Die Sterblichkeit anormaler Risiken beim Zusammenwirken mehrerer Minderwertigkeitsursachen

Autor(en): **Göring, Emil**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **25 (1930)**

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-967494

Die Sterblichkeit anormaler Risiken beim Zusammenwirken mehrerer Minderwertigkeitsursachen.

Von Dr. **Emil Göring**, Köln.

a) Die Zusammensetzung von Absterbeordnungen durch Addition von Sterblichkeitsintensitäten.

Die Zusammensetzung von Absterbeordnungen, wie sie Herr Dr. W. Friedli, Bern — in seinem Aufsatz: «Intensitätsfunktion und Zivilstand» (Mitteilungen schweizerischer Versicherungsmathematiker, 21. Heft 1926) —, und Herr Dr. Hans Wyss, Bern — in seinem Aufsatz: «Die Krebssterblichkeit in der Schweiz» (22. Heft 1927 derselben Zeitschrift) —, behandelt haben, lässt sich u. a. für die Untersuchung der Sterblichkeit anormaler Risiken beim Zusammenwirken mehrerer Minderwertigkeitsursachen anwenden.

Die dem anormalen Risiko entsprechende Sterblichkeit werde für jedes Lebensalter y durch die Sterblichkeitsintensität μ_y^* gemessen. Auf das anormale Risiko sollen zunächst die Sterblichkeitsursachen des normalen Risikos einwirken, diese würden die Sterblichkeitsintensität μ_y ergeben. Dann sollen mehrere Minderwertigkeitsursachen vorliegen, deren Anzahl wir der Einfachheit halber auf zwei beschränken wollen. Der ersten derselben entspreche eine zusätzliche Sterblichkeitsintensität $\mu_y^{(1)}$ und der zweiten eine zusätzliche Intensität $\mu_y^{(2)}$.

Den Ausführungen der beiden genannten Aufsätze entsprechend addieren sich dann die Intensitäten der verschiedenen zusammenwirkenden Sterblichkeitsursachen; es ist also

$$\mu_y^* = \mu_y + \mu_y^{(1)} + \mu_y^{(2)}. \tag{1}$$

Der Intensität μ_y^* sei zugeordnet die Zahl der Lebenden l_y^* und die einjährige Sterbenswahrscheinlichkeit q_y^*, den Intensitäten μ_y, $\mu_y^{(1)}$ und $\mu_y^{(2)}$ die analogen Grössen l_y, q_y; $l_y^{(1)}$, $q_y^{(1)}$ und $l_y^{(2)}$, $q_y^{(2)}$. Dann folgt nach den aufgeführten Aufsätzen aus Gleichung 1:

$$l_y^* = \varphi\, l_y\, l_y^{(1)}\, l_y^{(2)} \qquad \text{und} \tag{2}$$

$$1-q_y^* = (1-q_y)\,(1-q_y^{(1)})\,(1-q_y^{(2)}). \tag{3}$$

Die Konstante φ in Gleichung (2) hängt vom Werte $l_{y_0}^*$ ab, wo y_0 das Anfangsalter bedeutet. Man kann selbstverständlich $l_{y_0}^*$ stets so bestimmen, dass $\varphi = 1$ wird. Es ist dann einfach

$$l_y^* = l_y\, l_y^{(1)}\, l_y^{(2)}. \tag{2a}$$

Wenn weiter auf ein anormales Risiko ausser den Sterblichkeitsursachen des normalen Risikos mit der Intensität μ_y nur die erste der vorhin angeführten Minderwertigkeitsursachen mit der zusätzlichen Intensität $\mu_y^{(1)}$ einwirkt, so ergebe sich die Sterblichkeitsintensität μ_y^{I}, und wenn an Stelle der ersten die zweite dieser Minderwertigkeitsursachen einwirkt, die Sterblichkeitsintensität μ_y^{II}; dann ergibt sich analog

(4) $$\mu_y^{\mathrm{I}} = \mu_y + \mu_y^{(1)} \text{ und } \mu_y^{\mathrm{II}} = \mu_y + \mu_y^{(2)}.$$

Entsprechen den Intensitäten μ_y^{I} und μ_y^{II} die einjährigen Sterbenswahrscheinlichkeiten q_y^{I} und q_y^{II}, dann ist weiter

(5) $$1-q_y^{\mathrm{I}} = (1-q_y)\,(1-q_y^{(1)}) \text{ und } 1-q_y^{\mathrm{II}} = (1-q_y)\,(1-q_y^{(2)})$$

oder

(5a) $$q_y^{\mathrm{I}} = q_y + q_y^{(1)} - q_y\, q_y^{(1)} \text{ und } q_y^{\mathrm{II}} = q_y + q_y^{(2)} - q_y\, q_y^{(2)}.$$

Die Frage, ob und wie weit die Gleichungen (4) und (1), resp. die Gleichungen (5) und (3) miteinander bestehen, d. h. ob die Zusatzsterblichkeiten, die sich infolge der beiden betrachteten Minderwertigkeitsursachen einstellen, unabhängig voneinander auf das anormale Risiko einwirken, könnte mit Sicherheit nur durch schwierig durchzuführende statistische Untersuchungen, die von versicherungsärztlicher Seite überwacht sind, gelöst werden. Es ist aber anzunehmen, dass diese Unabhängigkeit nur in erster Annäherung und bei kleinen Zusatzsterblichkeiten vorhanden sein wird (vgl. die folgenden Ausführungen). Wir wollen jedoch vorläufig voraussetzen, dass die besagten Gleichungen zusammen anwendbar sind, und eliminieren aus den Gleichungen (1) und (4) die Grössen $\mu_y^{(1)}$ und $\mu_y^{(2)}$, resp. aus den Gleichungen (3) und (5) die Grössen $q_y^{(1)}$ und $q_y^{(2)}$, da nicht diese Grössen, sondern μ_y^{I} und μ_y^{II}, resp. q_y^{I} und q_y^{II} durch Beobachtung und anschliessender Berechnung zu ermitteln sind. Wir erhalten so

(6) $$\mu_y^{*} = \mu_y^{\mathrm{I}} + \mu_y^{\mathrm{II}} - \mu_y$$ und

(7) $$1-q_y^{*} = \frac{(1-q_y^{\mathrm{I}})\,(1-q_y^{\mathrm{II}})}{1-q_y}.$$

b) Gebräuchliche Art der Bestimmung der Sterblichkeit beim Zusammenwirken mehrerer Minderwertigkeitsursachen.

