ist, wenn die Beobachtungszahlen nur unvollständig wiedergegeben und die verwendete Formel nicht angegeben ist.

Anderseits ist es Pflicht jedes Versicherungsmathematikers, *vor* der Verwendung fremder Tafeln zu Rechnungszwecken zu prüfen, ob die Wahrscheinlichkeiten abhängige oder unabhängige sind. Häufig wird die Invalidierungswahrscheinlichkeit aus diesem, die Sterbenswahrscheinlichkeit aus jenem Material entnommen. Dann sind vorher die Wahrscheinlichkeiten auf *gleiches System*, und zwar auf *unabhängige* Wahrscheinlichkeiten umzurechnen. Die hierzu erforderlichen Näherungsformeln finden sich beispielsweise bei *Spangenberg*, 10. Heft der Mitteilungen schweizerischer Versicherungsmathematiker.

B. Praktischer Teil.

8.

Wir haben bereits erwähnt, dass in der Praxis meistens die einjährigen Wahrscheinlichkeiten die gegebenen Grössen sind, die aus der Beobachtung entnommen wurden. Es handelt sich dann darum, die Intensitäten aus jenen zu berechnen. Man wird vorerst die unabhängigen Ordnungen $f(x)$ ableiten und die Formel anwenden

$$\mu(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)}$$

Zur rechnerischen Ermittlung des Differentialquotienten ist man gezwungen, von der Differenzenrechnung Gebrauch zu machen, weil $f(x)$ nur für ganzjährige Argumentwerte gegeben ist. Als vorteilhaft hat sich die von *Spangenberg* (Veröffentlichungen, Bd. XX, pag. 133) angegebene Reihe erwiesen, nämlich auf unsern Fall zugespitzt

$$f'(x) = \Psi_x - \frac{\Delta^2 \Psi_{x-1}}{6} + \frac{\Delta^4 \Psi_{x-2}}{30} - + \ldots$$

worin

$$\Psi_x = \Delta \frac{f_x + f_{x-1}}{2}.$$

Mit dieser Differenzenformel haben wir nun für die schweizerische Bevölkerung nach *Geschlechtern getrennte* und *nach dem Zivilstand abgestufte* Intensitäten berechnet. Wir stützten uns dabei auf die von Dr. *M. Ney* berechneten Wahrscheinlichkeitswerte, publiziert im 12. Heft der Mitteilungen: „Détermination de la probabilité de mariage, de divorce et de décès d'après les classes d'état civil de la population suisse, pour la période 1901/10.“

Die von Ney berechneten Wahrscheinlichkeiten sind unabhängige. Man erkennt dies durch Stichproben und an der Formel pag. 50, nämlich nach Ney:

„Nous avons, pour la probabilité d'un des événements (décès, mariages et divorces), l'expression

$$P_{x'} = \frac{Y_{x'}}{V_{x'} + \frac{1}{2}(A-D)}$$

L'expression $A-D$ varie dans la même classe d'âge et la même classe d'état civil suivant que l'on veut calculer la probabilité de mariage, de divorce et de décès."

Die Wahrscheinlichkeitswerte von Ney wurden zuerst ausgeglichen. Dann wurden die unabhängigen Ordnungen gebildet und durch Differenziation deren Intensität ermittelt. Die Ergebnisse sind in den vorliegenden graphischen Darstellungen 6—9 enthalten. Da es sich um Intensitäten handelt, dürfen die Kurven übereinander gelagert, d. h. ihre Ordinaten addiert werden, um die Gesamtausscheideintensität in einem bestimmten Zivilstand zu ermitteln. Auch diese ist in die graphischen Darstellungen eingezeichnet.

Es muss hier noch erwähnt werden, dass die Intensitäten auch direkt aus den Beobachtungszahlen ermittelt werden können. Wir verweisen auf *Karup* (Finanzlage, pag. 47) und *Spangenberg* (Mitteilungen schweizerischer Versicherungsmathematiker, 10. Heft). Spangenberg postuliert sogar die primäre Berechnung der Intensitäten aus den Beobachtungen als genaueste Methode.

Noch stellen wir die Frage, ob es sich lohnt, so umfangreiche Berechnungen über die Sterblichkeit der Ledigen, Verheirateten, Verwitweten und Geschiedenen sowie über die Heiratsintensität der drei Gruppen von Unverheirateten anzustellen. Hier dürfen wir verweisen auf folgende Stelle in *Amtmann* und *Pfaffenberger* (Mathematik der Pensionsversicherung 1907, pag. 42):

„Die Sterblichkeits- und Wiederverheiratungsverhältnisse *von Witwen* sind noch recht wenig untersucht, und müssen wir uns deshalb auf das oben Mitgeteilte beschränken. Noch schlechter aber steht es mit unserer Kenntnis bezüglich der Sterblichkeit der *Ehefrauen.*"

Allerdings hatte schon *Francis Baily* in seinem bekannten Werk „The Doctrine of Life annuities and Assurances" 1813 auf die Tatsache aufmerksam gemacht, dass verheiratete Frauen länger leben als einzelstehende Frauen [1]).

Die Zahlen von *Ney* haben wohl zum erstenmal über die Sterbe- und Ausscheideverhältnisse der vier Zivilstände einer Bevölkerung Aufschluss gegeben. Seinen Untersuchungen kommt daher eine grosse Bedeutung zu, sowohl was die mathematische Statistik als die Versicherungstechnik anbetrifft. Von ganz besonderem Nutzen sind aber diese Zahlen im Hinblick auf die kommende schweizerische Sozialversicherung. Welches auch das einzuschlagende Deckungsverfahren sein wird, soviel ist sicher, dass sich der Bund durch versicherungstechnische Berechnungen über die künftige Tragweite jeder einzelnen Vorlage Rechenschaft geben muss. Dabei können die Neyschen Zahlen und die daraus abgeleiteten Ordnungen von grossem Nutzen sein, namentlich auch für Berechnungen über die

---

[1]) *Francis Baily,* The Doctrine etc., Bd. I, pag. 12:

„It is a singular circonstance that not only do *females* live longer than *males,* but *married* women live longer than *single* women. All the tables of observations intimate this."

Witwenversicherung und die Altersversicherung der ledigen Frauen.

9.

Wir treten nun an die Besprechung der Ergebnisse heran. Dabei können wir uns kurz fassen und auf die Ausführungen von Ney bezüglich der einjährigen Wahrscheinlichkeiten verweisen.

Was die *Sterbensintensität* betrifft, so sticht der verschiedene Verlauf bei beiden Geschlechtern in die Augen. Diese Tatsache ist nicht neu. Interessant sind aber die Unterschiede im Kurvenverlauf bei den verschiedenen Zivilständen.

1000fache Sterbensintensität.

Alter	Ledig		Verheiratet		Verwitwet		Geschieden		Prozentverhältnis $\frac{\text{Männer}}{\text{Frauen}}$ 100			
	nner	Frauen	Männer	Frauen	Männer	Frauen	Männer	Frauen	ledig	verh.	verw.	gesch.
20	5.32	5.14	3.76	5.50	7.23	35.74	3.41	14.07	104	68	20	24
30	7.72	6.45	4.70	6.53	9.90	8.73	14.74	9.47	120	72	113	156
40	13.76	8.41	8.09	7.80	15.38	7.93	26.07	10.23	164	104	194	255
50	23.04	13.63	15.55	11.17	24.59	12.60	36.66	14.66	169	139	195	250
60	41.95	28.19	31.06	25.14	40.68	26.27	67.09	33.03	149	124	155	203
70	86.89	68.69	65.62	61.45	81.38	67.60	120.61	84.86	126	107	120	142
80	190.82	155.96	137.96	130.66	190.99	163.28	278.90	262.83	122	106	117	106

Die Prozentzahlen in vorstehender Tabelle lassen erkennen, dass die Unterschiede in der Mortalität der beiden Geschlechter am grössten sind bei den Geschiedenen. Im produktiven Alter ist die Sterbeintensität der geschiedenen Männer mehr als doppelt so gross als diejenige der geschiedenen Frauen. Dann folgen die verwitweten Männer, deren Mortalität in den Altersgruppen 35—55 ebenfalls rund doppelt so hoch ist als die der gleichaltrigen Witwen. Etwas weniger hoch sind die Unterschiede bei den Ledigen; immerhin ist auch da die Mortalität der Frauen erheblich niedriger als die der Männer. Eine Sonderstellung nehmen die Eheleute ein: die Mortalität der Ehefrauen ist im Alter der grössten Fruchtbarkeit grösser als die der Ehemänner gleichen Alters; vom Alter 40 an kehrt das Verhältnis um, ohne dass aber die Unterschiede in der Sterblichkeit so beträchtlich werden wie in den andern Zivilständen.

Nun gehen wir zum Vergleich der Sterbesätze innerhalb der Geschlechter über. Nachstehende Vergleichszahlen sind zur Beurteilung der Verhältnisse von Nutzen.

Prozentverhältnisse der Sterbeintensitäten.

Die Sterbeintensität der Verheirateten ist 100 gesetzt.

Alter	Sterbeintensität beim vorstehenden Alter, in % der Intensität der verheirateten Personen					
	A. Männer			B. Frauen		
	ledige	verwitwete	geschiedene	ledige	verwitwete	geschiedene
20	141	192	91	93	650	256
30	164	211	314	99	134	145
40	170	190	322	108	102	131
50	148	158	236	122	113	131
60	135	131	216	112	104	131
70	132	124	184	112	110	138
80	138	138	202	119	125	201

Folgende Tatsachen sind wesentlich:

1. Die Sterblichkeit der geschiedenen Männer ist sehr viel grösser als diejenige der Witwer und diese wiederum etwas höher als diejenige der Ledigen, während letztere wiederum im Durchschnitt 50% höher ist als diejenige der verheirateten Männer.

2. Auch bei den Frauen ist die Sterblichkeit der Geschiedenen am grössten; dann folgt die Sterblichkeit der Ledigen und Witwen; den Schluss bildet die Sterblichkeit der Ehefrauen. In der Alterszone 20—30 kehren die Verhältnisse um. Wesentlich ist noch die Feststellung, dass die Unterschiede in den Prozentsätzen bei den Frauen viel schwächer sind als bei den Männern.

Den Gründen all dieser verschiedenartigen Verläufe der betrachteten Intensitäten nachzugehen, würde zu weit führen. Wir deuten sie nur an: Selbstauswahl guter „Risiken“ bei der Eheschliessung und regelmässiger Lebenswandel durch die Ehe bedingen geringe Sterbeintensität der Eheleute; der Bestand der unverheiratet bleibenden Personen enthält infolgedessen mehr schlechte Risiken als jener. Bei den unverheirateten Männern aller drei Zivilstände spielt offenbar der unregelmässige Lebenswandel im weitesten Sinne eine grosse Rolle; einen starken Anteil an der erhöhten Mortalität trägt ohne Zweifel der Alkoholismus, ohne dass natürlich solche Schlüsse auf Einzelfälle ausgedehnt werden dürfen.

Eine interessante Vergleichszahl ergibt sich, wenn wir in den unabhängigen Absterbeordnungen der acht Personengruppen die volle durchschnittliche Lebenserwartung des Alters 30 berechnen.

