Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 27 (1932)

Artikel: Zur Darstellung der Reserve in der Einzel- und in der Sozialversicherung

Autor: Zwinggi, Ernst

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-967501

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 17.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Zur Darstellung der Reserve in der Einzel- und in der Sozialversicherung.

Von Dr. **Ernst Zwinggi**, Basel.

a) Einleitung.

In seiner fundamentalen Darstellung «Zur Theorie und Anwendung der Intensitäten in der Versicherungsmathematik» hat *A. Loewy* einen Ausdruck für das Deckungskapital einer ganz allgemeinen Versicherungskasse hergeleitet. Er ist dabei vom folgenden Schema der Leistungen ausgegangen: Ein x-Jähriger versichere sich für die Dauer s für eine mit dem Alter variable Rente; erfolgt aber infolge der angenommenen n Ursachen ein vorzeitiges Ausscheiden, so wird eine einmalige Summe fällig. Bei der Prämienzahlung ist ebenfalls ein mit der Dauer sich ändernder Beitrag angenommen.

Wir erkennen einmal, dass die Versicherung einer Person auf Ableben und Erleben, ferner die gemischte Versicherung mit und ohne Invaliditätszusatzversicherung als *Spezialfälle* in die ganz allgemeine Versicherung eingeschlossen sind. Ebenso ist die Witwen- und Invalidenversicherung bei individueller Prämienzahlung enthalten. Die *Loewysche* Formel muss daher als ein *universeller* Ausdruck für das Deckungskapital in der Einzelversicherung angesehen werden. Alle Folgerungen, die daraus gezogen werden, gelten automatisch auch für die angeführten konkreten Fälle.

In der *Loewyschen* Formel ist aber das Deckungskapital in der *Kranken- und Unfallversicherung* nicht enthalten. Zu diesem Nachweise muss vorerst ein Kriterium erstellt werden, wann eine Versicherung eingeschlossen ist. *Loewy* nimmt an, dass eine Leistung zur Auszahlung kommt, wenn das Mitglied *dauernd* ausscheidet (abgesehen von der Rente, die immer gutgeschrieben wird). Diese Voraussetzung trifft aber in der Kranken- und Unfallversicherung nicht zu: der Zustand der Krankheit oder der Unfallbeschädigung ist nur *temporär*. Nach erfolgter Heilung tritt das Mitglied wieder in die normale Prämienpflicht ein. (Da wir stets von der kontinuierlichen Methode sprechen, ist ein exaktes Überfliessen der beiden Zustände leicht herstellbar.) Ein Ausdruck für die Reserve in der Kranken- und Unfallversicherung muss also dem Umstande Rechnung tragen, dass ein Mitglied zeitweise aus der Beitragszahlung ausscheidet und eine Versicherungsleistung bezieht. Mathematisch ausgedrückt heisst das, dass wir nicht nur *einen* Stamm von Versicherten zu betrachten haben, sondern deren *zwei*.

Wenn es uns also gelingt, eine Beziehung für die Reserve in der Kranken- und Unfallversicherung zu erstellen, so haben wir dadurch gleichzeitig auch eine *Erweiterung* der *Loewyschen* Reservenformel vor uns. Denn es ist ohne weiteres ersichtlich, dass der Übergang zu einem einzigen Stamm eine Vereinfachung bedeutet. Darüber hinaus messen wir aber unserer verallgemeinerten Formel auch eine methodische Bedeutung bei.

Ein vollständiger Lehrgang über Versicherungsmathematik umfasst als grosse Gebiete die Einzel- und die Sozialversicherung. In das erste Gebiet reihen sich die verschiedenen Arten der Lebensversicherung ein, während das zweite die soziale Witwen-, Invaliden-,

Kranken- und Unfallversicherung umfasst. Der Dozent wird im allgemeinen jeden der angeführten Zweige aus den Elementen heraus aufbauen. Dieser methodisch bedingte Weg lässt aber meist die verbindenden Eigenschaften nicht so klar hervortreten. Um so mehr muss es reizen, nachher eine Theorie der Versicherung aufzubauen, die alle Zweige miteinander umfasst, wo die Beziehungen für die Individual- und für die Sozialversicherung als *spezielle Fälle* aus einer *universellen* Formel hervorgehen.

Wir möchten in dieser Untersuchung die *Ansätze* zu einer derartigen einheitlichen Behandlungsweise darlegen. — Eine solche Darstellung könnte als Ausgangspunkt die Anwartschaft auf die Versicherungsleistungen, die Prämie oder die Reserve nehmen. Da aber die Anwartschaft nur ein bestimmter Fall der Reserve ist (nämlich die Anfangsreserve bei einer einmaligen Prämienzahlung) und sich ferner die Prämie wiederum aus der Anwartschaft zu berechnen hat, wählen wir als Grundbedingung der einheitlichen Darstellung das Deckungskapital.

b) Die Erstellung der Reservendifferentialgleichung.

Aus unserer Einleitung geht hervor, dass als Ausgangspunkt die *Reserve* zu dienen hat. Wir müssen somit eine schematische Versicherungskasse so konstruieren, dass sie sowohl alle Formen der *Einzelversicherung* (wie reine Ab- und Erlebensfallversicherung, gemischte Versicherung mit und ohne Invaliditätszusatzversicherung, Einzelunfallversicherung usw.) wie auch alle Fälle der *Sozialversicherung* (wie Betriebskranken- und Unfallversicherung, Invaliden- und Witwenversicherung) in sich schliesst. Für diese fiktive Kasse ist sodann das Deckungskapital zu berechnen.

— Da wir uns durchwegs der kontinuierlichen Methode bedienen, wird der Ansatz am besten in Form einer Differentialgleichung vollzogen.