Bis jetzt wird beim Zusammenwirken mehrerer Minderwertigkeitsursachen nach dem gebräuchlichen System der Behandlung anormaler Risiken angenommen, dass die den verschiedenen Minderwertigkeitsursachen entsprechenden Übersterblichkeiten sich addieren, wobei die Sterblichkeiten durch die einjährigen Sterbenswahrscheinlichkeiten gemessen werden, d. h. es wird an Stelle der beiden Gleichungen (6) und (7) die folgende angewandt:

$$(8) \qquad {}^*q_y = q_y + (q_y^{\mathrm{I}} - q_y) + (q_y^{\mathrm{II}} - q_y) \qquad \text{oder}$$

$$(8a) \qquad {}^*q_y = q_y^{\mathrm{I}} + q_y^{\mathrm{II}} - q_y.$$

Hier tritt als einjährige Sterbenswahrscheinlichkeit des anormalen Risikos mit den beiden anfangs eingeführten Minderwertigkeitsursachen die durch die Gleichung (8) resp. (8a) gegebene Grösse ${}^*q_y$ an die Stelle von q_y^*. Die Werte q_y^{I}, q_y^{II} und q_y seien die im vorigen Abschnitte eingeführten Grössen; die Differenzen $q_y^{\mathrm{I}} - q_y$ und $q_y^{\mathrm{II}} - q_y$, durch die jetzt die den beiden Minderwertigkeitsursachen entsprechenden Übersterblichkeiten gemessen werden, können jedoch nicht mit den Werten $q_y^{(1)}$ und $q_y^{(2)}$ des vorigen Abschnittes übereinstimmen, wie die Gleichungen (5a) zeigen. Vergleicht man den Wert ${}^*q_y$ mit dem Werte q_y^*, so erhält man als Differenzbetrag

$${}^*q_y - q_y^* = (1 - q_y^*) - (1 - {}^*q_y) = \frac{(1-q_y^{\mathrm{I}})\,(1-q_y^{\mathrm{II}})}{1-q_y} -$$

$$- [1 - q_y^{\mathrm{I}} - q_y^{\mathrm{II}} + q_y] \qquad \text{oder}$$

(9) $$ {}^*q_y - q_y^* = \frac{(q_y^{\mathrm{I}} - q_y)\,(q_y^{\mathrm{II}} - q_y)}{1 - q_y}. $$

Da nach den Gleichungen (5a) $q_y^{\mathrm{I}} > q_y$ und $q_y^{\mathrm{II}} > q_y$ ist, was sich auch aus der Art dieser Grössen ergibt, so folgt aus Gleichung (9):

(10) $$ {}^*q_y > q_y^*. $$

Entsprechen den einjährigen Sterbenswahrscheinlichkeiten ${}^*q_y$ für alle Alter y die Sterblichkeitsintensitäten ${}^*\mu_y$, wie die Grössen q_y^* und μ_y^* einander entsprechen, so folgt aus Gleichung (10) auch

(11) $$ {}^*\mu_y > \mu_y^*, $$

soweit wir annehmen dürfen, dass grössern einjährigen Sterbenswahrscheinlichkeiten auch grössere Sterblichkeitsintensitäten entsprechen.

Was sagt nun diese Beziehung (11) über die Zulässigkeit, für die Zusammensetzung der Sterblichkeiten die Formel (8), resp. (8a) an Stelle der Formeln (6) und (7) anzuwenden?

Es ist zu vermuten, dass die zusätzliche Intensität $\mu_y^{(2)}$, die der zweiten Minderwertigkeitsursache entspricht, grösser sein wird, wenn sie in Formel (1) zur schon erhöhten Sterblichkeitsintensität $(\mu_y + \mu_y^{(1)})$ hinzukommt, als wenn sie in der zweiten Formel (4) der Intensität μ_y der normalen Sterblichkeit zugefügt wird. Deshalb wird die faktisch eintretende Sterblichkeitsintensität beim Vorliegen von zwei Minderwertigkeitsursachen höher als der durch die Formel (1) berechnete Wert μ_y^* sein, wenn die Werte $\mu_y^{(1)}$ und $\mu_y^{(2)}$ beim Vorliegen von nur je einer dieser Minderwertigkeitsursachen bestimmt sind. Es ist also nach Gleichung (11) möglich, dass die Intensität ${}^*\mu_y$ der wirklich vorhandenen Sterblichkeitsintensität besser entspricht als die Intensität μ_y^*. Bei der Ungenauigkeit, mit der man bis auf weiteres bei der Sterblichkeitsmessung anormaler Risiken zu rechnen hat, ist es übrigens gleichgültig, ob man in der Praxis mit den Werten μ_y^* und q_y^* oder mit den Werten ${}^*\mu_y$ und ${}^*q_y$ operiert, d. h. ob man die Zusammensetzung der Sterblichkeiten nach den Formeln (6) und (7) oder nach der Formel (8), resp. (8*a*) vornimmt.

c) Gebräuchliches Verfahren der Sterblichkeitsbestimmung bei anormalen Risiken.

Dieses gebräuchliche Verfahren ist bis jetzt im allgemeinen folgendes: Es wird angenommen, dass durch das Hinzutreten von Minderwertigkeitsursachen die einjährige Sterbenswahrscheinlichkeit ${}^*q_y$ für die verschiedenen Lebensalter y proportional zur Sterbenswahrscheinlichkeit q_y des normalen Risiko anwächst, also

$$(12) \qquad {}^*q_y = (1 + f)\, q_y,$$

wo der «Übersterblichkeitsfaktor» f nur von den vorhandenen Minderwertigkeitsursachen, aber nicht vom Lebensalter y abhängt.

Es seien wieder zwei Minderwertigkeitsursachen vorhanden, von denen jede ohne die andere, aber einschliesslich der Sterblichkeitsursachen für das normale Risiko eine der Sterbenswahrscheinlichkeiten

$$(13) \qquad q_y^{\mathrm{I}} = (1 + f_1)\, q_y \text{ und } q_y^{\mathrm{II}} = (1 + f_2)\, q_y$$

bewirkt. Wie man sieht, entstehen die Gleichungen (13) aus der Gleichung (12), wenn man dem Übersterblichkeitsfaktor f die besondern Werte f_1 und f_2 erteilt. Dann wird angenommen, dass die Sterblichkeiten nach dem vorhergehenden Abschnitt zusammengesetzt werden, d. h. dass die Gleichung (8) resp. (8*a*) besteht, was bei der Voraussetzung der Gleichungen (12) und (13) möglich ist. Durch Einsetzen der Werte (12) und (13) in die Gleichung (8) erhält man dann zur Bestimmung des Wertes f folgende Gleichung:

$$f = f_1 + f_2. \tag{14}$$

Wenn also mehrere Minderwertigkeitsursachen mit den Übersterblichkeitsfaktoren f_1, f_2, ... vorhanden sind, so lässt sich der Übersterblichkeitsfaktor f des vorliegenden anormalen Risikos bestimmen durch die Beziehung

$$f = f_1 + f_2 + \dots \tag{14a}$$

Die für dieses anormale Risiko in Frage kommende Sterbetafel ist dann für alle y durch die nach Gleichung (12) gerechneten Sterbenswahrscheinlichkeiten $^*q_y$ vollständig bestimmt.

Für jede auf ein anormales Risiko abzuschliessende Versicherung wird in der Regel zunächst die Alterserhöhung bestimmt, d. h. die Zahl der Jahre, um welche das Beitrittsalter des Versicherten erhöht werden müsste, damit für die in Frage kommende Versicherung auf Grund der Sterbetafel für das normale Risiko dieselbe Prämie herauskommt wie für das wirkliche Beitrittsalter auf Grund der für das anormale Risiko berechneten Sterbetafel. Dabei stellt sich heraus, dass die Alterserhöhung nicht nur vom Übersterblichkeitsfaktor f und von der gewählten Sterbetafel für das normale Risiko, sondern auch vom Beitrittsalter des Versicherten und von der gewählten Versicherungsart, vor allem aber auch von der gewählten Versicherungsdauer abhängt.

d) Wann lässt sich die Übersterblichkeit anormaler Risiken durch eine vom Lebensalter und den besondern Daten der Versicherung unabhängigen Alterserhöhung ausdrücken? I. Folge.