Volle, mittlere Lebenserwartung in der unabhängigen Absterbeordnung, Jahre:			
	Männer I	Frauen II	Differenz II—I
Ledige Personen	30.8	35.4	4.6
Verheiratete Personen . .	35.5	36.9	1.4
Verwitwete „ . .	30.1	35.7	5.6
Geschiedene „ . .	24.5	33.3	8.8
Alle Personen	33.8	36.1	2.3

Frappant ist namentlich der Unterschied bei den Geschiedenen, ist doch die Lebenserwartung der 30-jährigen geschiedenen Männer nahezu 9 Jahre niedriger als diejenige der gleichaltrigen geschiedenen Frauen. Gross sind auch die Unterschiede bei den Ledigen und den Verwitweten. Dagegen ist die Lebenserwartung der 30jährigen verheirateten Männer und Frauen nahezu gleich gross. Es sei speziell noch betont, dass es sich hier um Lebenserwartung *in der unabhängigen Ordnung* handelt. Der Begriff ist übrigens ebenso klar wie derjenige der Lebenswartung in der gewöhnlichen Absterbeordnung, er ist anderseits ebenso abstrakt aufzufassen wie jener.

Die *Heiratsintensität.* Dieser Begriff tritt zum erstenmal bei Karup auf. An ihm hat Karup seine ganze Theorie der unabhängigen Wahrscheinlichkeiten dargelegt, weshalb er gleichsam historische Bedeutung besitzt. Wir stellen nachstehend die von Karup berechneten Heiratsintensitäten von Witwen der Gothaischen Staatsdienerwitwensozietät (1850—89) den von uns berechneten Intensitäten für Witwen der Schweizerbevölkerung (1901—10) gegenüber.

Heiratsintensität der Witwen.

Alter	Karup	Schweiz
20	0.0210	0.0820
30	0.0308	0.1078
40	0.0129	0.0459
50	0.0025	0.0125

Wie man erkennt, sind die Verhältnisse bei den beiden betrachteten Personengesamtheiten, die auch zeitlich weit getrennt sind, durchaus verschieden.

Über die Verhältnisse in den verschiedenen Zivilständen der Schweizerbevölkerung gibt nachstehende Übersicht Auskunft.

1000fache Heiratsintensität.

Alter	Ledige		Verwitwete		Geschiedene		Prozentverhältnisse $100 \frac{\text{Männer}}{\text{Frauen}}$, %		
	Männer	Frauen	Männer	Frauen	Männer	Frauen	ledig	verw.	gesch.
20	8.38	46.28	39.76	81.98	0	166.88	18	48	—
25	91.99	125.53	222.50	130.91	235.48	182.95	73	170	129
30	116.48	94.94	272.18	107.84	247.92	162.64	123	252	152
35	75.02	49.45	225.74	76.15	205.93	122.49	152	296	168
40	40.32	25.02	164.82	45.94	149.88	78.92	161	359	190
45	22.00	13.33	108.43	25.13	107.84	46.99	165	431	229
50	11.56	6.10	66.14	12.48	76.83	27.84	190	530	276

Wir erkennen auch hier ein Überwiegen der Intensität der männlichen Bevölkerung gegenüber der weiblichen gleichen Alters und Zivilstandes. Einzig bei den ledigen Personen tritt vor dem 30. Altersjahre das Umgekehrte ein: Die Heiratsintensität des weiblichen Geschlechts ist bedeutend höher, dies deshalb, weil die Ehefähigkeit auch früher eintritt. Am grössten ist der Unterschied bei den *verwitweten Personen,* wo eine bis fünfmal so grosse Heiratsintensität der Männer festzustellen ist; die Unterschiede in den Heiratssätzen vergrössern sich mit zunehmendem Alter. Auch die geschiedenen Männer weisen eine nahezu doppelt so grosse Heiratsintensität auf als die geschiedenen Frauen.

Von Interesse sind auch hier wieder die Vergleichszahlen innerhalb der Geschlechter. Wir setzen die Heiratsintensität der ledigen Personen zu 100 und geben an, wie viele Prozente dann die Intensität der Verheiratung in den beiden andern Zivilständen ausmacht.

Alter	Die Heiratsintensität der verwitweten Personen in % derjenigen der ledigen Personen gleichen Alters		Die Heiratsintensität der geschiedenen Personen in % derjenigen der ledigen Personen gleichen Alters	
	Männer	Frauen	Männer	Frauen
20	474	177	0	361
30	234	114	213	171
40	409	184	372	315
50	572	205	665	456

Über die *Scheidungsintensität der Eheleute* enthält nachstehende Tabelle einige Angaben.

1000fache Intensität der Ehescheidung.

Alter	Männer	Frauen
20	0.85	2.14
30	3.25	3.29
40	2.78	2.48
50	1.88	1.70
60	0.93	0.69

Die zeitliche Verfolgung der Intensitäten der Sterblichkeit, der Verheiratung und der Ehescheidung in den verschiedenen Volkszählungsperioden wird interessante Schlüsse über die Tendenzen in der Bevölkerungsbewegung ergeben. Während die Sterblichkeit von wirtschaftlichen Krisen nur unwesentlich beeinflusst wird, trifft dies für die Heirats- und Scheidungsfrequenz nicht zu. Letztere ist mit den wirtschaftlichen Erscheinungen eng verknüpft, wie die abgelaufenen Kriegs- und Nachkriegsjahre beweisen. Von Interesse wäre auch, eine Intensität der Wanderungen (Zu- und Abwanderung) zu bilden. Man besässe dann alle dynamischen Elemente, welche das Volksganze quantitativ beeinflussen.

Die Wirkung der verschiedenen Intensitäten im Laufe der Dezennien in Verbindung mit der Geburtenfrequenz kann an einem bestimmten Stichtag festgestellt werden: Man erhält die Alters- und Zivilstandsgliederung der Bevölkerung als Momentaufnahme. Die mathematische Verknüpfung des Bewegungsvorganges mit dem statischen Zustand in jenem Beobachtungszeitpunkt besteht in einer Reihe von *Integralgleichungen*. Denn die Gesamtheiten der Bevölkerung, der ledigen, der verheirateten, verwitweten und geschiedenen Personen beiderlei Geschlechts, sind unaufhörlich sich erneuernde Gesamtheiten, deren durch Zustrom und Abgang bedingter Umfang nach den ganz allgemein für solche Gesamtheiten geltenden Beziehungen des Herrn Prof. *Moser* mathematisch dargestellt werden kann. Es bleibt ein dankbares Gebiet mathematischer Betätigung, für eine Bevölkerung diese Zusammenhänge einheitlich zu erfassen und das Zusammenspiel der Intensitäten exakt zum Ausdruck zu bringen [1]).

In den beiden letzten graphischen Darstellungen (10*a* und *b*) haben wir eine solche Momentaufnahme wiedergegeben. Sie betrifft die Zivilstandsgliederung der schweizerischen Bevölkerung am 31. Dezember 1910. Für jedes Alter ist angegeben, wie viele der durch die Volkszählung erfassten Personen auf die Gruppen ledig, verheiratet, verwitwet und geschieden entfallen. Die Beobachtungszahlen sind ausgeglichen. Die Kurven sprechen für sich. In ihnen kommt die summierte Wirkung des verschiedenen Verlaufes der Intensitäten bei den beiden Geschlechtern und je innerhalb der vier

---

[1]) Es sei darauf hingewiesen, dass Anfänge zu solchen Untersuchungen bestehen. Ich verweise auf die Arbeit des Herrn *Schönwiese* (Z. G. V. W., Bd. 17), worin mit Hilfe von Integralgleichungen eine „Ordnung der Unverheirateten" abgeleitet ist.

Zivilstände deutlich zum Ausdruck. Um das Bild ganz zu verstehen, hat man sich nur noch zu vergegenwärtigen, dass die Altersdifferenz der neuen Ehen mit zunehmendem Heiratsalter des Mannes stark anwächst.

Wir konstatieren insbesondere folgendes.

Gleichviel *verheiratete wie ledige* Personen sind zu konstatieren

	bei den Männern:	bei den Frauen:
im Alter	28	26
und im Alter	95	76
Differenz der Alter . .	67	50

Gleichviel *verwitwete wie ledige* Personen sind zu beobachten

im Alter 61 bei den Männern,
" " 52 " " Frauen.

Gleichviel *verwitwete wie verheiratete* Personen sind feststellbar

im Alter 76 bei den Männern,
" " 63 " " Frauen.

Während bei den Männern die Quote der Verwitweten erst fast beim Alter 80 die 50 % überschreitet, ist dies bei den Frauen schon beim Alter 68 der Fall. Von den 80jährigen Männern sind immer noch etwa 1/3 verheiratet, während von den 80jährigen Greisinnen nur noch 10 % verheiratet sind. Die Vergleichung der beiden Bilder führt uns wohl eindringlich genug vor Augen, wie wichtig in der kommenden Sozialversicherung die Witwenversicherung und die Altersversicherung der ledigen Frauen ist. Mit diesem Hinweis seien unsere Ausführungen abgeschlossen.

Anhang:
Tabellen I und II.
Graphische Darstellungen 1—10.

Die Sterbensintensität μ_x in der schweiz. Bevölkerung 1901/10 (tausendfach, 1000 μ_x).

Tabelle I.

Alter x	Männer				Frauen				Gesamt-bevölkerung	
	ledig	verheiratet	verwitwet	geschieden	ledig	verheiratet	verwitwet	geschieden	Männer	Frauen
20	5.32	3.76	7.23	3.41	5.14	5.50	35.74	14.07	5.08	5.34
21	5.44	3.70	7.77	4.07	5.31	5.83	25.55	13.72	5.26	5.49
22	5.49	3.67	8.22	4.59	5.48	6.10	18.40	13.41	5.34	5.66
23	5.54	3.69	8.55	5.72	5.63	6.27	14.43	12.89	5.38	5.84
24	5.71	3.77	8.78	7.34	5.74	6.34	12.25	12.32	5.44	6.01
25	5.99	3.89	8.93	8.84	5.84	6.36	11.00	11.93	5.53	6.15
26	6.32	4.03	9.04	10.27	5.94	6.35	10.29	11.56	5.65	6.25
27	6.66	4.18	9.15	11.54	6.05	6.36	9.86	11.14	5.79	6.33
28	7.00	4.34	9.30	12.68	6.17	6.41	9.56	10.63	5.93	6.43
29	7.35	4.51	9.53	13.72	6.31	6.47	9.18	10.06	6.05	6.51
30	7.72	4.70	9.90	14.74	6.45	6.53	8.73	9.47	6.16	6.60
31	8.13	4.91	10.41	15.78	6.59	6.61	8.32	8.93	6.28	6.71
32	8.59	5.14	10.94	16.89	6.76	6.69	8.01	8.53	6.49	6.81
33	9.12	5.40	11.46	18.16	6.93	6.80	7.82	8.34	6.77	6.93
34	9.71	5.69	11.93	19.66	7.11	6.94	7.74	8.31	7.08	7.05
35	10.36	6.00	12.37	21.26	7.30	7.09	7.74	8.41	7.40	7.17
36	11.04	6.34	12.81	22.80	7.49	7.26	7.78	8.61	7.73	7.32
37	11.71	6.72	13.30	24.14	7.71	7.42	7.84	8.87	8.11	7.50
38	12.39	7.15	13.86	25.11	7.95	7.56	7.89	9.21	8.56	7.72
39	13.07	7.60	14.56	25.70	8.18	7.68	7.90	9.67	9.07	7.95
40	13.76	8.09	15.38	26.07	8.41	7.80	7.93	10.23	9.59	8.17
41	14.46	8.62	16.30	26.40	8.69	7.93	8.01	10.78	10.15	8.32
42	15.19	9.19	17.25	26.87	9.00	8.10	8.19	11.27	10.74	8.43
43	15.94	9.80	18.18	27.60	9.35	8.29	8.51	11.57	11.40	8.52
44	16.66	10.43	19.07	28.44	9.72	8.49	8.98	11.65	12.11	8.66
45	17.38	11.10	19.90	29.37	10.12	8.70	9.56	11.64	12.82	8.92
46	18.17	11.82	20.72	30.44	10.58	8.97	10.19	11.68	13.51	9.33
47	19.12	12.62	21.57	31.70	11.16	9.35	10.84	11.96	14.26	9.90
48	20.26	13.52	22.50	33.17	11.87	9.86	11.47	12.61	15.14	10.58
49	21.58	14.50	23.51	34.83	12.70	10.47	12.03	13.53	16.20	11.29

Tabelle I (Fortsetzung).