Wir nehmen 2 fiktive Stämme $l^1_{[x]+t}$ und $l^2_{[x]+t}$ an, die den Bedingungen

$$\begin{aligned} l_{[x]+t} &= l^1_{[x]+t} + l^2_{[x]+t} \\ l_{[x]} &= l^1_{[x]} \\ l^2_{[x]} &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

genügen. Der erste Stamm sei dadurch gekennzeichnet, dass er die beitragspflichtigen Elemente unserer Kasse umfasst; der zweite aber soll eine Leistung empfangen, die dem Wesen nach dem ersten verschlossen ist. Die Mitglieder können nach Massgabe noch festzulegender Bedingungen von einem Stamm zum andern übertreten oder auch vollständig ausscheiden. Mit dem vollständigen Ausscheiden ist immer eine Versicherungsleistung verbunden.

Unsere erste Aufgabe besteht darin, diese beiden Stämme für einen beliebigen Zeitpunkt t darzustellen.

Das endgültige Ausscheiden aus dem ersten Stamme erfolge aus n Ursachen; als Masszahlen des Ausscheidens führen wir die n Intensitäten

$$\alpha^1_{[x]+t},\ \alpha^2_{[x]+t},\ \cdots\ \alpha^n_{[x]+t}$$

ein. Die totale Ausscheideintensität $\alpha_{[x]+t}$ ist sodann die Summe der einzelnen nach:

$$\alpha_{[x]+t} = \sum_1^n{}^i\, \alpha^i_{[x]+t}$$

Diese Intensitäten sind nur Funktionen des Alters und der Versicherungsdauer, sie hängen aber nicht

ab von der Dauer der Zugehörigkeit zum ersten Stamme. Im Gegensatz dazu sollen die Ausscheideintensitäten aus dem zweiten Stamme auch Funktion von der (ununterbrochenen) Dauer der Zugehörigkeit zu diesem Stamme sein. Erfolgte z. B. der Übertritt zum Stamme 2 im Alter $[x]+\xi$, blieb ferner das Mitglied bis zum Alter $[x]+t$ zugehörig, so seien

$$\beta^1(x+\xi,\ x+t),\ \beta^2(x+\xi,\ x+t),\ \cdots\ \beta^m(x+\xi,\ x+t)$$

die m Ausscheideintensitäten (dauerndes Ausscheiden) für diesen zweiten Stamm. Die totale Ausscheideintensität $\beta(x+\xi,\ x+t)$ ist dann analog:

$$\beta(x+\xi,\ x+t)=\sum_{1}^{m}{}_k\,\beta^k(x+\xi,\ x+t)$$

Ferner muss noch das Mass des Übertrittes vom Stamme 1 zu 2 und umgekehrt festgelegt werden. Es bedeute:

$\nu^{12}_{[x]+t}$ die Intensität des Übertrittes für einen $[x]+t$-Jährigen vom Stamme 1 zu 2.

$\nu^{21}(x+\xi,\ x+t)$ die Intensität des Übertrittes vom Stamme 2 zu 1, wenn der Übertritt von 1 zu 2 im Alter $[x]+\xi$ erfolgte und das Mitglied bis zum Alter $[x]+t$ ununterbrochen zugehörig blieb.

Zur Verdeutlichung bemerken wir, dass z. B. $\nu^{12}_{[x]+t}$ bedeutet: Intensität der Erkrankung, der Unfallbeschädigung, der temporären Invalidierung; da-

gegen darf diese Grösse nicht mit der Intensität der dauernden Invalidierung identifiziert werden, wenn keine Reaktivierung möglich ist.

Die Berechnung der beiden Stämme aus diesen Grundgrössen ist eine bekannte Aufgabe [1]), und sie soll nur so weit ausgeführt werden, als sie für unser Problem unbedingt notwendig ist.

Wir betrachten einen Stamm $*l\,(x+\xi,\, x+\xi)$ von $[x]+\xi$-jährigen, soeben zum Stamme 2 übergetretenen Mitgliedern. Im folgenden Zeitpunkt $s\ (s>\xi)$ sind davon noch vorhanden: $*l\,(x+\xi,\, x+s)$. Die Abnahme im Zeitmoment ds ist

$$d\,*l\,(x+\xi,\, x+s) = -\,*l\,(x+\xi,\, x+s)\,\big(\nu^{21}\,(x+\xi,\, x+s) + \\ + \beta\,(x+\xi,\, x+s)\big)\,ds \qquad (2)$$

Durch logarithmische Integration zwischen $s=\xi$ und $s=t$ findet man:

$$\frac{*l\,(x+\xi,\, x+t)}{*l\,(x+\xi,\, x+\xi)} = e^{-\int\limits_{\xi}^{t}\left(\nu^{21}\,(x+\xi,\, x+s)\,+\,\beta\,(x+\xi,\, x+s)\right)\,ds}$$

$= p\,(x+\xi,\, x+t) =$ Wahrscheinlichkeit, dass ein im Alter $[x]+\xi$ zum Stamme 2 übergetretenes Mitglied im Alter $[x]+t$ noch dem gleichen Stamm angehört.

---

[1]) Man vergleiche hierüber die Arbeit von *E. Schoenbaum:* «Die Anwendung der Volterraschen Integralgleichungen in der mathematischen Statistik» (Skandinavisk Aktuarietidskrift, Jahrgänge 7 und 8, 1924 und 1925), und vom *Verfasser:* «Mathematische Grundlagen der Unfallversicherung» (Blätter für Versicherungs-Mathematik, Heft 4, 2. Band, 1931) und «Das Problem der Erneuerung» (Festgabe Moser, 1931).