Wir wollen nun untersuchen, unter welchen Umständen man die für ein anormales Risiko in Frage kommende Alterserhöhung nur aus den vorhandenen Minderwertigkeitsursachen (in Verbindung mit der dem normalen Risiko zugrunde liegenden Sterbetafel) unabhängig von den besondern Daten der Versicherung (Beitrittsalter, Versicherungsart und Versicherungsdauer) bestimmen kann.

Wir nehmen vorläufig wieder an, dass für die Zusammensetzung der Sterblichkeiten die Gleichung (6)

$$\mu_y^* = \mu_y^{\mathrm{I}} + \mu_y^{\mathrm{II}} - \mu_y = \mu_y + (\mu_y^{\mathrm{I}} - \mu_y) + (\mu_y^{\mathrm{II}} - \mu_y)$$

(additive Zusammensetzung der Sterblichkeitsintensitäten) und die daraus folgende Gleichung (7) massgebend sind.

Damit die Alterserhöhung von den genannten Daten der Versicherung unabhängig ist, muss sie für jedes Lebensalter y unabhängig von demselben gelten; d. h. bezeichnen wir die Alterserhöhung, die dem anormalen Risiko mit der Sterblichkeitsintensität μ_y^* entspricht, mit ω, und die Alterserhöhungen, die zu den Intensitäten μ_y^{I} und μ_y^{II} gehören, mit z und w, so ist

$$(15) \qquad \mu_y^* = \mu_{y+\omega}, \ \mu_y^{\mathrm{I}} = \mu_{y+z} \text{ und } \mu_y^{\mathrm{II}} = \mu_{y+w},$$

wo die Alterserhöhungen ω, z und w vom Lebensalter y unabhängig sind.

Die Werte (15) in die Gleichung (6) eingesetzt, ergibt

$$(16) \qquad \mu_{y+\omega} = \mu_{y+z} + \mu_{y+w} - \mu_y.$$

In dieser Gleichung, aus der die Alterserhöhung ω bestimmt werden kann, hängt diese Alterserhöhung wohl von den Alterserhöhungen z und w, aber nicht vom Lebensalter y ab. Wir nehmen noch an, dass ω nach z und w einmal und μ nach dem jeweiligen Argument ($y + \omega$, $y + z$ etc.) zweimal differenzierbar ist.

Die Gleichung (16) entweder nach z oder nach w differenziert, ergibt

$$\mu'_{y+\omega} \cdot \frac{\delta \omega}{\delta z} = \mu'_{y+z} \tag{17}$$ resp.

$$\mu'_{y+\omega} \cdot \frac{\delta \omega}{\delta w} = \mu'_{y+w}. \tag{18}$$

Weiter differenziere man die erhaltenen Gleichungen (17) und (18) nach y; dann erhält man, da ω, z und w von y unabhängig sind,

$$\mu''_{y+\omega} \cdot \frac{\delta \omega}{\delta z} = \mu''_{y+z} \tag{19}$$ und

$$\mu''_{y+\omega} \cdot \frac{\delta \omega}{\delta w} = \mu''_{y+w}. \tag{20}$$

Dividiert man nun die Gleichung (19) durch die Gleichung (17) und die Gleichung (20) durch die Gleichung (18), so erhält man

$$\frac{\mu''_{y+\omega}}{\mu'_{y+\omega}} = \frac{\mu''_{y+z}}{\mu'_{y+z}} = \frac{\mu''_{y+w}}{\mu'_{y+w}}. \tag{21}$$

Alle diese Quotienten müssen einer Konstanten c gleich sein, weil z und w, also auch $y + z$ und $y + w$ voneinander unabhängig sind. Es ist also für jedes Alter x

$$\frac{\mu''_x}{\mu'_x} = c, \tag{22}$$

wo c gegenüber dem Alter x eine Konstante ist. Bekanntlich ist nun die Gleichung (22) die Differentialgleichung des Makehamschen Sterblichkeitsgesetzes. Doch wollen wir die entsprechende Ableitung kurz geben: Aus Gleichung (22) folgt

$$\frac{d\mu_x'}{\mu_x'} = c\,d\,x$$

und durch Integration

$$lg\,\mu_x' = c\,x + lg\,(b\,c), \quad \text{wo } lg\ (b\,c)$$

die Integrationskonstante ist. Hieraus ist

$$\mu' = b\,c\,e^{c\,x}$$

und nach nochmaliger Integration

$$\mu_x = a + b\,e^{c\,x}, \tag{23}$$

wo a die zweite Integrationskonstante ist. Wie man sieht, stellt die Formel (23) das Makeham'sche Sterblichkeitsgesetz dar, welches also die notwendige Bedingung für die hier gestellten Forderungen ist. Diese sind im wesentlichen in den Gleichungen (6) und (15) zusammengefasst, aus welchen die Gleichung (16) folgt. Die Forderungen betreffs die Differenzierbarkeit der Grössen ω und μ sind erfüllt, sobald es sich um analytische Funktionen handelt, mit denen allein solche Rechnungen durchzuführen sind.

Die Gleichung (23) ist aber nicht nur die notwendige, sondern auch die hinreichende Bedingung dafür, dass die Gleichung (16) und damit das gleichzeitige Bestehen der Gleichungen (6) und (15) möglich ist. Denn setzt man die Werte μ_x der Gleichung (23) nacheinander für $x = y+\omega$, $x = y+z$ und $x = y+w$ in die Gleichung (16) ein, so ergibt sich

$a + b e^{c(y+\omega)} = a + b e^{c(y+z)} + a + b e^{c(y+w)} - a - b e^{cy}$ oder

(24) $$e^{c\omega} = e^{cz} + e^{cw} - 1$$

Die Grösse ω hängt also von z und w, aber nicht von y ab, was für das Bestehen der Gleichung (16) vorausgesetzt wurde. Im übrigen hängt nach (24) die Alterserhöhung ω nur noch von der Konstanten c der Makehamschen Formel (23) ab.

e) Neuer Vorschlag für die Bestimmung der Sterblichkeit beim Zusammenwirken mehrerer Minderwertigkeitsursachen.

Bei den Betrachtungen des vorigen Abschnittes haben wir angenommen, dass die Zusammensetzung der Sterblichkeit des anormalen Risikos nach der Gleichung (6)

$$\overset{*}{\mu}_y = \mu_y^{\mathrm{I}} + \mu_y^{\mathrm{II}} - \mu_y$$

erfolgt, welche analog, allerdings nicht gleich gebaut ist wie die Gleichung (8a)

$$^{*}q_y = q_y^{\mathrm{I}} + q_y^{\mathrm{II}} - q_y,$$

welche auch aus den Gleichungen (12), (13) und (14) des Abschnittes c folgt. Diese Gleichungen, nach welchen bis jetzt in der Regel die Sterblichkeit anormaler Risiken bestimmt wird, wollen wir in diesem Abschnitt etwas näher betrachten, um einen neuen Vorschlag für die Bestimmung der Sterblichkeit beim Zusammenwirken mehrerer Minderwertigkeitsursachen zu entwickeln.