Alter x	Männer				Frauen				Gesamtbevölkerung	
	ledig	verheiratet	verwitwet	geschieden	ledig	verheiratet	verwitwet	geschieden	Männer	Frauen
50	23.04	15.55	24.59	36.66	13.63	11.17	12.60	14.66	17.39	12.03
51	24.59	16.68	25.71	38.67	14.64	11.98	13.25	15.95	18.69	12.80
52	26.19	17.89	26.91	40.84	15.73	12.90	14.05	17.36	20.02	13.66
53	27.77	19.16	28.21	43.14	16.86	13.92	15.05	18.82	21.42	14.64
54	29.33	20.48	29.59	45.53	17.98	15.00	16.17	20.34	22.89	15.74
55	30.93	21.86	31.00	48.07	19.16	16.18	17.42	21.97	24.38	16.99
56	32.65	23.37	32.48	50.87	20.48	17.53	18.83	23.76	25.97	18.44
57	34.62	25.04	34.11	53.98	22.05	19.09	20.45	25.80	27.78	20.12
58	36.88	26.90	36.02	57.67	23.90	20.89	22.26	28.06	29.92	22.00
59	39.32	28.91	38.23	62.14	25.94	22.92	24.18	30.45	32.30	24.05
60	41.95	31.06	40.68	67.09	28.19	25.14	26.27	33.03	34.80	26.21
61	44.85	33.40	43.35	71.96	30.70	27.58	28.64	35.91	37.33	28.61
62	48.10	35.98	46.30	76.30	33.54	30.27	31.41	39.26	39.95	31.40
63	51.71	38.80	49.56	79.17	36.72	33.18	34.63	43.10	42.83	34.66
64	55.62	41.81	53.14	79.90	40.18	36.29	38.26	47.27	46.08	38.30
65	59.85	45.03	57.02	79.67	43.94	39.62	42.27	51.83	49.75	42.20
66	64.45	48.52	61.18	80.39	48.08	43.24	46.65	56.96	53.80	46.30
67	69.48	52.34	65.72	83.76	52.66	47.19	51.42	62.88	58.25	50.60
68	74.92	56.49	70.69	91.69	57.67	51.54	56.53	69.60	63.07	55.33
69	80.71	60.90	76.00	104.61	62.98	56.32	61.89	76.89	68.28	60.59
70	86.89	65.62	81.38	120.61	68.69	61.45	67.60	84.86	73.87	66.39
71	93.61	70.73	87.06	137.37	74.97	66.88	73.84	93.84	79.80	72.68
72	101.02	76.36	93.54	152.61	82.02	72.56	80.77	104.23	86.16	79.47
73	109.14	82.63	101.27	163.35	89.96	78.38	88.50	115.87	93.18	87.03
74	117.84	89.58	110.69	168.45	98.73	84.25	96.96	128.10	101.09	95.54
75	127.16	97.09	121.84	171.18	108.19	90.33	106.11	141.41	110.20	104.91
76	137.37	104.99	134.33	175.86	118.02	96.84	115.99	157.07	120.68	114.78
77	148.71	113.11	147.83	186.72	127.65	104.02	126.64	176.28	132.68	125.08
78	161.37	121.31	161.94	207.20	136.90	112.04	138.04	200.12	146.04	135.98
79	175.42	129.56	176.34	238.32	146.14	120.95	150.24	229.02	160.30	147.80
80	190.82	137.96	190.99	278.90	155.96	130.66	163.28	262.83	175.10	161.01
81	207.36	146.72	206.14	325.15	167.06	140.96	177.21	300.77	190.08	175.43
82	224.71	156.25	222.28	367.51	180.05	151.36	192.10	340.45	205.37	190.72
83	242.56	166.58	240.36	407.33	196.07	161.86	207.97	383.52	220.97	206.62
84	260.80	177.06	260.96		217.78	173.17	225.09	433.39	237.15	223.09

Die Heiratsintensität ϱ_x (bzw. Ehescheidungsintensität) in der schweiz. Bevölkerung 1901/10 (tausendfach, 1000 ϱ_x).

Tabelle II.

Alter x	Männer			Frauen			Tausendfache Ehescheidungsintensität	
	ledig	verwitwet	geschieden	ledig	verwitwet	geschieden	Männer	Frauen
20	8.38	39.76		46.28	81.98	166.88	0.85	2.14
21	23.33	68.55	3.12	66.49	99.59	176.65	2.20	2.36
22	39.75	103.06	52.75	87.41	115.61	182.12	2.83	2.59
23	55.84	142.67	126.75	105.50	126.47	183.26	3.02	2.81
24	73.10	184.65	195.70	118.73	131.20	182.98	3.15	3.00
25	91.99	222.50	235.48	125.53	130.91	182.95	3.26	3.16
26	108.01	252.11	255.11	125.31	127.21	182.08	3.30	3.26
27	118.98	271.00	259.55	121.98	121.90	179.65	3.29	3.31
28	123.73	278.87	255.52	115.86	116.85	175.50	3.28	3.32
29	122.38	278.03	250.64	106.04	112.47	169.70	3.27	3.31
30	116.48	272.18	247.92	94.94	107.84	162.64	3.25	3.29
31	108.24	264.98	243.91	83.03	102.66	154.86	3.20	3.25
32	99.90	258.24	237.85	72.95	96.75	146.93	3.15	3.19
33	92.38	249.58	229.28	64.57	90.16	139.08	3.12	3.10
34	84.20	238.17	218.37	56.73	83.17	130.97	3.11	3.02
35	75.02	225.74	205.93	49.45	76.15	122.49	3.10	2.95
36	65.96	213.32	193.10	42.87	69.45	113.90	3.07	2.86
37	57.81	201.51	180.96	37.05	63.23	105.38	3.03	2.75
38	51.07	189.54	170.08	32.14	57.25	96.85	2.96	2.65
39	45.37	177.15	159.87	28.19	51.44	87.95	2.88	2.56
40	40.32	164.82	149.88	25.02	45.94	78.92	2.78	2.48
41	35.83	152.88	140.40	22.34	40.87	70.34	2.68	2.41
42	31.73	141.47	131.42	19.85	36.32	62.68	2.59	2.34
43	28.00	130.13	123.05	17.42	32.21	56.33	2.50	2.28
44	24.76	119.05	115.23	15.23	28.50	51.26	2.43	2.20
45	22.00	108.43	107.84	13.33	25.13	46.99	2.36	2.12
46	19.55	98.60	100.89	11.64	22.02	43.15	2.29	2.05
47	17.29	89.52	94.36	10.07	19.19	39.42	2.21	1.97
48	15.16	81.08	88.16	8.60	16.67	35.53	2.11	1.88
49	13.24	73.38	82.26	7.27	14.45	31.61	2.00	1.80

Tabelle II (Fortsetzung).

