

Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker
= Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of
Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 30 (1935)

Artikel: Veränderungen im Deckungskapital und in der Prämie einer
Pensionskasse bei Verschiebungen des Rücktrittsalters

Autor: Thalmann, W.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-554982>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 13.05.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

B. Wissenschaftliche Mitteilungen.

Veränderungen im Deckungskapital und in der Prämie einer Pensionskasse bei Verschiebungen des Rücktrittsalters.

Von Dr. **W. Thalmann**, Luzern.

Der Ruf nach früherer Pensionierung der älteren Arbeitskräfte ertönt immer eindringlicher. Es ist klar, dass die Verwirklichung dieser Forderung für die Pensionskassen von grosser finanzieller Tragweite ist, und die Mathematiker müssen gewärtig sein, dass Fragen dieser Art an sie gestellt werden.

Es bietet natürlich keinerlei Schwierigkeiten, bei einer Neuansetzung des Rücktrittsalters das Deckungskapital und die Prämie neu zu bestimmen. Hingegen erfordert diese Rechnung einen ziemlich erheblichen Zeitaufwand. Einer Anregung von Herrn Prof. Dr. Bohren Folge gebend, haben wir versucht, die Veränderungen des Deckungskapitals und der Prämie, welche durch Verschiebungen des Rücktrittsalters bedingt sind, als Funktion des Rücktrittsalters darzustellen.

Wir denken uns eine vollständig ausgebaute Pensionskasse. Die Leistungen an die Mitglieder seien folgende:

Renten an die Hinterlassenen im Todesfall.

Lebenslängliche Renten an die Invaliden, falls die Invalidität eintritt vor Erreichung des Rücktrittsalters, das allgemein mit s bezeichnet sei.

Lebenslängliche Altersrenten, wenn die Mitglieder als Aktive das Rücktrittsalter s erreichen.

Diesen Leistungen stehen Prämien gegenüber, die bis zum Alter s oder, falls Tod oder Invalidität früher eintreten, bis zu diesem Zeitpunkt zu entrichten sind.

Über die Höhe der Rentensätze machen wir nur eine Voraussetzung, nämlich dass sie mindestens vom Rücktrittsalter weg gleichbleiben soll. Es müssen also allfällige Abstufungen nach Dienstjahren beim Rücktrittsalter ihr Maximum erreicht haben.

Bei der so umschriebenen Pensionskasse sei in einem gewissen Zeitpunkt für das Rücktrittsalter s_1 das erforderliche Deckungskapital bestimmt. Nun stellt sich die Frage: Wie verändert sich dieses Deckungskapital, wenn das Rücktrittsalter auf s_2 gesenkt wird? Ebenso ist zu untersuchen, welche Veränderung die Prämie durch die Verschiebung des Rücktrittsalters erleidet.

1. Die Veränderung des Deckungskapitals.

Wir überlegen uns zunächst, welche Leistungen und Gegenleistungen durch die Veränderung des Schlusssalters nicht berührt werden. Es sind dies:

1. die Barwerte der am Rechentermin bereits laufenden Renten,
2. die Anwartschaft auf Hinterlassenenrenten,
3. die Anwartschaft auf jene Invalidenrenten, welche vor Erreichung des neuen Rücktrittsalters s_2 in Kraft treten,
4. die Barwerte der Prämien, welche vor dem Rücktrittsalter s_2 fällig werden.

Es ist klar, dass alle diese gleichbleibenden Posten unsere Rechnung nicht beeinflussen und daher weggelassen werden können.

Als Unterschied in den Kassenleistungen bleibt, dass jetzt an alle Aktiven, welche das Alter s_2 aktiv erreichen, von diesem Zeitpunkt weg lebenslängliche Renten ausgerichtet werden, während bisher, bei Zugrundelegung des Rücktrittsalters s_1 , diese Leute im Zeitraum s_2 bis s_1 nur bei Invalidität auf Rentenzahlungen Anspruch erheben konnten. Der Unterschied ist also zu erfassen als Barwert einer Aktivitätsrente, zahlbar vom Alter s_2 bis zur Invalidierung, spätestens aber bis zum Alter s_1 . Die Anwartschaft auf diese Aktivitätsrente ist für den x -jährigen Aktiven, wenn $x < s_2$

$$\frac{D_{s_2}^{aa}}{D_x^{aa}} a_{s_2 : s_1 - s_2}^{aa} = \frac{N_{s_2}^{aa} - N_{s_1}^{aa}}{D_x^{aa}}$$