Setzt man die Werte (13) in die Gleichung (8a) ein, so ergibt sich

$$^{*}q_y = (1 + f_1 + f_2)\, q_y \qquad \text{oder}$$

(25) $$^{*}q_y = q_y^{\mathrm{I}} + f_2\, q_y.$$

Die Gleichung (25) sagt aus, dass, wenn zu einer schon vorhandenen Minderwertigkeitsursache eine weitere hinzukommt, die Sterbenswahrscheinlichkeit um die Grösse

$$ (25a) \qquad {}^{*}q_y - q_y^{\mathrm{I}} = f_2\, q_y $$

steigt. Dieses Zusatzglied ist proportional zu q_y, wächst also entsprechend, wenn die Sterblichkeit des normalen Risikos infolge Zunahme des Lebensalters y steigt. Hingegen ist das Zusatzglied $f_2\, q_y$ vom Wert des durch die erste Minderwertigkeitsursache bedingten Übersterblichkeitsfaktors f_1 unabhängig.

Will man dieses unterschiedliche Verhalten der durch die zweite Minderwertigkeitsursache bewirkten Sterblichkeitszunahme (gemessen durch $f_2\, q_y$) gegenüber der Erhöhung der Sterblichkeit infolge Alterszunahme einerseits und infolge einer Höherbewertung des Sterblichkeitsfaktors f_1 anderseits vermeiden, so ist es wohl das am nächsten liegende, die Gleichung (25) durch die folgende zu ersetzen:

$$ {}^{**}q_y = q_y^{\mathrm{I}} + f_2\, q_y^{\mathrm{I}} \qquad \text{oder} $$

$$ (26) \qquad {}^{**}q_y = (1 + f_2)\, q_y^{\mathrm{I}}. $$

Der so gebildete Wert ${}^{**}q_y$ tritt an die Stelle der Sterbenswahrscheinlichkeit ${}^{*}q_y$; die Differenz

$$ (26a) \qquad {}^{**}q_y - q_y^{\mathrm{I}} = f_2\, q_y^{\mathrm{I}} $$

ist nunmehr nicht zu q_y, sondern zu q_y^{I}, also zu der vor Hinzutreten der zweiten Minderwertigkeitsursache vorhandenen Sterbenswahrscheinlichkeit proportional.

Die Gleichungen (14) und (14a) sind auf Grund dieses neuen Vorschlages zu ersetzen durch

$$ (27) \qquad 1 + {}^{*}f = (1 + f_1)\,(1 + f_2), \qquad \text{resp.} $$

(27a) $$1 + {}^{*}f = (1 + f_1)(1 + f_2) \ldots$$

und die Gleichung (12) durch

(28) $${}^{**}q_y = (1 + {}^{*}f)\, q_y,$$

wo der Wert ${}^{*}f$ an Stelle des durch die Gleichung (14), resp. (14a) bestimmten Faktors f tritt.

Damit bei der angegebenen Bestimmung der Sterblichkeit des anormalen Risikos die Addition wieder an die Stelle der Multiplikation treten kann, setze man

(29) $$\mathrm{Log}\,(1 + f_1) = g_1 \quad \text{und} \quad \mathrm{Log}\,(1 + f_2) = g_2,$$

ferner

(30) $$\mathrm{Log}\,(1 + {}^{*}f) = g,$$

dann folgt aus (27), resp. (27a)

(31) $$g = g_1 + g_2, \text{ resp.}$$

(31a) $$g = g_1 + g_2 + \ldots$$

und aus Gleichung (28) folgt

(32) $$\mathrm{Log}\, {}^{**}q_y = g + \mathrm{Log}\, q_y,$$ woraus

(32a) $${}^{**}q_y = q_y \cdot \text{Numerus } g.$$

Wenn also an Stelle der $f_1, f_2, \ldots$ die nach Formel (29) zu ermittelnden Konstanten $g_1, g_2, \ldots$ für die einzelnen Minderwertigkeitsursachen vornotiert sind, kann auch nach der hier vorgeschlagenen Methode die Sterblichkeit für ein anormales Risiko durch Angabe des nach Formel (31a) ermittelten Konstanten g auf die einfachste Weise gekennzeichnet werden. Nach den Gleichungen (32) und (32a) kann dann für jeden Wert der Konstanten g die zugehörige Sterbetafel ermittelt werden, welche Rechnung nur für eine beschränkte

Anzahl der Werte g durchzuführen wäre, während die notwendigen Daten der Sterbetafel für die übrigen Werte g durch Interpolation mit genügender Genauigkeit bestimmt werden könnten.

Durch Vergleichung der Formeln (27) und (28) mit den Formeln (14) und (12) ergibt sich noch

$$(33) \qquad {}^{**}q_y > {}^{*}q_y.$$

Im Hinblick auf die spätern Betrachtungen wollen wir die Gleichungen (29) und (30) durch solche von etwas anderer Form ersetzen, nämlich durch

$$(34) \qquad lg\,(1 + f_1) = s\,g_1,\ lg\,(1 + f_2) = s\,g_2 \quad \text{und}$$

$$lg\,(1 + {}^{*}f) = s\,g,$$

wo unter lg der natürliche Logarithmus verstanden werden soll und s eine willkürliche, den Massstab von g bestimmende Konstante bedeutet, dann tritt an Stelle von (32a) die Gleichung

$$(35) \qquad {}^{**}q_y = q_y\,e^{\,sg}, \quad \text{woraus noch}$$

$$(35a) \qquad {}^{**}q_y = q_y + (e^{sg} - 1)\,q_y \ \text{ folgt.}$$

f) Darstellung der Sterblichkeitsintensität als Funktion eines durch die Minderwertigkeitsursachen bestimmten Parameters.

Wir gehen nun wieder über zur Rechnung mit Sterblichkeitsintensitäten und nehmen an, dass jede durch irgendeinen Komplex von Minderwertigkeitsursachen bedingte Sterblichkeit eines anormalen Risikos durch die Sterblichkeitsintensität $\mu_{y,\,a}$ ausdrückbar ist, wo y das Lebensalter und a einen von den vorhandenen Minderwertigkeitsursachen bestimmten Parameter (Übersterblichkeitsmass) bedeutet.