Im Zeitmoment $d\xi$ gingen $l^1_{[x]+\xi} \cdot \nu^{12}_{[x]+\xi} \cdot d\xi$ Elemente zum Stamme 2 über; davon blieben

$$l^1_{[x]+\xi} \cdot \nu^{12}_{[x]+\xi} \cdot p\,(x+\xi,\, x+t)\, d\xi$$

bis zum Zeitpunkt t zugehörig. Um den ganzen Stamm 2 zu erfassen, integrieren wir über ξ von 0 bis t und finden:

$$l^2_{[x]+t} = \int_0^t l^1_{[x]+\xi} \cdot \nu^{12}_{[x]+\xi} \cdot p\,(x+\xi,\, x+t)\, d\,\xi \qquad (3)$$

Im Zeitmoment dt scheiden aus diesem Bestande endgültig aus:

$$\left(\int_0^t l^1_{[x]+\xi} \cdot \nu^{12}_{[x]+\xi} \cdot p\,(x+\xi,\, x+t) \cdot \beta\,(x+\xi,\, x+t)\, d\xi\right) dt \qquad (4)$$

oder nur infolge der k^{ten} Ursache:

$$\left(\int_0^t l^1_{[x]+\xi} \cdot \nu^{12}_{[x]+\xi} \cdot p\,(x+\xi,\, x+t) \cdot \beta^k\,(x+\xi,\, x+t)\, d\,\xi\right) dt \qquad (5)$$

An das endgültige Ausscheiden ist nach Voraussetzung immer eine Versicherungsleistung gebunden; das Operieren mit den β-Grössen ist aber kompliziert. Wir führen deshalb die Grösse $\gamma^k_{[x]+t}$ ein, die durch die Gleichung

$$\gamma^k_{[x]+t} = \frac{1}{l^2_{[x]+t}} \int_0^t l^1_{[x]+\xi} \cdot \nu^{12}_{[x]+\xi} \cdot p\,(x+\xi,\, x+t) \cdot \beta^k\,(x+\xi,\, x+t)\, d\xi \qquad (6)$$

definiert ist.

Aus dem Stamme $l^2_{[x]+t}$ scheiden daher endgültig aus:

$$l^2_{[x]+t} \cdot \gamma^k_{[x]+t}\, dt \qquad (7)$$

Die Grössen $\gamma^k_{[x]+t}$ haben ebenfalls den Charakter von Intensitäten; wir bezeichnen sie deshalb als Pseudo-Intensitäten. Sie sind bestimmbar, sobald die beiden Stämme auch berechnet sind.

Vom Stamme 2 treten im Zeitmoment dt zu 1 über:

$$\left(\int_0^t l^1_{[x]+\xi} \cdot \nu^{12}_{[x]+\xi} \cdot p\,(x+\xi, x+t) \cdot \nu^{21}\,(x+\xi, x+t)\, d\xi\right) dt = \tag{8}$$

$$= \left(\int_0^t l^1_{[x]+\xi} \cdot h\,(\xi, t)\, d\xi\right) dt$$

Der Stamm 1 verändert sich ebenfalls. Die Übertritte von 2 zu 1 nach Beziehung (8) bedingen eine Vermehrung; davon kommen aber noch die Abgänge durch endgültiges Ausscheiden und Übertreten zu 2 in Abzug. Die totale Änderung $d\, l^1_{[x]+t}$ lässt sich daher darstellen als:

$$d\, l^1_{[x]+t} = -\, l^1_{[x]+t}\,(\nu^{12}_{[x]+t} + \alpha_{[x]+t})\, dt + \left(\int_0^t l^1_{[x]+\xi} \cdot h\,(\xi, t)\, d\xi\right) dt \tag{9}$$

Aus der vorliegenden Gleichung lässt sich $l^1_{[x]+t}$ berechnen[1]; wir setzen für die Zukunft voraus, dass diese Berechnung durchgeführt sei. Ist aber einmal $l^1_{[x]+t}$ bestimmt, so ist ebenfalls $l^2_{[x]+t}$ nach (3) durch eine Integration auszuwerten. Damit können die beiden Stämme als gegeben angesehen werden.

Wir schreiten sodann zur Ableitung der Reservendifferentialgleichung. Vorerst müssen aber noch die Versicherungsleistungen definiert werden.

---

[1]) Da die Lösung der Gleichung (9) ein bekanntes Problem und für unsere Ableitungen eigentlich nur eine Vorstufe ist, dürfen wir auf eine vollständige Durchführung der Rechnung verzichten. Man vergleiche die Seite 250 angegebenen Arbeiten.

a) Die Beitragszahlung erstreckt sich nur auf die Dauer der Zugehörigkeit zum Stamme 1. Der kontinuierlich entrichtbare Beitrag betrage P. Im Falle der Einzelversicherung sprechen wir sodann von einer Prämie $P_{[x]+t}$, in der Sozialversicherung aber von einem Durchschnittsbeitrag P_{Δ}.

b) An das endgültige Ausscheiden aus dem Stamme 1 infolge der n Ursachen binden sich die Zahlungen:

$$S^1_{[x]+t},\ S^2_{[x]+t},\ \cdots\ S^n_{[x]+t}$$

c) An das entsprechende Ausscheiden aus dem Stamme 2 seien die Leistungen

$$U^1_{[x]+t},\ U^2_{[x]+t},\ \cdots\ U^m_{[x]+t}$$

gebunden.

d) Sowohl den Elementen des Stammes 1 wie 2 werde die vom Alter abhängige Rente $R_{[x]+t}$ ausbezahlt.

e) Für die Dauer der Zugehörigkeit zum Stamme 2 wird die weitere Rente $T_{[x]+t}$ vergütet.

Wir bemerken ferner, dass die Reserve für den ganzen Bestand $l_{[x]+t}$ berechnet wird. Die Reserve für ein Mitglied bleibt sich also gleich, ob es im Stichtag dem Stamme 2 oder 1 angehört. Wir bezeichnen die Durchschnittsreserve nach Ablauf von t Jahren mit ${}_tV_{[x]}$, übertragen also die in der Lebensversicherungsmathematik übliche Bezeichnungsweise auch auf unsere schematische Kasse.