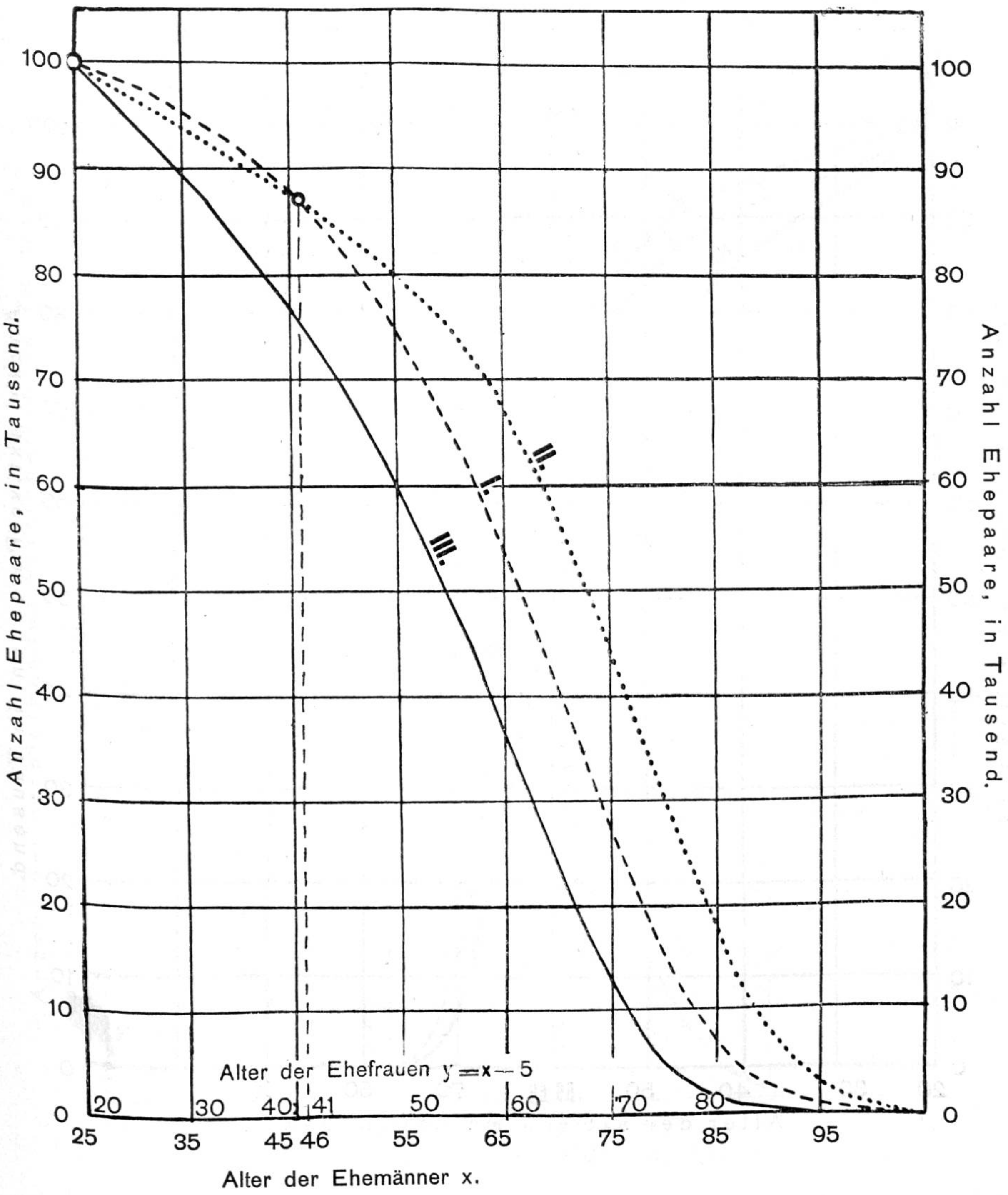
Alter x	Männer			Frauen			Tausendfache Ehescheidungs-intensität	
	ledig	verwitwet	geschieden	ledig	verwitwet	geschieden	Männer	Frauen
50	11.56	66.14	76.83	6.10	12.48	27.84	1.88	1.70
51	10.06	59.52	71.69	5.06	10.68	24.28	1.75	1.60
52	8.73	53.76	66.63	4.14	9.07	21.00	1.64	1.49
53	7.53	48.77	61.95	3.36	7.68	17.93	1.54	1.37
54	6.50	44.35	57.68	2.74	6.50	15.05	1.45	1.25
55	5.64	40.68	53.60	2.25	5.48	12.39	1.35	1.15
56	4.89	37.00	49.64	1.85	4.60	10.03	1.26	1.05
57	4.24	33.37	45.56	1.53	3.83	8.07	1.18	0.95
58	3.65	30.12	40.89	1.26	3.22	6.65	1.09	0.85
59	3.18	27.11	35.77	1.06	2.76	5.84	1.01	0.77
60	2.80	24.32	30.42	0.95	2.39	5.48	0.93	0.69
61	2.49	21.59	25.40	0.87	2.06	5.34	0.85	0.62
62	2.20	18.99	21.02	0.79	1.73	5.10	0.79	0.56
63	1.91	16.53	17.92	0.67	1.44	4.62	0.75	0.50
64	1.61	14.50	16.09	0.52	1.23	3.94	0.71	0.45
65	1.33	12.79	15.01	0.35	1.03	3.11	0.68	0.43
66	1.10	10.83	14.54	0.20	0.86	2.43	0.66	0.41
67	0.98	8.95	13.48	0.12	0.72	2.13	0.62	0.39
68	0.97	7.75	11.52	0.10	0.58	1.95	0.58	0.37
69	0.98	6.65	9.63	0.10	0.48	1.72	0.52	0.35
70	0.96	5.33	7.89	0.10	0.39	1.55	0.46	0.35
71	0.84	4.58	6.98	0.11	0.30	1.33	0.40	0.33
72	0.62	3.71	6.19	0.11	0.21	1.11	0.34	0.30
73	0.36	2.73	4.86	0.10	0.15	0.92	0.30	0.25
74	0.16	2.28	3.84	0.07	0.11	0.73	0.28	0.18
75	0.03	1.96	2.75	0.03	0.09	0.51	0.26	0.12

Graphische Darstellung 1.

Die Ausscheideordnung der Ehepaare.

Verlauf der Ausscheideordnung der Ehepaare:

I. wenn nur die Sterbeintensität der Männer wirken würde,
II. wenn nur die Sterbeintensität der Frauen wirken würde,
III. wenn beide Sterbeintensitäten wirken.



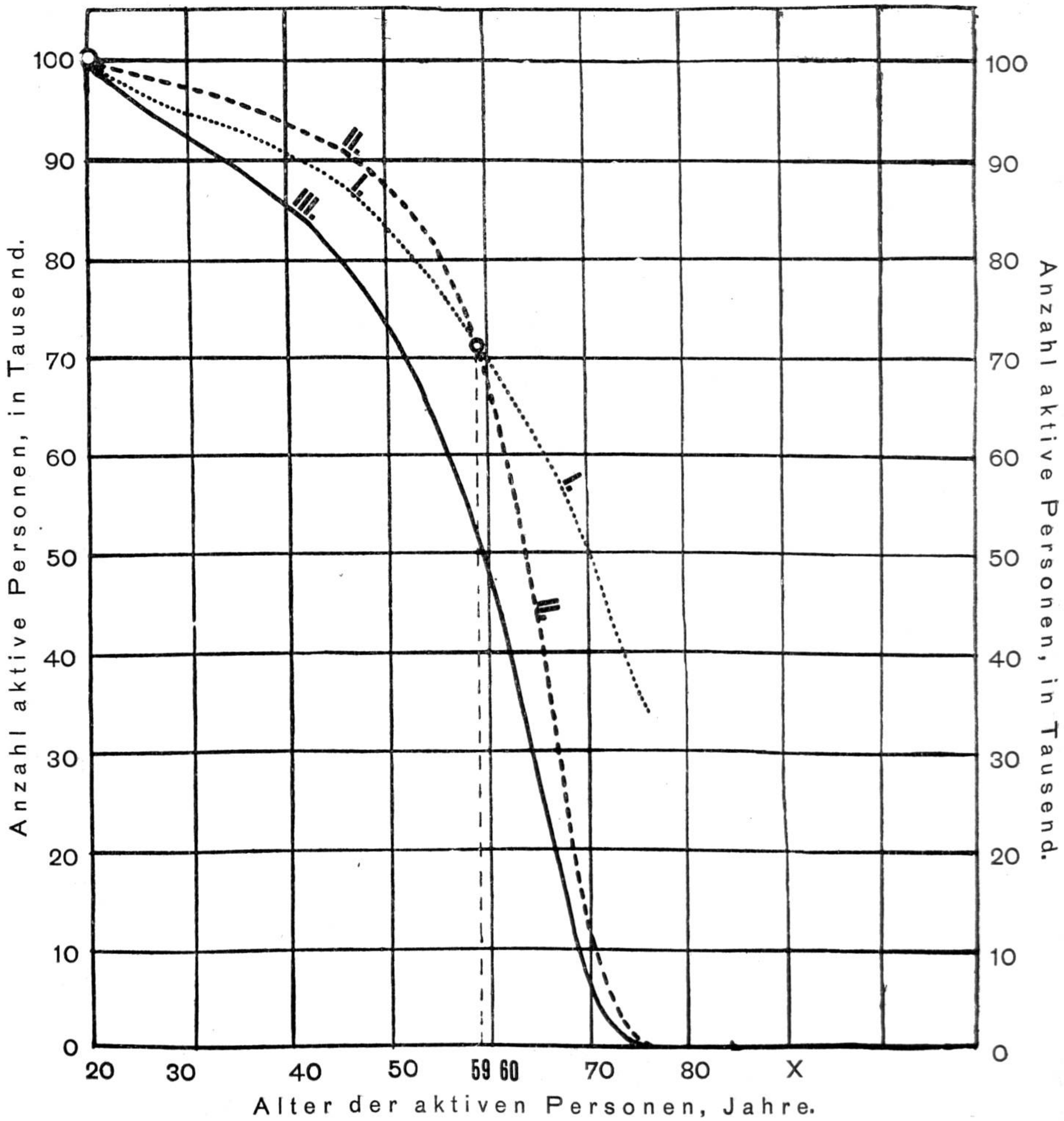
Alter, Jahre.

Graphische Darstellung 2.

Die Aktivitätsordnung.

Verlauf der Ausscheideordnung:

I. wenn nur die Sterbeintensität der Aktiven wirken würde,
II. wenn nur die Invaliditätsintensität wirken würde,
III. wenn die Sterbe- und Invaliditätsintensitäten wirken (Aktivitätsordnung).

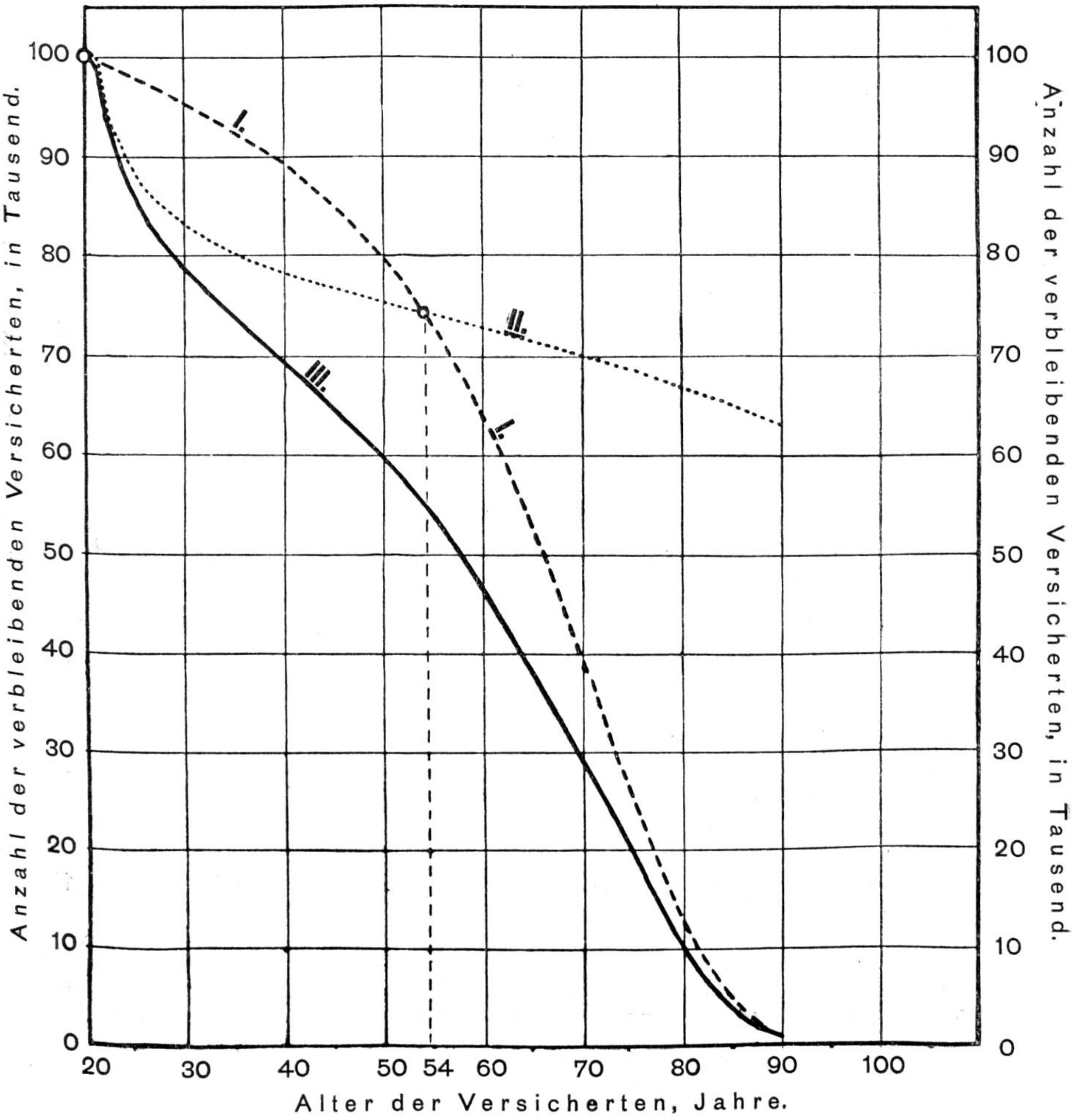


Graphische Darstellung 3.