Der Parameter verändere sich durch Addition, wenn mehrere Minderwertigkeitsursachen zusammentreffen; d. h. bedeute $\mu_{y,\alpha}$ die Sterblichkeitsintensität, welche eintritt, wenn neben der normalen Sterblichkeit die eine Minderwertigkeitsursache allein wirkt, und $\mu_{y,\beta}$ die Sterblichkeitsintensität, wenn diese Minderwertigkeitsursache durch eine zweite allein wirkende ersetzt ist, so ist die Sterblichkeitsintensität, die eintritt, wenn neben der normalen Sterblichkeit die beiden angeführten Minderwertigkeitsursachen zusammen auf das Risiko einwirken, gegeben durch $\mu_{y,\alpha+\beta}$. Die Sterblichkeitsintensität des normalen Risikos sei ferner gegeben durch

(36) $$\mu_{y,o} = \mu_y.$$

Nach der am Anfange dieses Aufsatzes eingeführten Bezeichnungen ist dann

(37) $$\mu_y^{\mathrm{I}} = \mu_{y,\alpha} \text{ und } \mu_y^{\mathrm{II}} = \mu_{y,\beta}, \qquad \text{ferner}$$

(37 *a*) $$\overset{*}{\mu}_y = \mu_{y,\alpha+\beta}.$$

Unter der Annahme, dass die Gleichung (6) wieder gilt, folgt nun aus derselben

(38) $$\mu_{y,\alpha+\beta} = \mu_{y,\alpha} + \mu_{y,\beta} - \mu_y$$

Diese Gleichung liefert nun eine einfache Darstellung der Funktion $\mu_{y,\alpha}$. Wenn man nämlich die Gleichung (38) das eine Mal nach α und das andere Mal nach β differenziert, so folgt

(39) $$\mu'_{y,\alpha+\beta} = \mu'_{y,\alpha} = \mu'_{y,\beta} = \psi(y), \qquad \text{worin das}$$

Ableitungs-Zeichen $'$ sich jeweilen nur auf die zweite Variable der Funktion μ bezieht. $\psi(y)$ ist eine von den Parametern α und β unabhängige willkürliche Funktion von y. Durch Integration und Berücksichtigung der Gleichung (36) ergeben sich die Beziehungen

(40) $$\mu_{y,\alpha} = \mu_y + \alpha \cdot \psi(y)$$ und

(40a) $$\mu_{y,\beta} = \mu_y + \beta \cdot \psi(y),$$ ferner

(41) $$\mu_{y,\alpha+\beta} = \mu_y + (\alpha + \beta) \cdot \psi(y).$$

Wie man sieht, erfüllen diese Werte die Gleichung (38).

Die Gleichung (40) ist nun analog gebaut wie die Gleichung (12), die sich schreiben lässt in der Form

$$^*q_y = q_y + f \cdot q_y.$$

Diese Gleichung haben wir im Abschnitt *e* durch eine Formel ersetzt, der wir zuletzt die Form (35a)

$$^{**}q_y = q_y + (e^{sg} - 1)\, q_y$$ gegeben haben,

wo also der Übersterblichkeitsfaktor f ersetzt ist durch die Funktion $(e^{sg} - 1)$ des Parameters g, der analog wie f durch Addition der Einzelparameter $g_1, g_2, \ldots$ erhalten wird.

In Gleichung (40) wollen wir nun in entsprechender Weise den Faktor α durch die Funktion $(e^{s\alpha} - 1)$ ersetzen, wo der Parameter α nicht mehr denselben Wert besitzen muss wie in Gleichung (40). Dann erhalten wir

(42) $$\mu_{y,\alpha} = \mu_y + (e^{s\alpha} - 1) \cdot \psi(y).$$

Diesen Ausdruck ersetzen wir schliesslich in der folgenden Betrachtung durch einen solchen, der sowohl die Formel (40) wie auch die Formel (42) als Sonderfälle einschliesst, nämlich durch

(43) $$\mu_{y,\alpha} = \mu_y + \varphi(\alpha) \cdot \psi(y),$$

wo $\varphi(\alpha)$ eine Funktion des Parameters α ist. Wegen des Bestehens der Gleichung (36) ist noch

(44) $$\varphi(0) = 0.$$

Setzt man $\varphi(a) = a$, so geht Formel (43) in (40) über, und setzt man $\varphi(a) = (e^{sa} - 1)$, so geht Formel (43) in (42) über.

Nach Formel (43) ist die Übersterblichkeit $(\mu_{y,a} - \mu_y)$ einerseits proportional zu einer Funktion des Parameters a und anderseits proportional zu einer andern Funktion des Lebensalters y.

Nun wollen wir die Untersuchung des Abschnittes d fortsetzen und dabei die Annahme, dass die Gleichung (6) gilt, ersetzen durch die Annahme, dass die Sterblichkeitsintensität durch die Formel (43) ausdrückbar ist.

g) Wann lässt sich die Übersterblichkeit anormaler Risiken durch eine vom Lebensalter und den besondern Daten der Versicherung unabhängige Alterserhöhung ausdrücken? II. Folge.

Wir setzen nunmehr

(45) $$\mu_{y,a} = \mu_{y+z},$$

wo $\mu_{y,a}$ durch die Gleichung (43) gegeben ist und die Alterserhöhung z vom Lebensalter y unabhängig sein soll.

Wegen der Annahme der Gleichung (43) folgt hieraus

(46) $$\mu_{y+z} = \mu_y + \varphi(a) \cdot \psi(y).$$

Hierin sei z eine analytische Funktion des Parameters a und μ eine solche ihres Index $y+z$, resp. y.

Man differenziere nun die Gleichung (46) nach a und erhält so

(47) $$\mu'_{y+z} \cdot \frac{dz}{da} = \varphi'(a) \cdot \psi(y)$$

und die Gleichung (47) nach y, dann ergibt sich

$$\mu''_{y+z} \cdot \frac{dz}{da} = \varphi'(a) \cdot \psi'(y). \tag{48}$$

Wird die Gleichung (48) durch die Gleichung (47) dividiert, so folgt

$$\frac{\mu''_{y+z}}{\mu'_{y+z}} = \frac{\psi'(y)}{\psi(y)} = c. \tag{49}$$

Sollen nämlich die beiden ersten Seiten dieser Gleichung für die voneinander unabhängigen Werte von y und z gelten, so müssen diese beiden Seiten einer Konstanten c gleich sein. Wird also $y + z = x$ gesetzt, so ergibt sich zunächst die Gleichung (22) und aus derselben die das Makehamsche Gesetz darstellende Gleichung (23). Ferner ist nach Gleichung (49)

$$\frac{\psi'(y)}{\psi(y)} = c,$$

wo c dieselbe Konstante ist wie in den Gleichungen (22) und (23).

Hieraus folgt

$$\frac{d\,\psi(y)}{\psi(y)} = c\,d\,y$$

und durch Integration

$$lg\,\psi(y) = lg\,h + c\,y,$$

wo $lg\,h$ die Integrationskonstante ist. Hieraus folgt

$$\psi(y) = h\,e^{cy}. \tag{50}$$

Werden die Werte (23) und (50) nunmehr in die Gleichung (46) eingesetzt, so ergibt sich

$$a + b\,e^{c\,(y+z)} = a + b\,e^{cy} + \varphi\,(a) \cdot h\,e^{cy} \qquad \text{oder}$$

(51) $$e^{cz} = 1 + \frac{h}{b} \cdot \varphi\,(a),$$

d. h. die Alterserhöhung z ist in der Tat vom Beitrittsalter y unabhängig, falls in der Gleichung (46) für μ_y und $\psi\,(y)$ die Werte (23) und (50) eingesetzt werden.