Für den Gesamtbestand $l_{[x]+t}$ beträgt die Reserve zur Zeit t: $l_{[x]+t} \cdot {}_tV_{[x]}$. Dieser Betrag ist für das Zeitelement dt aufzuzinsen; damit beträgt die Reserve samt Zinsen:

$$l_{[x]+t} \cdot {}_tV_{[x]} (1 + \delta\, dt) \tag{10}$$

Die Prämien rühren vom Stamme 1 her; sie betragen:

$$P \cdot l^1_{[x]+t}\, dt \tag{11}$$

Die Rentenzahlung an den Stamm 2 beträgt:

$$l^2_{[x]+t} \cdot T_{[x]+t}\, dt \tag{12}$$

Analog dazu ist dem Gesamtbestand die Rentenzahlung

$$l_{[x]+t} \cdot R_{[x]+t}\, dt \tag{13}$$

zu leisten.

Endlich kommen noch dazu die Zahlungen infolge des dauernden Ausscheidens. Das Mass des Ausscheidens ist durch die Intensitäten $\alpha^i_{[x]+t}$ und durch die eingeführten Pseudo-Intensitäten $\gamma^k_{[x]+t}$ gegeben.

Infolge der i^{ten} Ursache scheiden aus dem Stamme 1 $l^1_{[x]+t} \cdot \alpha^i_{[x]+t}\, dt$ Elemente aus, denen die Summe

$$l^1_{[x]+t} \cdot \alpha^i_{[x]+t} \cdot S^i_{[x]+t}\, dt$$

auszuzahlen ist. Durch alle Ursachen wird also die Summe fällig:

$$l^1_{[x]+t} \sum_1^n {}^i \alpha^i_{[x]+t} \cdot S^i_{[x]+t}\, dt \tag{14}$$

Übereinstimmend dazu muss an die aus dem Stamme 2 Ausscheidenden die Summe

$$l^2_{[x]+t} \sum_1^m {}^k \gamma^k_{[x]+t} \cdot U^k_{[x]+t}\, dt \tag{15}$$

ausbezahlt werden.

Nach Ablauf der $t + dt$ Zeiteinheiten sind noch $l_{[x]+t+dt}$ Elemente vorhanden, von denen jedes zu der Reserve ${}_{t+dt}V_{[x]}$ Anlass gibt. Für den ganzen Bestand beträgt somit die Reserve $l_{[x]+t+dt} \cdot {}_{t+dt}V_{[x]}$. Dieser letzte Ausdruck ist noch umzuformen.

Nach (1) gilt $l_{[x]+t+dt} = l_{[x]+t} + dl_{[x]+t}$. Da sich aber die Übertritte von einem Stamm zum andern im ganzen aufheben, kann auch geschrieben werden:

$$l_{[x]+t+dt} = l_{[x]+t} - l^1_{[x]+t} \sum_1^n{}^i \alpha^i_{[x]+t}\, dt - l^2_{[x]+t} \sum_1^m{}^k \gamma^k_{[x]+t}\, dt \quad (16)$$

Ferner ist ${}_{t+dt}V_{[x]} = {}_tV_{[x]} + d\ {}_tV_{[x]}$. Setzt man beide Ergebnisse ein, so findet man für:

$$l_{[x]+t+dt} \cdot {}_{t+dt}V_{[x]} = l_{[x]+t} \cdot {}_tV_{[x]} + l_{[x]+t} \cdot d\ {}_tV_{[x]}$$
$$- l^1_{[x]+t} \cdot {}_tV_{[x]} \sum_1^n{}^i \alpha^i_{[x]+t}\, dt - l^2_{[x]+t} \cdot {}_tV_{[x]} \sum_1^m{}^k \gamma^k_{[x]+t}\, dt \quad (17)$$

Nun muss die Reserve nach Ablauf des Zeitmomentes dt gleich sein der aufgezinsten Reserve zu Beginn, vermehrt um die Prämieneinnahmen und vermindert um die Auszahlungen. Wir brauchen bloss noch die entsprechenden Formeln gemäss dem Schema

$$(17) = (10) + (11) - (12) - (13) - (14) - (15)$$

zusammenzufassen. (Von den Grössen unendlichklein zweiter Ordnung haben wir gleich von Anfang an abgesehen.) Ferner dividieren wir durch $l_{[x]+t}$ und kürzen wie folgt:

$\dfrac{l^1_{[x]+t}}{l_{[x]+t}} = w^1_{[x]+t}$: Wahrscheinlichkeit, bei einem Eintrittsalter $[x]$ nach t Jahren noch dem Stamme 1 anzugehören.

$\frac{l^2_{[x]+t}}{l_{[x]+t}} = w^2_{[x]+t}$: Analoge Wahrscheinlichkeit nach t Jahren noch dem Stamme 2 anzugehören.

Indem wir noch passend anordnen, finden wir als *Reservendifferentialgleichung* den folgenden Ausdruck:

$$\frac{d\,{}_tV_{[x]}}{dt} - {}_tV_{[x]}\left(\delta + w^1_{[x]+t}\sum_1^n{}_i\,\alpha^i_{[x]+t} + w^2_{[x]+t}\sum_1^m{}_k\,\gamma^k_{[x]+t}\right)$$

$$- P\,w^1_{[x]+t} + w^2_{[x]+t}\cdot T_{[x]+t} + R_{[x]+t}$$

$$+ w^1_{[x]+t}\sum_1^n{}_i\,\alpha^i_{[x]+t}\cdot S^i_{[x]+t} + w^2_{[x]+t}\sum_1^m{}_k\,\gamma^k_{[x]+t}\cdot U^k_{[x]+t} = 0 \quad (18)$$

c) Die Integration der Reservendifferentialgleichung.