Die Dekremententafel der Versicherten.

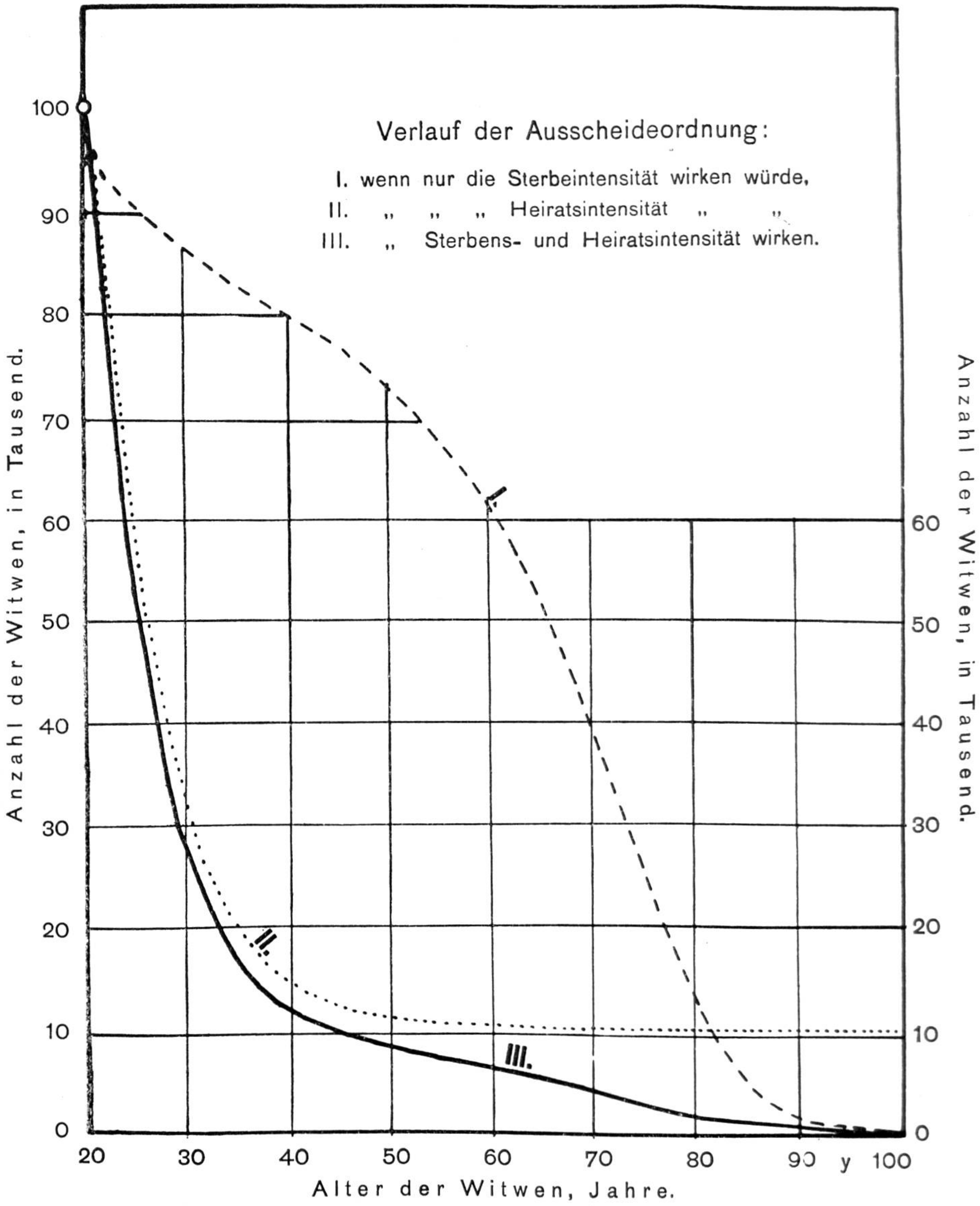
Verlauf der Dekremententafel, ausgehend von 100 000 Versicherten, vom Alter 20:

I. wenn nur die Sterbeintensität wirken würde,
II. wenn nur die Stornointensität wirken würde,
III. wenn beide Abgangsursachen wirken.



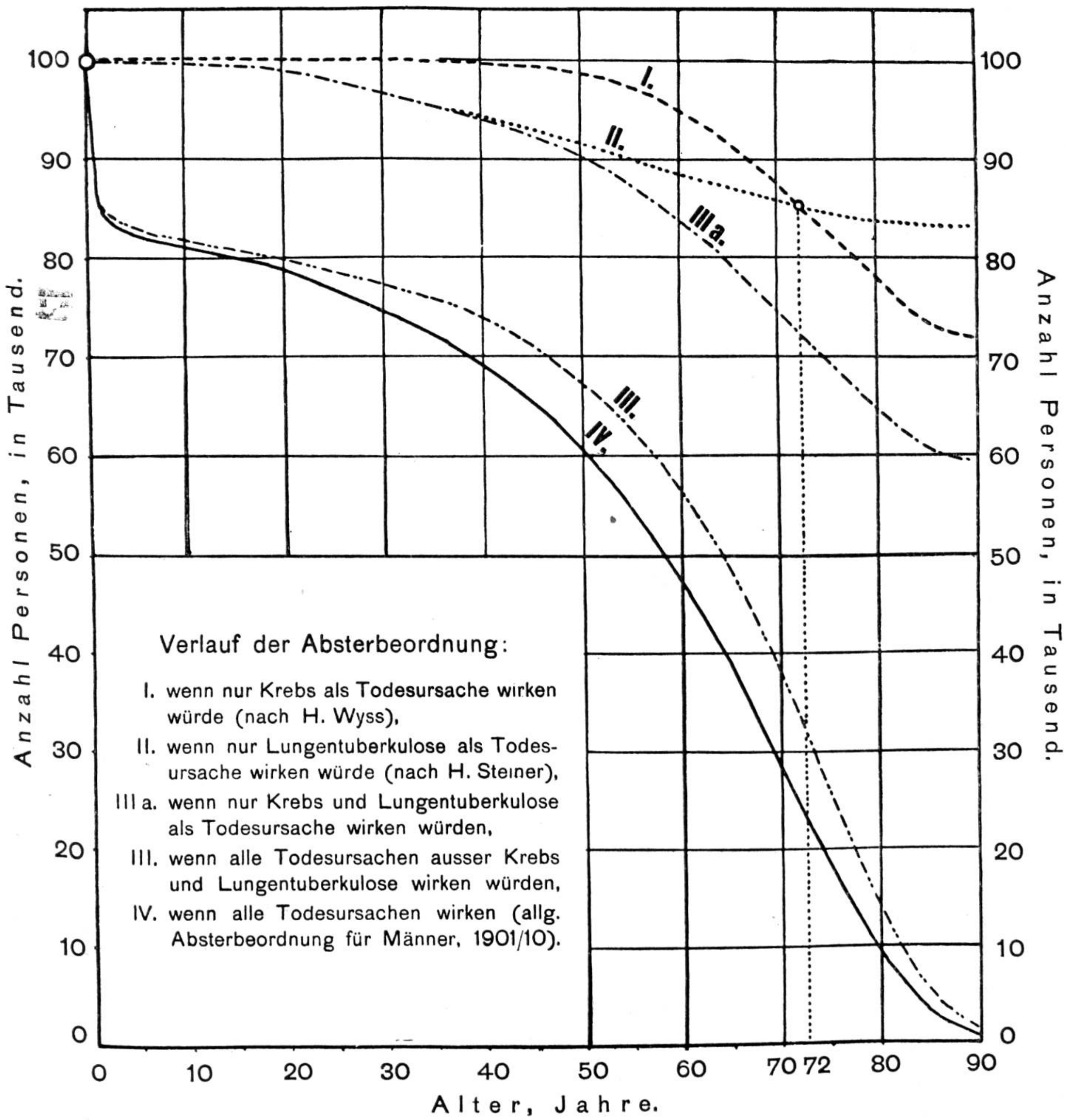
Graphische Darstellung 4.

Die Ausscheideordnung der Witwen.



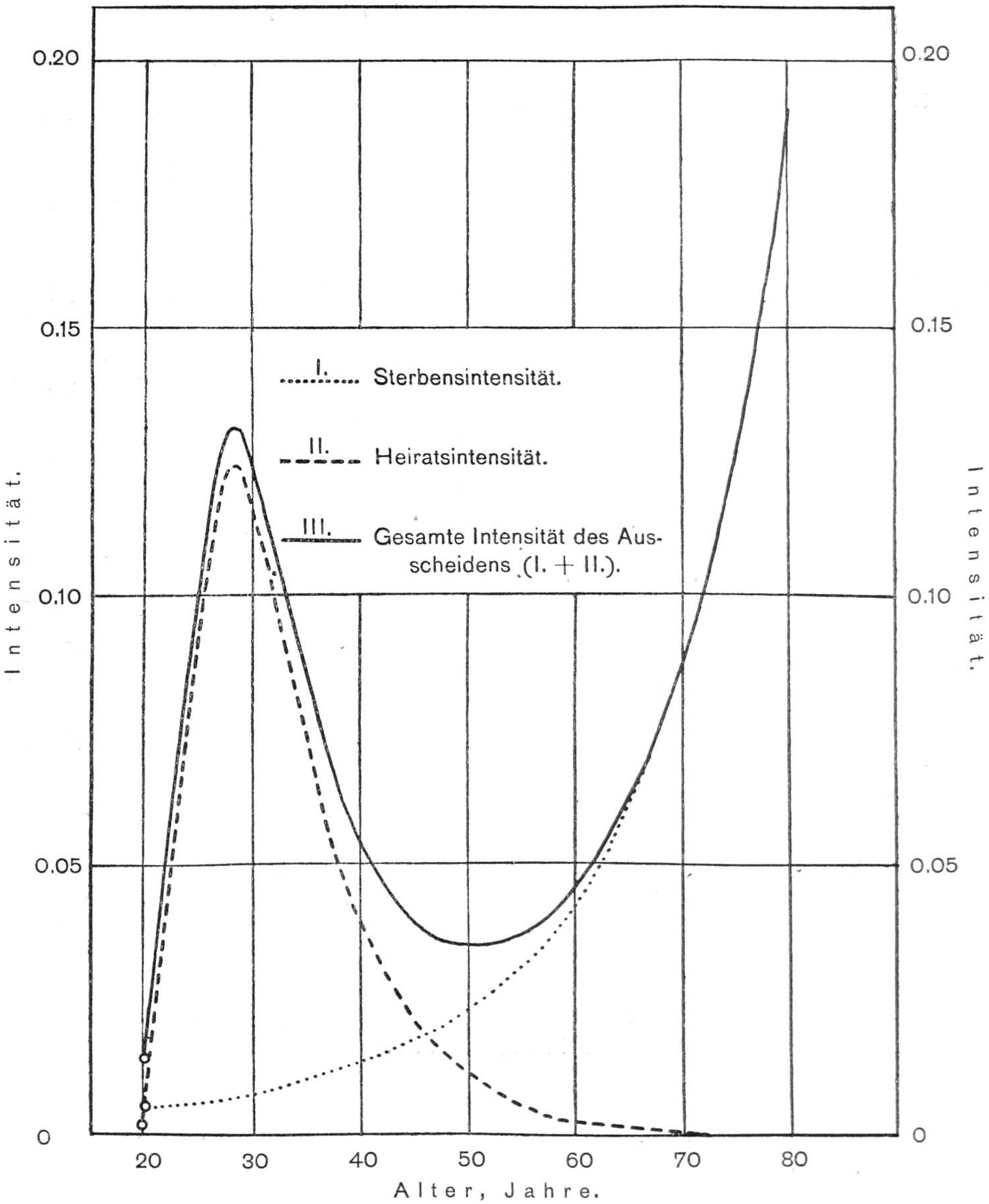
Graphische Darstellung 5.