Nach der Gleichung (50) ist die Funktion $\psi\,(y)$ aus dem Lebensalter y nach dem Gompertzschen Gesetze aufgebaut.

Ohne dass hierdurch eine Einschränkung erfolgt, kann in der Gleichung (50) die Konstante $h = b$ gesetzt werden, da in der Grundgleichung (43), ohne diese zu verändern, die Funktion $\psi\,(y)$ stets durch irgendeine Konstante dividiert werden kann, wenn die Funktion $\varphi\,(a)$ mit der gleichen Konstante multipliziert wird. Es folgt dann aus (50)

(52) $$\psi\,(y) = b \cdot e^{cy}$$

und aus (51)

(53) $$e^{cz} = 1 + \varphi\,(a).$$

Geht das Makehamsche Gesetz (23) in das Gompertzsche über, d. h. wird $a = o$, also $\mu_y = b \cdot e^{cy}$, so wird nach (52)

$$\psi\,(y) = \mu_y.$$

Analog wie in Abschnitt *d* nehmen wir weiter an, dass einer ersten Minderwertigkeitsursache mit dem Parameter α die Alterserhöhung z, einer zweiten Minderwertigkeitsursache mit dem Parameter β die Alterserhöhung w und dem Zusammenwirken dieser beiden Minderwertigkeitsursachen mit dem Parameter $(\alpha + \beta)$

die Alterserhöhung ω^* entspreche. Dann treten zur Gleichung (53) noch die Gleichungen

$$e^{cw} = 1 + \varphi(\beta) \tag{53a}$$ und

$$e^{c\omega^*} = 1 + \varphi(\alpha+\beta). \tag{54}$$

Werden nun aus den drei Gleichungen (53), (53 a) und (54) die Parameter α, β und $(\alpha + \beta)$ eliminiert, so erhält man die Beziehung zwischen den Alterserhöhungen ω^*, z und w.

Für $\varphi(\alpha) = \alpha$, also $\varphi(\beta) = \beta$ und $\varphi(\alpha + \beta) = \alpha + \beta$ wird $\omega^* = \omega$, und man erhält in diesem Falle die Beziehung (24).

Ersetzt man hingegen die Gleichung (43) durch die Gleichung (42), d. h. setzt man

$$\varphi(\alpha) = e^{s\alpha} - 1,$$ also

$$\varphi(\beta) = e^{s\beta} - 1$$ und

$$\varphi(\alpha + \beta) = e^{s(\alpha+\beta)} - 1,$$

so folgt aus den Gleichungen (53), (53 a) und (54)

$$e^{cz} = e^{s\alpha}, \tag{55}$$

$$e^{cw} = e^{s\beta} \tag{55a}$$ und

$$e^{c\omega^*} = e^{s(\alpha+\beta)}, \tag{56}$$ woraus

$$\omega^* = z + w. \tag{57}$$

Zu dieser Gleichung kommt man auch, wenn man die Forderung stellt:

$$\frac{\mu_{y+\omega^*} - a}{\mu_{y+z} - a} = \frac{\mu_{y+w} - a}{\mu_y - a}. \tag{58}$$

Das sagt in Worten aus: Wenn auf ein anormales Risiko zwei Minderwertigkeitsursachen mit den Alterserhöhungen z und w einwirken, so soll die sich ergebende Alterserhöhung ω^* so beschaffen sein, dass infolge des Hinzukommens der zweiten Alterserhöhung w zur ersten Alterserhöhung z das variable Glied $b \cdot e^{cx} = \mu_x - a$ der Makehamschen Formel (23) in demselben Verhältnis erhöht wird, wie wenn die Alterserhöhung w allein zum normalen Risiko hinzukommen würde.

Aus der Bedingung (58) folgt

$$\frac{b\, e^{c\,(y+\omega^*)}}{b\, e^{c\,(y+z)}} = \frac{b\, e^{c\,(y+w)}}{b \cdot e^{c\,y}} \tag{59}$$

und hieraus $\omega^* - z = w$

oder die Gleichung (57).

h) Zusammenfassung; eine Eigenschaft des Makehamschen Sterblichkeits-Gesetzes.

Unsere hauptsächlichen Ergebnisse können wir wie folgt zusammenfassen:

Satz 1: Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Möglichkeit, dass sich die Übersterblichkeit anormaler Risiken durch eine vom Lebensalter (und damit von den besondern Daten der Versicherung) unabhängige Alterserhöhung ausdrücken lässt,

und dass entweder [nach Formel (1) und (6)].

A. die Übersterblichkeit infolge eines Komplexes von Minderwertigkeitsursachen sich durch die Intensitäten der Übersterblichkeiten infolge der einzelnen Minderwertigkeitsursachen additiv zusammensetzen lässt,

oder dass [nach Formel (43)]

B. die Sterblichkeitsintensität durch die Formel

$$\mu_{y,a} = \mu_y + \varphi(a) \cdot \psi(y)$$

darstellbar ist, wo sich die Parameter a additiv zusammensetzen, wenn verschiedene Minderwertigkeitsursachen auf das Risiko einwirken,

ist die Darstellbarkeit der Sterblichkeit durch das Makehamsche Gesetz [und im Falle B muss die Funktion $\psi(y)$ durch das Gompertzsche Gesetz mit derselben Konstanten c ausdrückbar sein].

Satz 2: Wird im Falle B noch angenommen, dass, falls schon eine erste Minderwertigkeitsursache vorhanden ist, durch eine zweite das variable Glied der Makehamschen Formel in demselben Verhältnis erhöht wird, als wenn die zweite Minderwertigkeitsursache unmittelbar (ohne Vorhandensein der ersten) zum normalen Risiko treten würde [Formel (58)] so addieren sich die Alterserhöhungen für die beiden Minderwertigkeitsursachen selber.

i) Addition der Alterserhöhungen.

Der Satz 2 lässt sich zu einer ganz allgemeinen Beziehung erweitern: Man nehme an, das anormale Risiko sei wieder mit zwei Minderwertigkeitsursachen belastet, von denen die erste die Alterserhöhung z und die zweite die Alterserhöhung w bewirke, wo z und w vom Lebensalter y unabhängig sind. Nun setze man weiter voraus, dass, wenn zur ersten die zweite Minderwertigkeitsursache hinzukommt, dieselbe Wirkung auf das mit der ersten Alterserhöhung z versehene Risiko eintritt, als wenn das normale Risiko mit der zweiten Minderwertigkeitsursache belastet wird (wodurch die Alterserhöhung w bewirkt wird). Wird also die von beiden Minderwertigkeitsursachen zusammen bewirkte Alterserhöhung mit ω^* bezeichnet, so folgt aus dem angeführten Grundsatz (da die Wirkung nur in einer Alterserhöhung der normalen oder der schon mit einer frühern Alterserhöhung belasteten Sterblichkeit bestehen kann)

$$\omega^* - z = w$$

oder die Gleichung (57)

$$\omega^* = z + w.$$

k) Eine zur Gompertzschen Formel führende Spezialisierung des Satzes 1, sowie die Betrachtung der Alterserhöhung, wenn hierbei nur die Makehamsche Formel gilt.