Die Berechnung der Reserve verlangt die Integration der Differentialgleichung (18). Zu diesem Zwecke müssen wir eine Sonderuntersuchung vorausschicken. Unter Verwendung unserer Abkürzungen kann geschrieben werden:

$$dl_{[x]+t} = -\,l_{[x]+t}\left(w^1_{[x]+t}\sum_1^n{}_i\,\alpha^i_{[x]+t} + w^2_{[x]+t}\sum_1^m{}_k\,\gamma^k_{[x]+t}\right)dt$$

Die Klammer bezeichnen wir abkürzend mit $H(x+t)$. Durch logarithmische Integration folgt sodann:

$$\frac{l_{[x]+t}}{l_{[x]}} = e^{-\int_0^t H(x+\tau)\,d\tau} \quad (19)$$

Die Reservendifferentialgleichung hat allgemein die Form

$$\frac{d\,y\,(t)}{dt} + \varphi\,(t)\,y\,(t) + f\,(t) = 0 \tag{20}$$

der linearen Differentialgleichung und besitzt als Lösung:

$$y\,(t) = e^{-\int\limits_0^t \varphi(t)dt} \left(C - \int\limits_0^t f\,(\lambda)\, e^{\int\limits_0^\lambda \varphi(t)dt}\, d\lambda \right) \tag{21}$$

Den Wert der Konstanten C bestimmen wir zu $C = y\,(o)$ bei $t = 0$. In unserm speziellen Fall wird $C = {}_0V_{[x]}$. Ferner bedeutet nach der soeben abgeleiteten Formel (19):

$$e^{-\int\limits_0^t \varphi(t)dt} = e^{\int\limits_0^t [\delta + H(x+\tau)]d\tau} = \frac{e^{\delta t}}{{}_tp_{[x]}} = \frac{l_{[x]}}{v^t\, l_{[x]+t}}$$

Indem wir dieses letzte Ergebnis auf die Integration nach dem Schema (21) anwenden, finden wir:

$$\begin{aligned} {}_tV_{[x]} = {}_0V_{[x]} \cdot \frac{l_{[x]}}{v^t\, l_{[x]+t}} + \frac{1}{v^t\, l_{[x]+t}} \int\limits_0^t v^\lambda\, l_{[x]+\lambda} \Big(& w^1_{[x]+\lambda} \cdot P - w^2_{[x]+\lambda} \cdot T_{[x]+\lambda} \\ - R_{[x]+\lambda} - w^1_{[x]+\lambda} \sum_1^n{}_i\, \alpha^i_{[x]+\lambda} \cdot S^i_{[x]+\lambda} - w^2_{[x]+\lambda} \sum_1^m{}_k\, \gamma^k_{[x]+\lambda} \cdot U^k_{[x]+\lambda} \Big)\, d\lambda \end{aligned} \tag{22}$$

Die erhaltene Beziehung stellt uns das Deckungskapital für eine ganz allgemeine Kasse dar; bevor wir den Ausdruck auf die verschiedenen Versicherungsarten hin anwenden, wollen wir ihn durch Überlegung überprüfen. Die gesamte Reserve muss gleich sein der aufgezinsten Anfangsreserve, vermehrt um die Summe der aufgezinsten Prämienzahlungen, vermindert um die Summe der Rentenzahlungen an den zweiten Stamm

und an den Gesamtbestand und vermindert endlich um die Auszahlungen infolge des endgültigen Ausscheidens. Um sodann noch auf die Durchschnittsreserve selber zu schliessen, muss durch $l_{[x]+t}$ dividiert werden. Wir erkennen ferner, dass unser Ausdruck das *retrospektive* Deckungskapital wiedergibt.

d) Anwendungen auf dem Gebiete der Einzelversicherung.

Nachdem wir eine allgemein gültige Formel für das Deckungskapital erhalten haben, müssen wir nun auch zeigen, dass wir aus ihr die Reserve für die Einzel- und für die Sozialversicherung durch *vereinfachende* Setzungen erhalten.

Für die *Einzelversicherung* ist die Prämie nach dem Alter $[x] + \lambda$ abzustufen, also

$$P \longrightarrow P_{[x]+\lambda} \tag{23}$$

1. Die Reservenformel von Loewy.

In der Einzellebensversicherung hat *Loewy* in seiner bereits erwähnten Untersuchung «Zur Theorie und Anwendung der Intensitäten in der Versicherungsmathematik» einen Ausdruck für das Deckungskapital hergeleitet, der sich nun als *Spezialfall* aus unserer allgemeinen Formel ergeben muss.

Loewy setzt die folgenden Versicherungsleistungen fest: aus einem Stamm $l_{[x]}$ Versicherter scheiden die Glieder aus n Ursachen aus; erfolgt das Ausscheiden aus der i^{ten} Ursache, so wird die Summe $S^i_{[x]+t}$ fällig. Als Masszahlen des Ausscheidens gelten die n Intensitäten $\mu^i_{[x]+t}$. Ferner wird allen Versicherten die Rente $R_{[x]+t}$ gutgeschrieben. Die Prämienzahlung erstreckt sich auf die *ganze Versicherungsdauer*. Der vereinfachende Ansatz ergibt sich aus dem Umstande, dass die *Prämienzahlung nicht aussetzt*. Mathematisch drückt sich diese

Annahme dadurch aus, dass wir nur einen *einzigen* Stamm zu betrachten haben. Also

$$w^1_{[x]+\lambda} = 1;\ w^2_{[x]+\lambda} = 0.$$

Bezeichnen wir noch die totale Ausscheideintensität $\alpha_{[x]+t}$ mit $\mu_{[x]+t}$, demnach

$$\mu_{[x]+t} = \sum_1^n{}^i \mu^i_{[x]+t}\,,$$

so lässt sich (22) sofort schreiben als:

$$_tV_{[x]} = \frac{1}{v^t\, l_{[x]+t}} \left(l_{[x]} \cdot {}_0V_{[x]} + \int_0^t v^\lambda\, l_{[x]+\lambda} \times \right.$$

$$\left. \times \left(P_{[x]+\lambda} - R_{[x]+\lambda} - \sum_1^n{}^i \mu^i_{[x]+\lambda} \cdot S^i_{[x]+\lambda} \right) d\lambda \right) \qquad (24)$$