Die Absterbeordnung der schweizerischen männlichen Bevölkerung 1901/10.



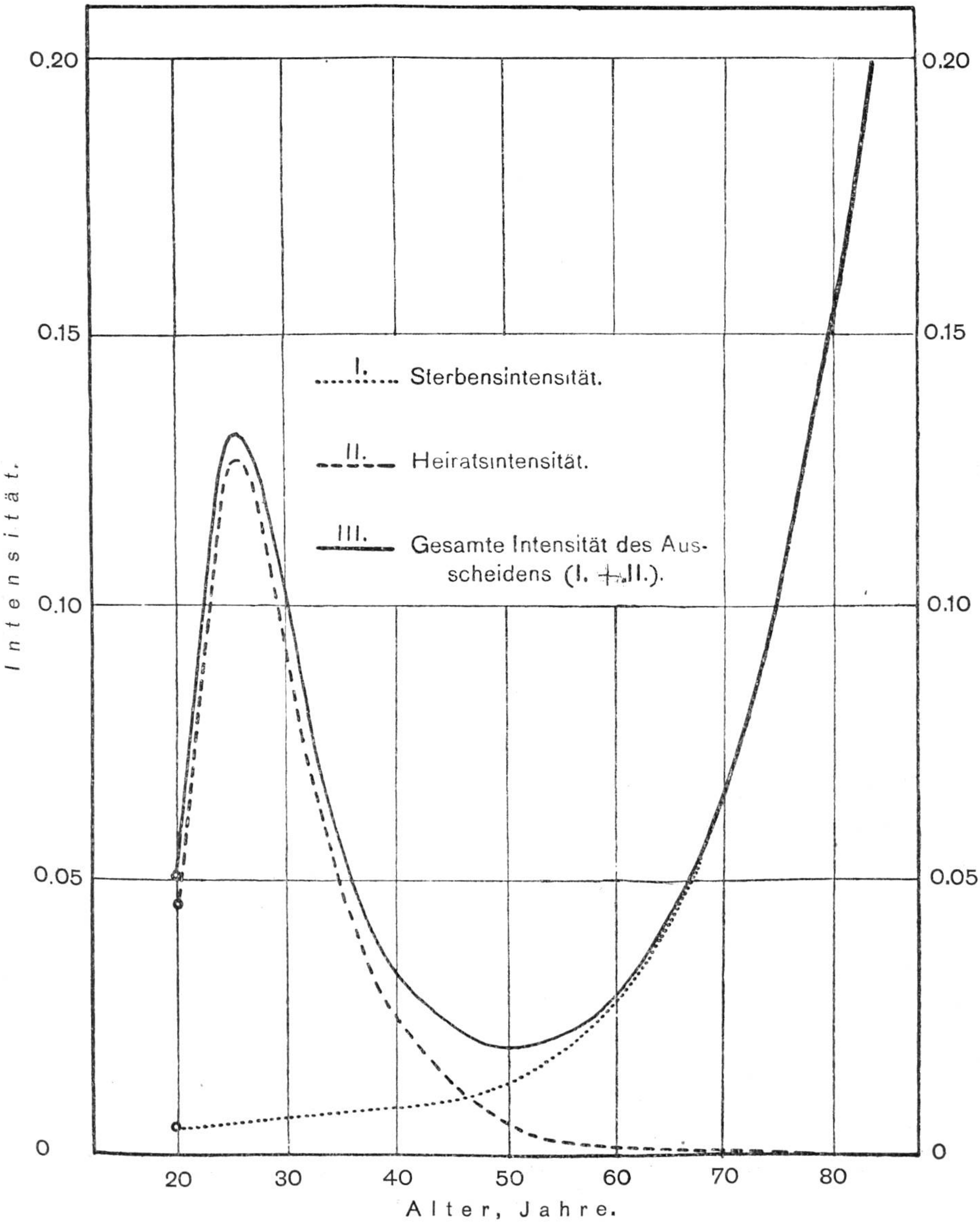
Graphische Darstellung 6 a.

Die Ausscheideintensitäten der ledigen Männer.



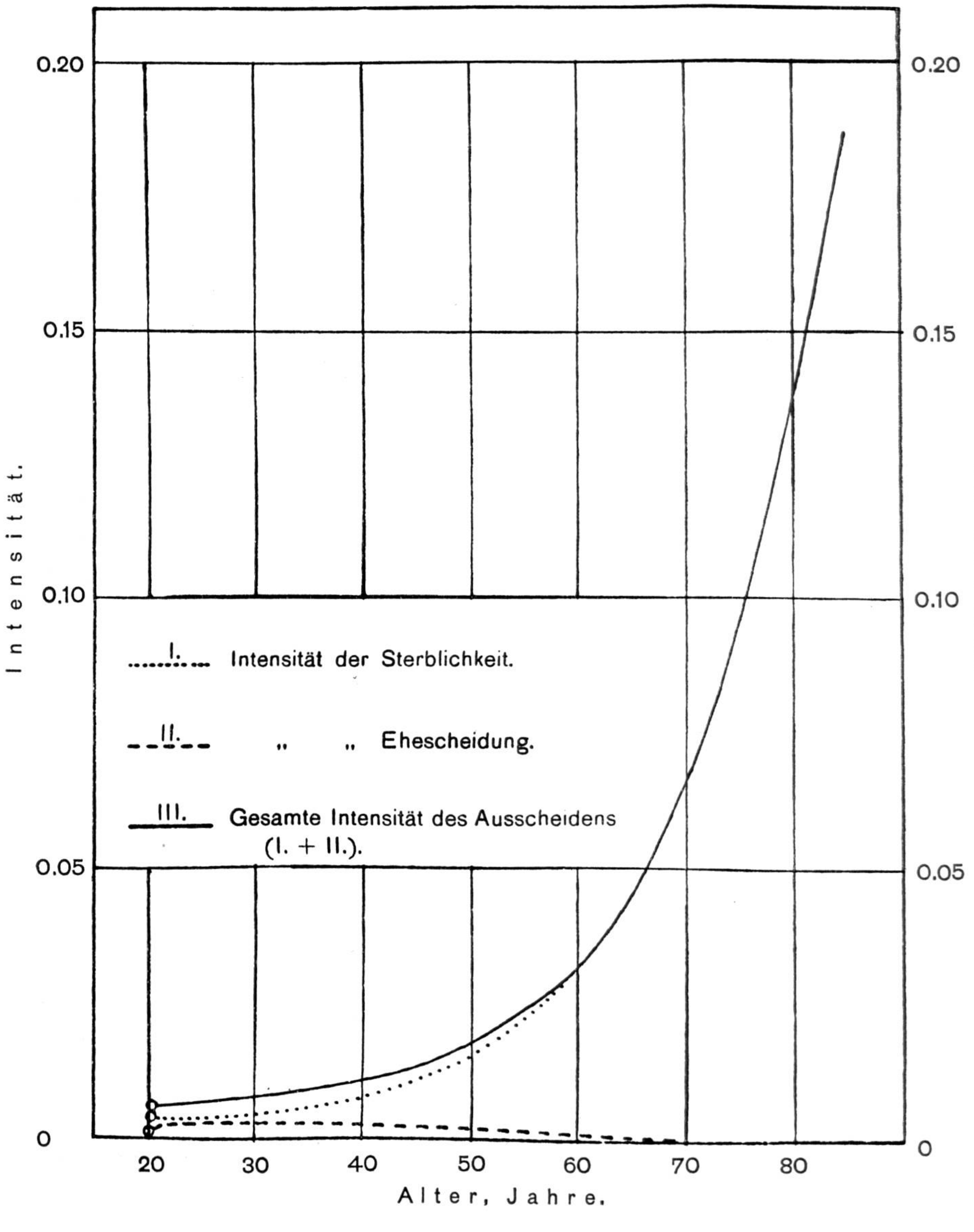
Graphische Darstellung 6 b.

Die Ausscheideintensitäten der ledigen Frauen.



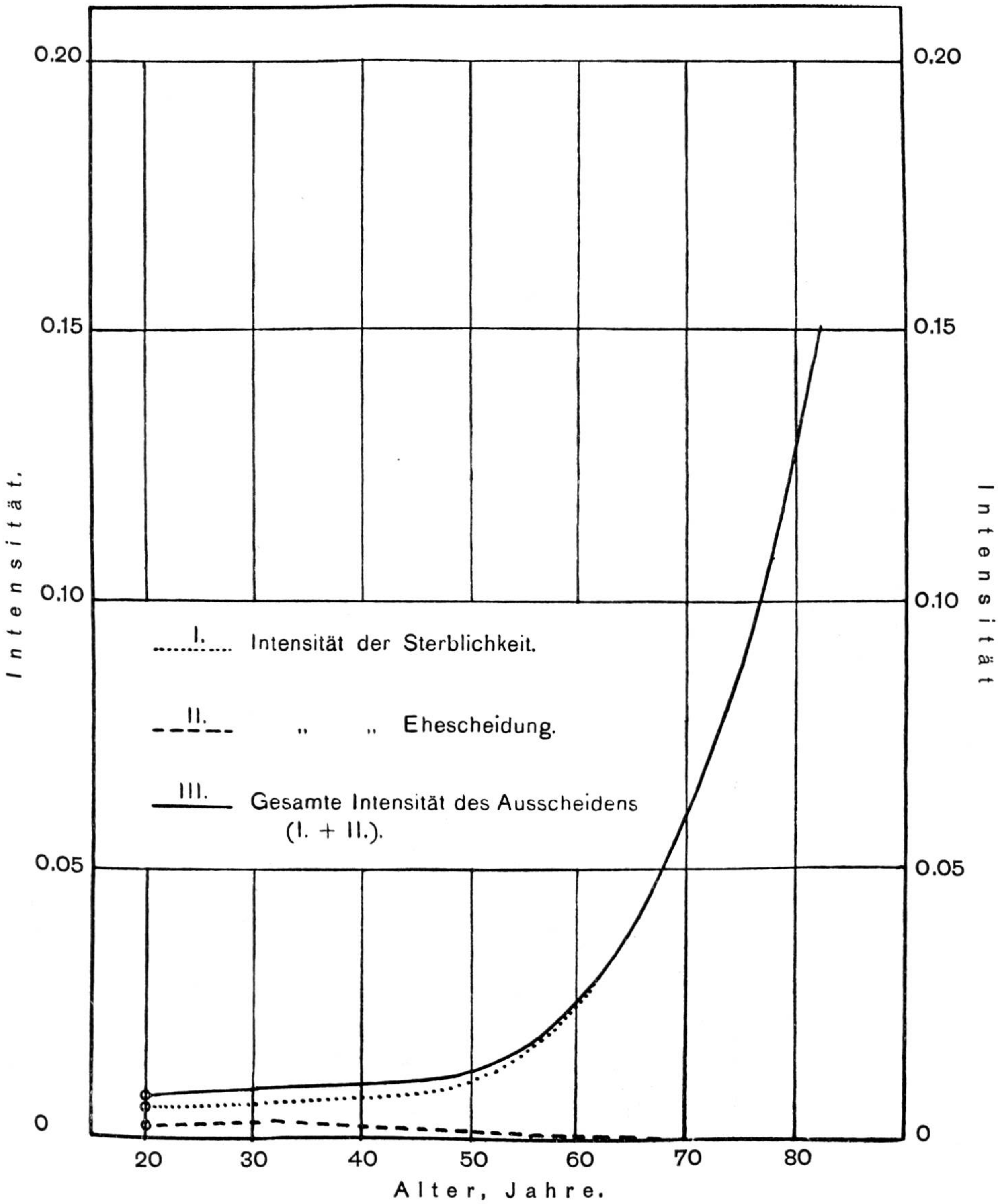
Graphische Darstellung 7 a.