Wir wollen jetzt annehmen, dass die Sterblichkeitsintensität eines anormalen Risikos anstatt durch die Gleichung (43)

$$\mu_{y,\,a} = \mu_y + \varphi(\alpha) \cdot \psi(y)$$

durch die Formel

$$\mu_{y,\,a} = \mu_y + \varphi(\alpha) \cdot \mu_y \qquad \text{oder}$$

(60) $$\mu_{y,\,a} = [1 + \varphi(\alpha)]\,\mu_y$$

gegeben ist, dass also die Sterblichkeitsintensität des anormalen Risikos zu derjenigen des normalen proportional ist. Dann ist also

(61) $$\psi(y) = \mu_y.$$

Setzt man nun wie früher

$$\mu_{y,\,a} = \mu_{y+z},$$

wo z von y unabhängig ist, so ist nach Gleichung (52)

$$\psi(y) = b \cdot e^{cy},$$

also infolge (61)

(62) $$\mu_y = b\, e^{cy},$$

durch welche Formel das Gompertzsche Sterblichkeitsgesetz dargestellt ist.

Dieses Resultat lässt sich ebenfalls umkehren; denn setzt man den Wert

$$\mu_{y+z} = \mu_{y,\,a} = [1 + \varphi(a)]\, \mu_y$$

in den aus Gleichung (62) erhaltenen Ausdruck

$$\mu_{y+z} = b\, e^{c\,(y+z)}$$

ein, so erhält man

$$b\, e^{c\,(y+z)} = [1 + \varphi(a)]\, b\, e^{cy},$$ woraus

(63) $$e^{cz} = 1 + \varphi(a),$$

aus welcher Gleichung sich die Alterserhöhung als einen vom Lebensalter y unabhängigen Wert bestimmen lässt.

Wir erhalten so den

Satz 3: Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Möglichkeit, dass die Sterblichkeit eines anormalen Risikos sich durch eine vom Lebensalter unabhängige Alterserhöhung ausdrücken lässt und die Sterblichkeitsintensität durch die Formel

$$\mu_{y,\,a} = [1 + \varphi(a)]\, \mu_y$$

darstellbar ist, ist die Darstellbarkeit der Sterblichkeit durch das Gompertzsche Gesetz.

Wenn wir nun die nicht mehr vom Lebensalter unabhängige Alterserhöhung z suchen, die der Formel

(64) $$\mu_{y+z} = \mu_{y,\,a} = [1 + \varphi(a)]\, \mu_y$$

entspricht, wo μ_y nicht durch die Gompertzsche, wohl aber durch die Makehamsche Formel

$$\mu_y = a + b\, e^{cy},$$

also μ_{y+z} durch

$$\mu_{y+z} = a + b\, e^{c\,(y+z)}$$

bestimmt ist, so erhalten wir

$$e^{cz} = 1 + \varphi\,(a) + \frac{a\,\varphi\,(a)}{b \cdot e^{cy}}. \tag{65}$$

Die Alterserhöhung z, welche aus dieser Gleichung folgt, ist dergestalt vom Alter y abhängig, dass sie mit steigendem Lebensalter sinkt, allerdings um so weniger, je höher y geworden ist.

Für $a = 0$ geht die Makehamsche Formel in die Gompertzsche über, und hierbei wird die Alterserhöhung z vom Lebensalter y unabhängig, was sich auch aus Gleichung (65) ergibt.

l) Übertragung des in Abschnitt e entwickelten Vorschlages für die Bestimmung der Sterblichkeit auf den Fall, dass die Sterblichkeitsintensität des anormalen Risikos allgemein als Funktion des Lebensalters und eines Parameters betrachtet wird, wobei letzterer sich additiv zusammensetzt, wenn mehrere Minderwertigkeitsursachen zusammentreten.

Wie im ersten Teile des Abschnittes *f* nehmen wir an, dass auf ein anormales Risiko zwei Minderwertigkeitsursachen einwirken, von denen jede für sich allein die Sterblichkeitsintensität μ_y des normalen Risikos auf die Werte $\mu_{y,\,\alpha}$, resp. $\mu_{y,\,\beta}$ erhöhen würden, zusammen aber die Sterblichkeitsintensität $\mu_{y,\,\alpha+\beta}$ für das anormale Risiko liefern. Weiter gelte die Gleichung (36)

$$\mu_{y,o} = \mu_y.$$

Ferner nehmen wir entsprechend dem im Abschnitte *e* entwickelten Vorschlag an, dass der Wert $\mu_{y,\alpha+\beta}$ in derselben Weise vom Werte $\mu_{y,\alpha}$ abhängt wie der Wert $\mu_{\eta,\beta}$ vom Werte μ_η. η ist hierbei ein anderer (oder auch gleicher) Wert des Lebensalters y. Ist nun

$$\mu_\eta = \mu_{y,\alpha}, \tag{66}$$

so ist also

$$\mu_{y,\alpha+\beta} = \mu_{\eta,\beta}. \tag{67}$$

Die Abhängigkeit des Wertes $\mu_{y,\alpha}$ von μ_y und α werde dargestellt durch

$$\mu_{y,\alpha} = f(\mu_y, \alpha) \tag{68}$$ oder

$$\mu_{y,\alpha} = f(u, \alpha), \tag{68a}$$

wenn $\mu_y = u$ gesetzt wird. Da also nach Gleichung (66)

$$\mu_\eta = f(u, \alpha),$$

so ist nach Gleichung (67)

$$f(u, \alpha+\beta) = f[f(u, \alpha), \beta]. \tag{69}$$

Aus Gleichung (36) folgt noch

$$f(u, o) = u, \tag{70}$$

welche Beziehung die Gleichung (69) für $\alpha = 0$ und $\beta = 0$ erfüllt.

Setzt man weiter $\mu_\eta = \mu_{y,\alpha} = s$, dann ist

$$f(u, \alpha + \beta) = f(s, \beta), \tag{71}$$ wobei

$$f(u, \alpha) = s \tag{72}$$ ist.

Denkt man sich in den beiden letzten Gleichungen den Wert u als fest und die Werte s, α und β als variabel, so hängt in (72) s in derselben Weise von α ab wie in (71) der Wert $f(s, \beta)$ vom Werte $(\alpha + \beta)$. Bezeichnen wir diese Abhängigkeit durch das Funktionszeichen F, wo also F eine Funktion *einer* Variablen ist (da u als unveränderlich angenommen wird), so ist gleichzeitig

$$(73) \qquad s = F(\alpha) \text{ und } F(s, \beta) = F(\alpha + \beta).$$

Bedeutet endlich G die zu F inverse Funktion, so dass aus

$$s = F(\alpha)$$

$$(74) \qquad \alpha = G(s)$$

folgt, so ist nach der zweiten Gleichung (73)

$$f(s, \beta) = F[G(s) + \beta]$$

oder, falls man die Variable β durch die Variable α ersetzt:

$$(75) \qquad f(s, \alpha) = F[\alpha + G(s)],$$

womit die Form der Funktion $f(s, \alpha)$ gefunden ist.