Wie man erkennen kann, entspricht diese Beziehung genau der Formel (26*) in der genannten Arbeit *Loewys*. Damit ist aber auch nachgewiesen, dass sie ein Spezialfall der unseren ist. Es erscheint überflüssig, die *Loewysche* Formel auf die verschiedenen Arten der Einzellebensversicherung anzuwenden; der Ausdruck schliesst unter anderm auch die Invaliditätszusatzversicherung ein, wenn die Prämienzahlung erst bei dauernder Invalidität aussetzt. Soll hingegen die Beitragszahlung auch bei vorübergehender Invalidität unterbrochen werden, so kann unsere allgemeine Reservenformel Anwendung finden. Im nachfolgenden Beispiel wollen wir das Deckungskapital einer gemischten Versicherung mit Invaliditätszusatzversicherung unter der angenommenen Aussetzung der Prämienzahlung bestimmen.

2. Die Reserve einer gemischten Versicherung mit Invaliditätszusatzversicherung und Prämienbefreiung im Falle vorübergehender Invalidität.

Vorerst sind die Versicherungsleistungen zu umschreiben.

a) Erfolgt der Tod eines Versicherten vor dem Erreichen des Schlussalters $[x] + s$, so wird die Sterbesumme «1» fällig, gleichgültig ob das Mitglied aktiv, dauernd oder nur vorübergehend invalid war.

b) Erlebt der Versicherte das Schlussalter $[x] + s$ (sei es als aktiv, dauernd oder vorübergehend invalid), so erhält er die Summe «1».

c) Wird ein Versicherter vor dem Schlussalter $[x] + s$ dauernd invalid, so hat er Anrecht auf die Rente «1» bis zum Schlussalter.

d) Die Prämienzahlung erfolgt nur im Zustande der Aktivität.

Auf eine Erweiterung der Problemstellung sei hier nur hingewiesen. In der Praxis ist im allgemeinen für die Aussetzung der Prämienzahlung eine Karrenzfrist gesetzt; prinzipiell wird aber dadurch an unserer Formel nichts geändert, so dass wir auf die Berücksichtigung dieses Umstandes verzichten dürfen. Ebenso könnte festgesetzt werden, dass auch schon der temporär Invalide eine Rente erhält; wir haben aber dann genau die gleichen Verhältnisse wie bei der Krankenversicherung, die wir nachher behandeln.

Zuerst sind die Wahrscheinlichkeiten $w^1_{[x]+\lambda}$ und $w^2_{[x]+\lambda}$ zu deuten. Der erste Stamm enthält die Aktiven (und damit die Prämienzahler), der zweite die vorübergehend Invaliden. Die dauernd Invaliden scheiden aus der Betrachtung aus, für sie ist ein besonderes Deckungs-

kapital bereitzustellen. Wir erhalten also eine Zweiteilung des Invalidenbestandes: die eine Gruppe bezieht noch keine Leistungen, dafür ist ihr aber die Prämienzahlung erlassen; die andere Guppe umfasst die dauernd invalid Gewordenen. Es ist:

$w^1_{[x]+\lambda} \longrightarrow w^a_{[x]+\lambda}$: Wahrscheinlichkeit aktiv zu sein,

$w^2_{[x]+\lambda} \longrightarrow w^j_{[x]+\lambda}$: Wahrscheinlichkeit vorübergehend invalid zu sein.

Das endgültige Ausscheiden aus dem ersten Stamme erfolgt einzig durch Tod. Alle dauernd invalid werdenden Mitglieder ordnen wir zuerst dem Stamme der vorübergehend Invaliden bei. Es ist daher anzunehmen:

$\alpha^1_{[x]+\lambda} \longrightarrow \mu^a_{[x]+\lambda}$: Sterblichkeitsintensität eines Aktiven.

Im Stamme 2 können zwei Ursachen ein endgültiges Ausscheiden bewirken. Einmal die Sterblichkeit und dann der Austritt durch Erklärung der dauernden Invalidität. Es bedeute daher:

$\gamma^1_{[x]+\lambda} \longrightarrow \mu^j_{[x]+\lambda}$: Sterblichkeitsintensität eines vorübergehend Invaliden.

$\gamma^2_{[x]+\lambda} \longrightarrow \gamma^j_{[x]+\lambda}$: Intensität der dauernden Invalidierung eines vorübergehend Invaliden.

Wir halten noch fest, dass die Intensität der dauernden Invalidierung nicht identisch ist mit der gewöhnlichen Intensität der Invalidierung in der Theorie der Invalidenversicherung.

Von selber erklären sich die Setzungen:

$$T_{[x]+\lambda} = R_{[x]+\lambda} = 0;\ S^1_{[x]+\lambda} = U^1_{[x]+\lambda} = 1$$

Näher zu begründen ist die Abfindung bei dauernder Invalidität. Da die dauernd Invaliden aus unserer Betrachtung ausscheiden, ist ihnen, wie bereits angegeben, der Barwert ihrer künftigen Versicherungsleistungen mitzugeben. Aus dem Schema der Leistungen geht hervor, dass folgende 3 Barwerte zu bestimmen sind:

1. Barwert der temporären Invalidenrente 1 bis zum Schlussalter $[x] + s$:

$$_{|s-\lambda}a^{i}_{[x+\lambda]} = \int_0^{s-\lambda} v^{\tau} \cdot {}_{\tau}p^{i}_{[x+\lambda]}\, d\tau$$