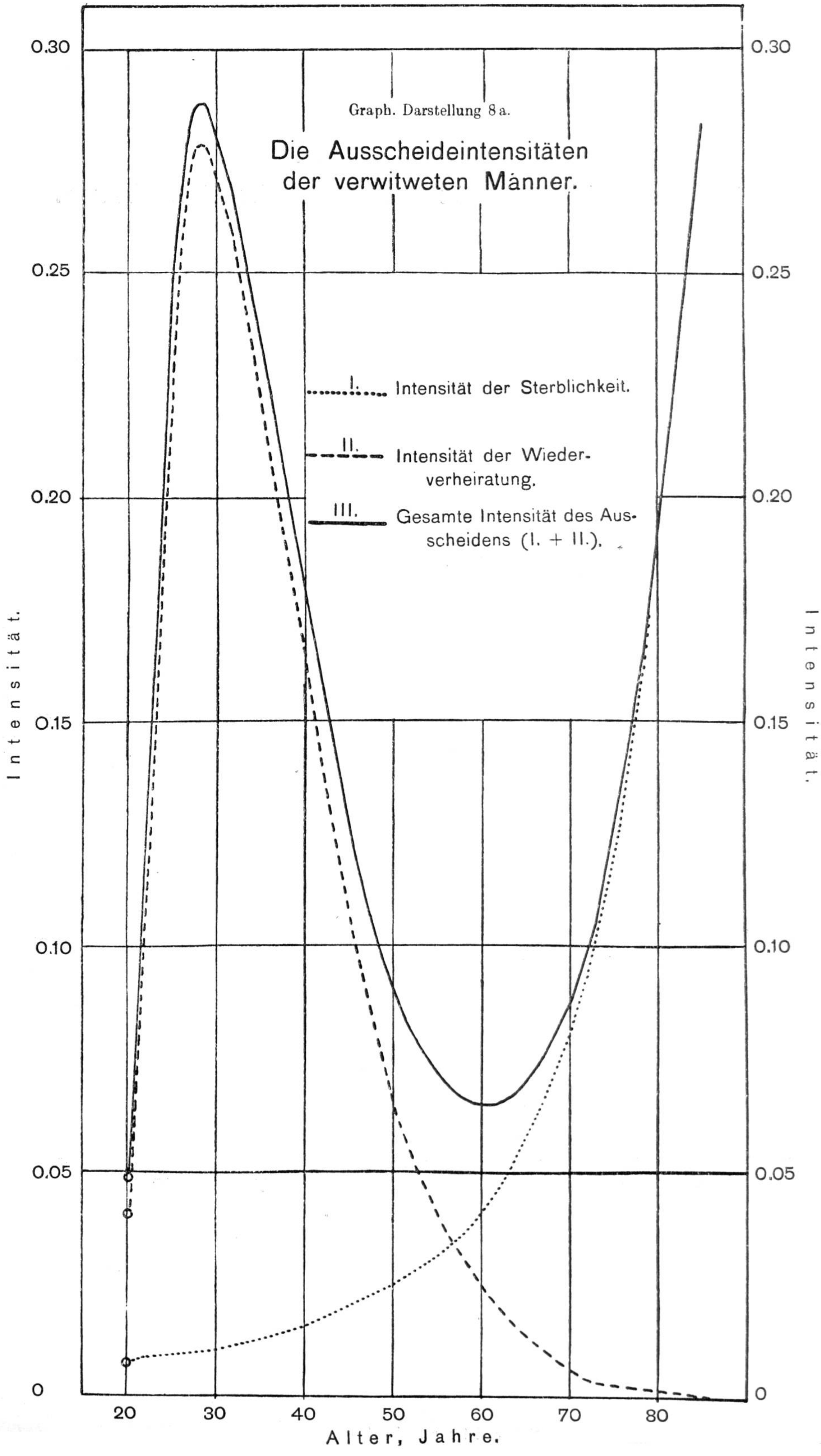
Die Ausscheideintensitäten der verheirateten Männer.



Graphische Darstellung 7 b.

Die Ausscheideintensitäten der verheirateten Frauen.