Setzt man nun die Werte (75) für die entsprechenden Grössen in die Ausgangsgleichung (69) ein, so erhält man

$$F[\alpha + \beta + G(u)] = F[\beta + G\{F(\alpha + G(u))\}],$$

welche Gleichung identisch erfüllt ist, da infolge der Definition von G

$$G\{F(\alpha + G(u))\} = \alpha + G(u) \qquad \text{ist.}$$

Wir erhalten so den

Satz 4: Wirken auf ein anormales Risiko irgend zwei Minderwertigkeitsursachen, die einzeln durch die Parameter α und β und beim Zusammenwirken durch den Parameter $(\alpha + \beta)$ gekennzeichnet sind und nehmen wir an, dass die Sterblichkeitsintensität $\mu_{y, \alpha+\beta}$ in derselben Weise aus der Intensität $\mu_{y, \alpha}$ und dem Parameter β gebildet ist wie die Sterblichkeitsintensität $\mu_{\eta, \beta}$ aus der Intensität μ_η der normalen Sterblichkeit und dem Parameter β, so ist jede Intensität $\mu_{\eta, \alpha} = f(s, \alpha)$, wo $s = \mu_\eta$, darstellbar in der Form $f(s, \alpha) = F[\alpha + G(s)]$, wo G die zu F inverse Funktion bedeutet.

m) Anwendung der allgemeinen Gleichung

$$f(s, \alpha) = F[\alpha + G(s)], \text{ wo } F[G(s)] = s,$$

auf einzelne Sonderfälle.

Wir wollen nun die obige Gleichung (75), resp. die mit ihr identische Gleichung

$$G[f(s, \alpha)] = \alpha + G(s) \tag{76}$$

auf einzelne Sonderfälle anwenden.

1. Es sei

$$F(x) = \mu_x,$$

d. h. die Funktion F stelle die Abhängigkeit der Sterblichkeitsintensität des normalen Risikos vom Lebensalter dar.

Setzt man dann

$$\mu_x = u,$$

so ist

$$G(u) = x,$$

da G die zu F inverse Funktion ist.

Setzt man dann in Gleichung (75)

$$s = \mu_y,$$

so ist also

$$y = G(s)$$

und aus Gleichung (75) folgt

$$f(s, \alpha) = \mu_{\alpha+y}$$

und da noch nach der jetzigen Bezeichnung von s

$$f(s, \alpha) = \mu_{y, \alpha},$$

ist, so ist endlich

$$\mu_{y, \alpha} = \mu_{y+\alpha}, \tag{77}$$

d. h. die Sterblichkeit des anormalen Risikos wird in diesem Falle erhalten, indem man das Lebensalter des Versicherten um den Parameter erhöht und die Sterblichkeit mit dem erhöhten Alter bestimmt.

2. Es sei

$$F(x) = e^{cx},$$

dann ist

$$G(s) = \frac{1}{c} \lg s$$

und aus (75) folgt

$$f(s, \alpha) = e^{c\left(\alpha + \frac{1}{c} \lg s\right)} \qquad \text{oder}$$

$$f(s, \alpha) = e^{c\alpha} \cdot s.$$

Setzt man wieder

$$s = \mu_y, \text{ also } f(s, \alpha) = \mu_{y, \alpha},$$

so ist also

$$\mu_{y, \alpha} = e^{c\alpha} \cdot \mu_y \tag{78}$$

analog der Gleichung (35).

3. Es sei endlich

$$F(x) = x,$$

also auch $$G(s) = s,$$

dann ist $$f(s, \alpha) = \alpha + s$$

und $$s = \mu_y \text{ und } f(s, \alpha) = \mu_{y,\alpha} \qquad \text{gesetzt:}$$

$$\mu_{y,\alpha} = \mu_y + \alpha, \tag{79}$$

d. h. der Parameter addiert sich in diesem Falle einfach zur Sterblichkeitsintensität des normalen Risikos.

In Formel (77) kann man genau und in den Formeln (78) und (79) näherungsweise die Sterblichkeitsintensität durch die einjährige Sterbenswahrscheinlichkeit ersetzen.

4. Ist es ratsam, das anormale Risiko durch zwei Parameter α_1 und α_2 zu kennzeichnen, die sich addieren, wenn mehrere Minderwertigkeitsursachen zusammentreten, so kann man etwa zwei der erwähnten Fälle kombinieren, z. B. setzen

$$\mu_{y;\,\alpha_1,\,\alpha_2} = \mu_{y+\alpha_1} + \alpha_2, \tag{80}$$

doch ist es hier unmöglich, der Annahme des Satzes 4 analog die sich beim Vorliegen von zwei Minderwertigkeitsursachen ergebende Sterblichkeitsintensität

$$\mu_{y;\,\alpha_1+\beta_1,\,\alpha_2+\beta_2} = \mu_{y+\alpha_1+\beta_1} + \alpha_2 + \beta_2$$

als Funktion der Sterblichkeitsintensität beim Vorliegen einer Minderwertigkeitsursache

$$\mu_{y;\,\alpha_1,\,\alpha_2} = \mu_{y+\alpha_1} + \alpha_2$$

und der Parameter β_1 und β_2 der zweiten Minderwertigkeitsursache auszudrücken.

n) Schlussbetrachtungen.

Im vorliegenden Aufsatze haben wir untersucht, wie beim Zusammenwirken mehrerer Minderwertigkeitsursachen die Sterblichkeit anormaler Risiken auf Grund verschiedener Annahmen bestimmt werden kann und wie sich dabei der Sterblichkeitsverlauf selber verhalten muss.

Die Erforschung, wie weit diese Annahmen zutreffen, resp. zutreffen mögen, ist Sache der Statistik und der Versicherungsmedizin, welche auch die Unterlagen für die Zahlenwerte der verwendeten Grössen, insbesonders der Parameter (Übersterblichkeitsmasse), zu liefern haben. Doch erscheint es bei der Schwierigkeit, auf dem Gebiete anormaler Risiken zuverlässige statistische Erfahrungen zu sammeln, zweckmässig, wenn durch Einführung geeigneter Voraussetzungen und deren mathematische Verarbeitung, wie es in diesem Aufsatze versucht wurde, die statistischen Probleme geklärt und vereinfacht werden.

Untersuchungen über die Versicherung anormaler Risiken sind u. a. in folgenden Schriften gesammelt:

1. *Achter Internationaler Kongress für Versicherungs-Wissenschaft* (London 1927): V. Abhandlungen über: Versicherung von minderwertigen Leben.

2. *Die Prinzipien der Lebensversicherungstechnik* von Alfred Berger (Berlin 1925): 2. Teil. III. Die Versicherung der minderwertigen Risiken.

Anmerkung: Die vorliegende Arbeit lag schon August 1928 bei der Redaktionskommission der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker.

Unterdessen ist noch folgender Aufsatz des Verfassers erschienen: „Die Sterblichkeitsintensität anormaler Risiken als Funktion der durch die Minderwertigkeitsursachen bestimmten Parameter“ (Blätter für Versicherungs-Mathematik und verwandte Gebiete, Heft 7, Beilage zur Zeitschrift für die gesamte Versicherungs-Wissenschaft, Berlin, Januar 1930).