2. Barwert der temporären Todesfallversicherung:

$$_{|s-\lambda}A^{i}_{[x+\lambda]} = \int_0^{s-\lambda} v^{\tau} \cdot {}_{\tau}p^{i}_{[x+\lambda]} \cdot \mu^{i}_{[x+\lambda]+\tau}\, d\tau$$

3. Barwert der Erlebensfallversicherung:

$$_{s-\lambda}E^{i}_{[x+\lambda]} = v^{s-\lambda} \cdot {}_{s-\lambda}p^{i}_{[x+\lambda]}$$

Die Summe aller Barwerte beträgt:

$$I_{[x+\lambda]:\overline{s-\lambda|}} = {}_{|s-\lambda}a^{i}_{[x+\lambda]} + {}_{|s-\lambda}A^{i}_{[x+\lambda]} + {}_{s-\lambda}E^{i}_{[x+\lambda]}$$

Führen wir die speziellen Setzungen in die allgemeine Reservenformel (22) ein, so finden wir:

$$_{t}V_{[x]} = {}_{0}V_{[x]} \frac{l_{[x]}}{v^{t}\, l_{[x]+t}} + \frac{1}{v^{t}\, l_{[x+t]}} \int_0^{t} v^{\lambda}\, l_{[x]+\lambda} \left(w^{a}_{[x]+\lambda} \cdot P_{[x]+\lambda} - \right.$$

$$\left. - w^{a}_{[x]+\lambda} \cdot \mu^{a}_{[x]+\lambda} - w^{j}_{[x]+\lambda} \cdot \mu^{j}_{[x]+\lambda} - w^{j}_{[x]+\lambda} \cdot \gamma^{j}_{[x]+\lambda} \cdot I_{[x+\lambda]:\overline{s-\lambda|}}\right) d\lambda \quad (25)$$

e) Anwendungen auf dem Gebiete der Sozialversicherung.

Nachdem die Anwendung unserer Reservenformel auf die Einzelversicherung an zwei Beispielen vorgenommen wurde, müssen wir noch zeigen, dass auch die Reserve in der Sozialversicherung durch vereinfachende Setzungen aus der allgemeinen Formel (22) hervorgeht.

In der Sozialversicherung ist der Beitrag nicht nach dem Alter abzustufen, er ergibt sich vielmehr aus der Gegenüberstellung der Belastung und Entlastung für den *ganzen* versicherten Bestand. Ob aber die gesamte Reserve als Differenz der *gesamten* Entlastung und Belastung berechnet wird oder auch als Summe der *Einzelreserven,* ist an sich methodisch ohne Belang.

In der Formel (22) ist demnach zu setzen:

$$P \longrightarrow P_{\Delta} \tag{26}$$

wo P_{Δ} den Durchschnittsbeitrag bedeutet. Die Reservenformel lautet daher:

$$\begin{aligned} {}_tV_{[x]} = {}_0V_{[x]} \frac{l_{[x]}}{v^t\, l_{[x]+t}} + \frac{1}{v^t\, l_{[x]+t}} \int_0^t v^{\lambda}\, l_{[x]+\lambda} \Big(& w^1_{[x]+\lambda} \cdot P_{\Delta} - w^2_{[x]+\lambda} \cdot T_{[x]+\lambda} - R_{[x]+\lambda} \\ & - w^1_{[x]+\lambda} \sum_1^n{}_i\, \alpha^i_{[x]+\lambda} \cdot S^i_{[x]+\lambda} - w^2_{[x]+\lambda} \sum_1^m{}_k\, \gamma^k_{[x]+\lambda} \cdot U^k_{[x]+\lambda} \Big)\, d\lambda \end{aligned} \tag{27}$$

Auch hier wiederum haben wir es mit dem *retrospektiven* Deckungskapital zu tun.

Anhand eines praktischen Beispieles wollen wir die Anwendung der erhaltenen Beziehung (27) auf eine Sozialversicherungskasse andeuten.

Die Reserve einer Betriebskrankenkasse.

Es handelt sich um die Bestimmung des individuellen retrospektiven Deckungskapitals für einen im Alter $[x]$ Eingetretenen nach t Jahren, wenn der Durchschnittsbeitrag P_{Δ} kontinuierlich entrichtet wird.

Wir setzen folgende Versicherungsleistungen voraus: ein Unternehmen zahle seinen Angestellten im Falle von Krankheit für die Zeit τ_1 den vollen Lohn aus, für die darauf folgende Zeit bis zum Termin τ_2 (τ_2 ist von Anfang an gemessen) noch den a^{ten} Teil. Wer länger als τ_2 Jahre lang (ununterbrochen) krank ist, wird als invalid erklärt und von der Pensionskasse übernommen. Es sei nun eine Krankenkasse derart eingerichtet, dass sie die Differenz bis zur vollen Besoldung vergüte und überdies das feste Krankengeld k entrichte.

Im Stamme 1 sind die «Gesunden» $l^g_{[x]+\lambda}$ enthalten, im Stamme 2 die Kranken $l^k_{[x]+\lambda}$ (die während der Dauer der Krankheit natürlich keinen Beitrag entrichten). Im Stamme der Kranken ist fernerhin eine Zweiteilung vorzunehmen. Diejenigen Elemente, die weniger als τ_1 Jahre lang krank sind, erhalten von der Kasse nur das Taggeld k, die andern noch die Differenz bis zum vollen Lohn. Da von der Kasse vom Jahreslohn B der Anteil $\left(1 - \frac{1}{a}\right) B$ aufzubringen ist, so entsteht das folgende Schema der Leistungen:

Taggeld bei einer Krankendauer von 0 bis τ_1 Jahren,	τ_1 bis τ_2 Jahren
k	$k + \dfrac{\left(1 - \frac{1}{a}\right) B}{365, \ldots}$

Als Zeiteinheit haben wir das Jahr festgelegt, die Taggelder sind daher auf diese Zeiteinheit zu beziehen. Dem Taggeld k entspricht dann $365, \ldots k = K$ und

$$k + \frac{\left(1 - \frac{1}{a}\right) B}{365, \ldots} \sim K + \left(1 - \frac{1}{a}\right) B$$

Ohne weiteres bedeutet:

$w^1_{[x]+\lambda} \longrightarrow w^g_{[x]+\lambda}$: Wahrscheinlichkeit gesund zu sein.