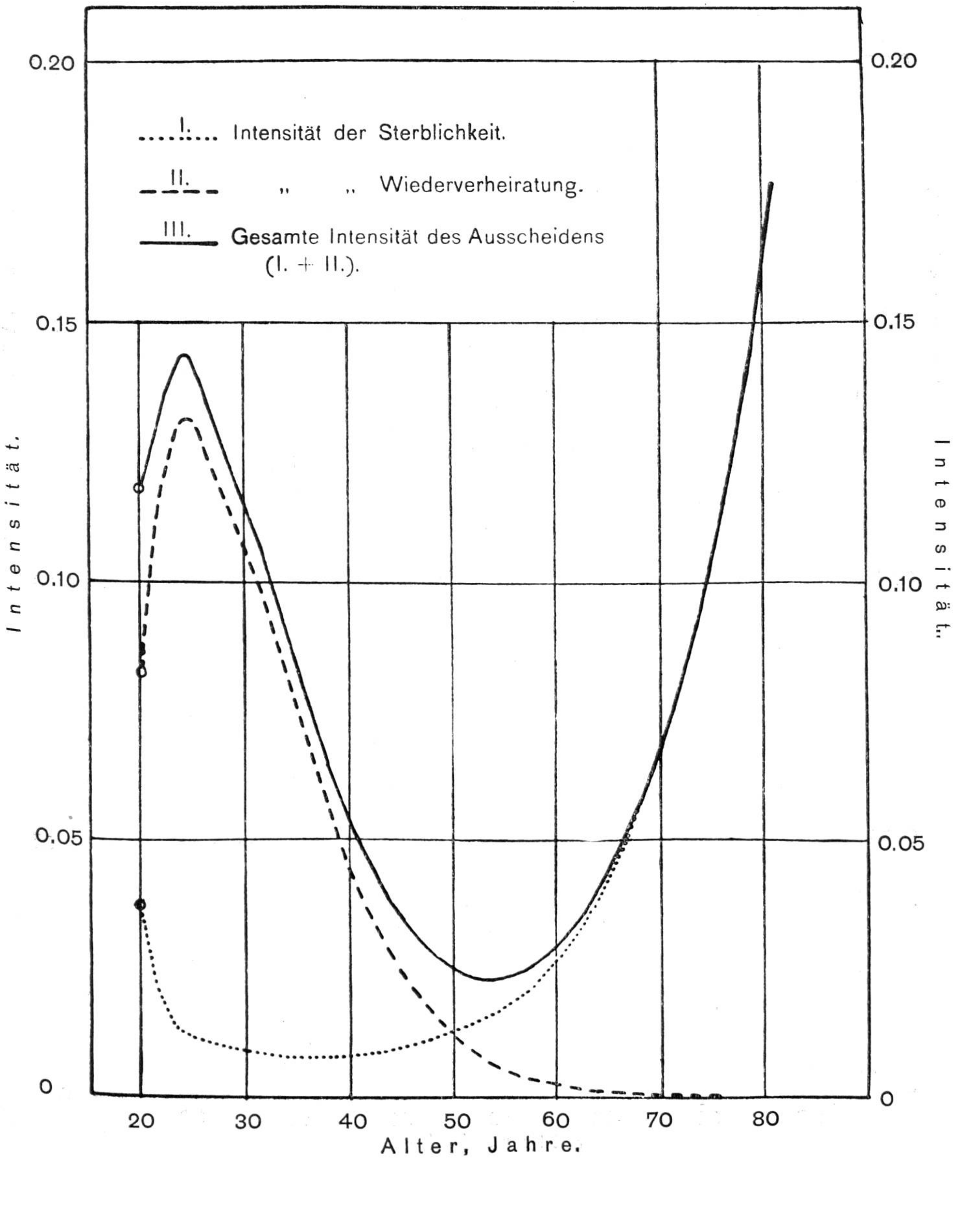


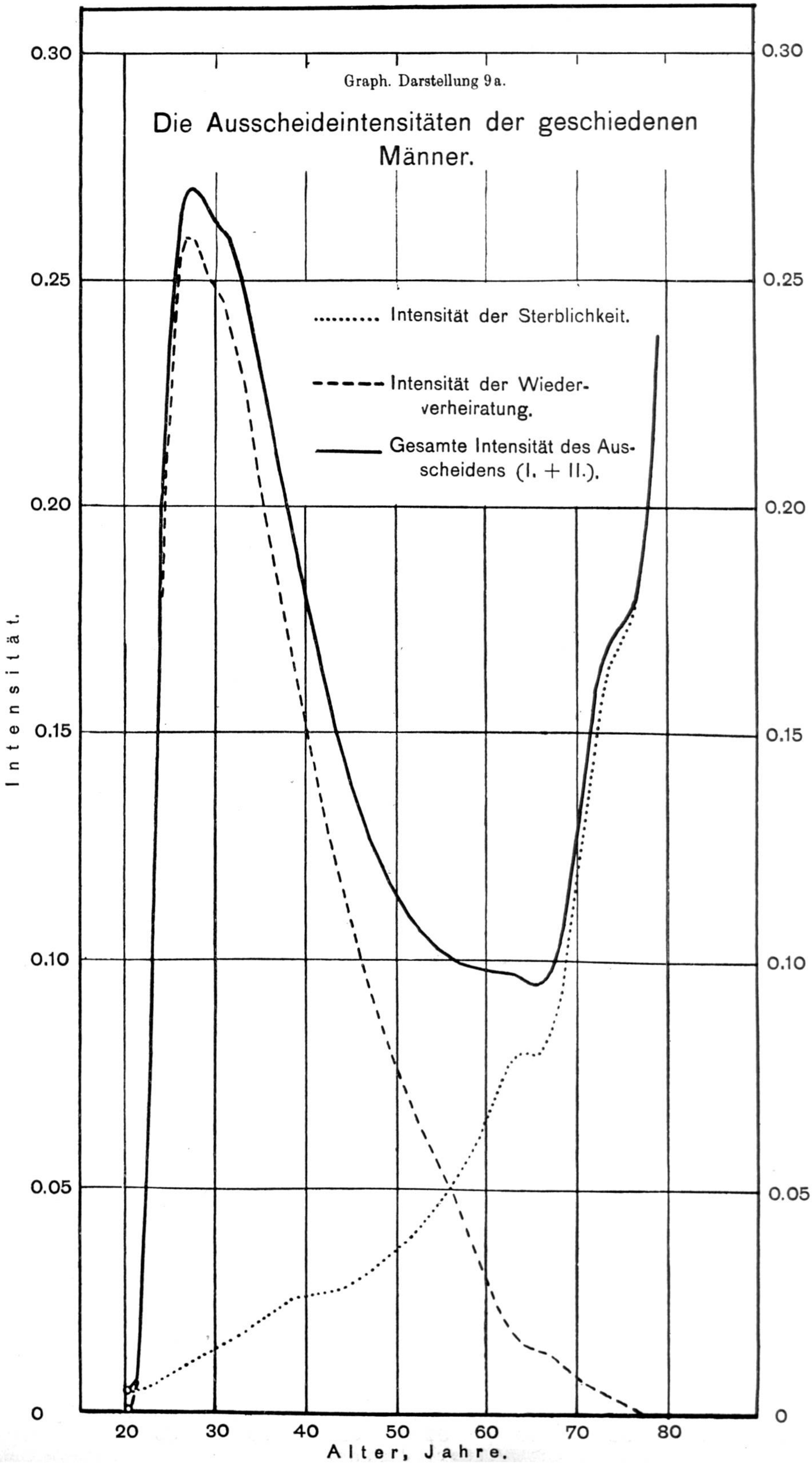


Graph. Darstellung 8a.
Die Ausscheideintensitäten der verwitweten Männer.
I. Intensität der Sterblichkeit.
II. Intensität der Wiederverheiratung.
III. Gesamte Intensität des Ausscheidens (I. + II.).
0.30
0.25
0.20
0.15
0.10
0.05
0
Intensität.
20
30
40
50
60
70
80
Alter, Jahre.

Graphische Darstellung 8 b.

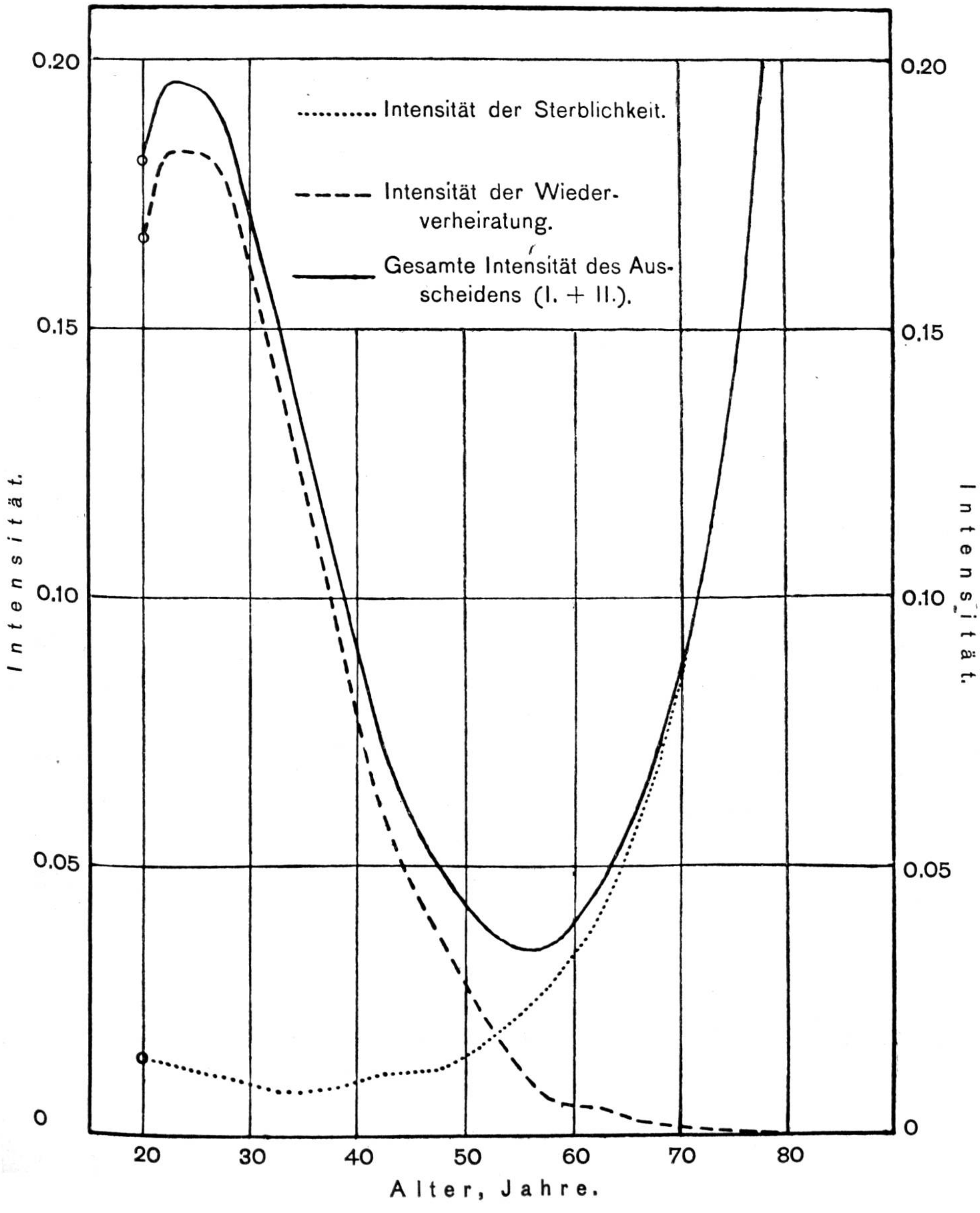
Die Ausscheideintensitäten der verwitweten Frauen.




Graph. Darstellung 9 a.
Die Ausscheideintensitäten der geschiedenen Männer.
Intensität der Sterblichkeit.
Intensität der Wiederverheiratung.
Gesamte Intensität des Ausscheidens (I. + II.).
0.30
0.25
0.20
0.15
0.10
0.05
0
Intensität.
20
30
40
50
60
70
80
Alter, Jahre.

Graphische Darstellung 9 b.

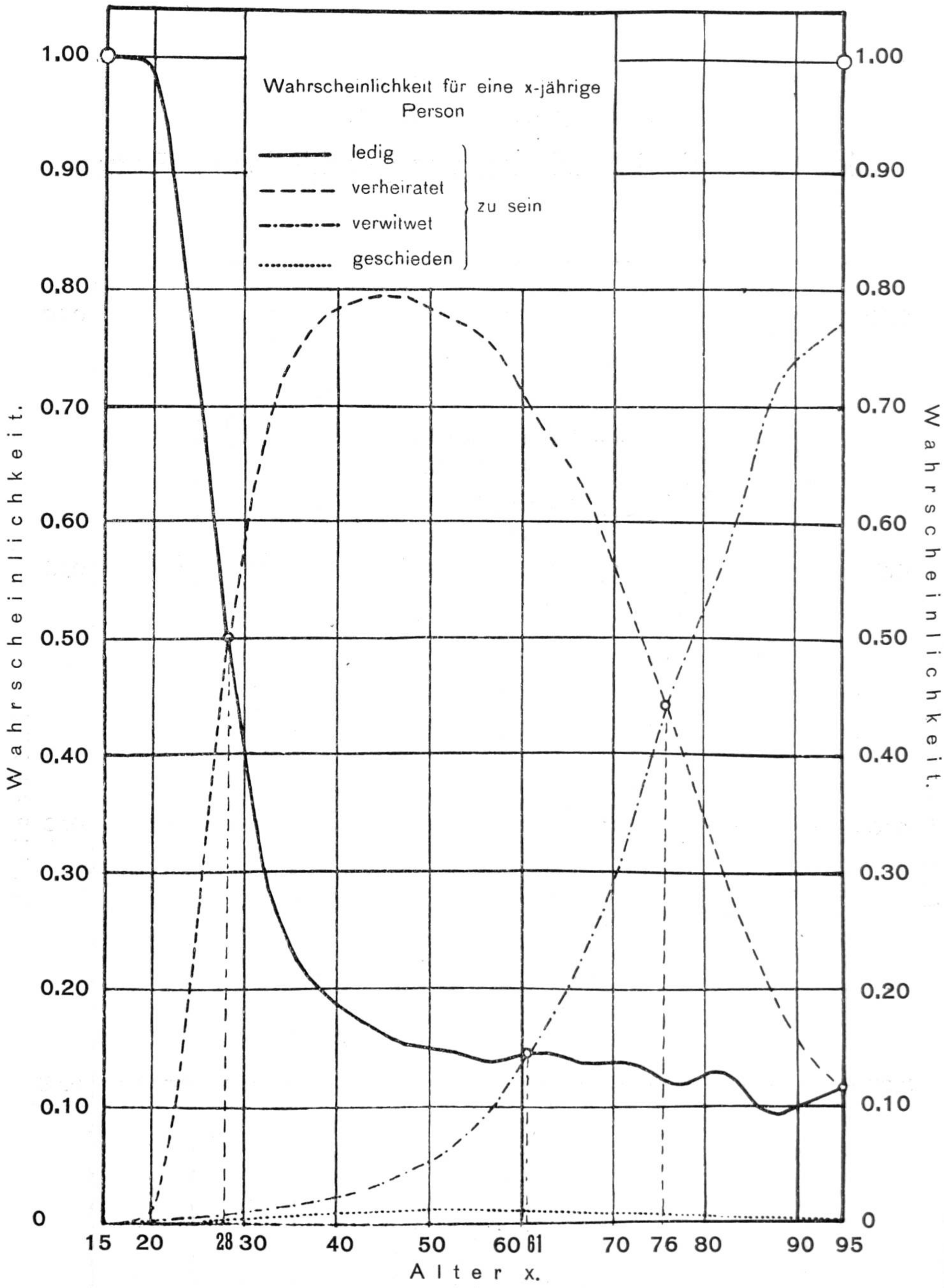
Die Ausscheideintensitäten der geschiedenen Frauen.



Graphische Darstellung 10 a.

Die Zivilstandsgliederung der schweiz. Bevölkerung in den verschiedenen Altersstufen Ende 1910.

Männer.



Graphische Darstellung 10 b.

Die Zivilstandsgliederung der schweiz. Bevölkerung in den verschiedenen Altersstufen Ende 1910.

Frauen.