$w^2_{[x]+\lambda} \longrightarrow w^k_{[x]+\lambda}$: Wahrscheinlichkeit krank zu sein.

Die letzte Wahrscheinlichkeit ist noch näher zu untersuchen. Wenn wir noch $\nu^{12}_{[x]+t}$ mit der Intensität der Erkrankung identifizieren und kurz $\nu_{[x]+t}$ dafür setzen, und wenn ferner $p\,(x + \xi, x + t)$ die Wahrscheinlichkeit bedeutet, dass ein im Alter $[x] + \xi$ Erkrankter im Alter $[x] + t$ noch krank sei, so ist nach Formel (3) der gesamte Bestand der Kranken gegeben durch:

$$\int_{t-\tau_2}^{t} l^g_{[x]+\xi} \cdot \nu_{[x]+\xi} \cdot p\,(x + \xi, x + t)\, d\xi$$

Es ist zu beachten, dass zum Bestand der Kranken nur diejenigen Elemente zu zählen sind, die weniger als τ_2 Jahre lang krank sind.

Wir führen sodann zwei neue Wahrscheinlichkeiten ein. Einmal die Wahrscheinlichkeit, weniger als τ_1 Jahre lang krank zu sein gemäss der Gleichung:

$$* \, w^k_{[x]+t} = \frac{1}{l_{[x]+t}} \int_{t-\tau_1}^{t} l^g_{[x]+\xi} \cdot \nu_{[x]+\xi} \cdot p\,(x + \xi, x + t)\, d\xi$$

und analog die Wahrscheinlichkeit $^{**}w^k_{[x]+t}$ länger als τ_1, aber weniger lang als τ_2 krank zu sein:

$$^{**}w^k_{[x]+t} = \frac{1}{l_{[x]+t}} \int_{t-\tau_2}^{t-\tau_1} l^g_{[x]+\xi} \cdot \nu_{[x]+\xi} \cdot p\,(x+\xi,\, x+t)\, d\xi$$

Offenbar gilt dann:

$$w^k_{[x]+t} = {}^{*}w^k_{[x]+t} + {}^{**}w^k_{[x]+t}$$

Die Kasse zahlt kein Sterbegeld aus, mithin ist $S^i_{[x]+\lambda} = U^k_{[x]+\lambda} = 0$. Ebenso werden keine anderweitigen Renten ausbezahlt, also $R_{[x]+\lambda} = 0$. Der Leistung $T_{[x]+\lambda}$ entspricht dann

$$T_{[x]+\lambda} = K$$

$$T_{[x]+\lambda} = K + \left(1 - \frac{1}{a}\right) B\ ,$$

je nachdem die Krankheitsdauer τ_1 unter- oder überschritten ist. — Für das retrospektive Deckungskapital findet man bei Weglassung einer Anfangsreserve:

$${}_tV_{[x]} = \frac{1}{v^t\, l_{[x]+t}} \int_0^t v^\lambda\, l_{[x]+\lambda} \Big\{ w^g_{[x]+\lambda} \cdot P_\Delta -$$

$$- w^k_{[x]+\lambda} \cdot K - {}^{**}w^k_{[x]+\lambda} \left(1 - \frac{1}{a}\right) B \Big\}\, d\lambda \qquad (28)$$

Wir müssen uns mit diesem einzigen Beispiel begnügen. Es sei bemerkt, dass in ganz ähnlicher Weise auch die Einzelreserve in einer Invaliden- und

Witwenkasse bei Durchschnittsbeiträgen bestimmt werden kann.

f) Erweiterungen.

Es konnte sich in dieser kurzen Darstellung nur darum handeln, einige grundsätzliche Ergebnisse festzuhalten. — Nach der *retrospektiven Reserve* wäre sodann die *prospektive* zu berechnen; dabei muss aber berücksichtigt werden, dass bei Kassen mit Durchschnittsbeiträgen die beiden Methoden nicht auf das nämliche Resultat hinauslaufen. Durch neue Definitionen kann dennoch eine Formel erhalten werden, die wieder alle Fälle der Einzel- und Sozialversicherung in sich schliesst.

An den Ausdruck für das prospektive Deckungskapital anschliessend, lassen sich sodann die *Anwartschaften* auf irgendeine Versicherungsleistung mit Hilfe der Intensitäten einfach darstellen. Für die Einzellebensversicherung (unter Einschluss der individuellen Witwen- und Invalidenversicherung) sind diese Beziehungen durch *Loewy* und *Berger* bereits aufgestellt worden. Mit gleicher Leichtigkeit erhält man aber auch einen stilreinen Aufbau der *Kranken- und Unfallversicherung*. Als Grundelement in der Technik der Krankenversicherung gilt die *Krankenordnung;* in unserem Gebäude müsste sie durch die *Intensitäten der Erkrankung und Entkrankung* ersetzt werden.

Als *Hauptergebnis* unserer Untersuchung möchten wir festhalten: führt man in der Sozialversicherung (wie z. B. in der Kranken- und Unfallversicherung) ebenfalls die Intensitäten als Grundgrössen ein, so kann für das Deckungskapital in allen Zweigen der Personenversicherung, wie auch für die Anwartschaften eine

einzige Beziehung aufgestellt werden. Aus ihr gehen dann durch *vereinfachende* Setzungen die entsprechenden Ausdrücke in der Einzelversicherung wie in der Sozialversicherung hervor.

Wir behalten uns vor, in einer spätern Untersuchung ausführlicher auf diese Verhältnisse einzugehen.

Basel, Januar 1932.