Hat der Aktive das Alter s_2 schon erreicht, so tritt an Stelle der Anwartschaft der Barwert einer sofort beginnenden Rente, also für $s_2 < x < s_1$ entsteht die Mehrleistung:

$$a_{x : s_1 - x}^{aa} = \frac{N_x^{aa} - N_{s_1}^{aa}}{D_x^{aa}}$$

Auf der andern Seite entrichten nach der Senkung des Rücktrittsalters von s_1 nach s_2 die Aktiven zwischen s_2 und s_1 keine Prämien mehr wie bisher. Der Heutwert dieser Mindereinnahme ist, wenn wir die Prämie «1» voraussetzen, durch die gleichen Ausdrücke dargestellt, wie sie oben für die Mehrleistungen angegeben sind.

Wir führen nun ein:

r_m = maximaler Rentensatz

p = Prämiensatz,

wo r_m und p in % des Lohnes λ_x ausgedrückt sind, so dass $\frac{r_m \cdot \lambda_x}{100}$ der Betrag der Rente und $\frac{p \cdot \lambda_x}{100}$ der Betrag der Prämie ist. Dann wird die Deckungskapitalveränderung für den x -jährigen Aktiven:

$$\text{für } x < s_2 \quad \Delta V_x(s_1 \rightarrow s_2) = \frac{\lambda_x}{100 \cdot D_x^{aa}} (p + r_m) (N_{s_2}^{aa} - N_{s_1}^{aa})$$

$$\text{und für } s_2 < x < s_1 \quad \Delta V_x(s_1 \rightarrow s_2) = \frac{\lambda_x}{100 \cdot D_x^{aa}} (p + r_m) (N_x^{aa} - N_{s_1}^{aa})$$

Wir setzen zur Abkürzung: $K_1^{(s_2 s_1)} = \frac{1}{100} (N_{s_2}^{aa} - N_{s_1}^{aa})$

und nennen diese Differenzen die ersten Koeffizienten. Diese lassen sich aus der gewählten Aktivitätsordnung rasch und leicht ermitteln.

Es sei nun die Zahl der aktiven Kassenmitglieder des Alters x mit m_x bezeichnet. Dann ist die Veränderung des Gesamtdeckungskapitals dargestellt durch

$$(I) \quad \Delta V_{(s_1 \rightarrow s_2)} = \sum_{x=s_1-1}^{x=s_1-1} m_x \Delta V_x(s_1 \rightarrow s_2) = (p + r_m) \left[K_1^{(s_2 s_1)} \sum_x \frac{\lambda_x m_x}{D_x^{aa}} + \sum_{s_2}^{s_1-1} \frac{\lambda_x m_x}{D_x^{aa}} K_1^{(x s_1)} \right]$$

Diese Formel ist verhältnismässig rasch auszuwerten. $\lambda_x \cdot m_x$ bedeutet je die versicherte Lohnsumme der Aktiven des Alters x ; die Werte D_x^{aa} und die Koeffizienten K_1 sind aus der Aktivitätsordnung zu entnehmen. Bei Abschätzungen dürfte sich die Bildung von Altersgruppen empfehlen.

Ganz erheblich vereinfacht wird Formel I, wenn vorausgesetzt werden kann:

1. die Kasse befinde sich im sog. natürlichen Beharrungszustand, es sei also $m_x = c \cdot l_x^{aa}$ und
2. der Lohn sei vom Alter unabhängig, daher $\lambda_x = \lambda = \text{konstant}$.

Es wird dann:

$$\Delta V_{(s_1 \rightarrow s_2)} = \lambda \cdot c \cdot (p + r_m) \left[K_1^{(s_2 s_1)} \sum_{x_n}^{s_2-1} \frac{1}{v^x} + \sum_{s_2}^{s_1-1} \frac{K_1^{(x s_1)}}{v^x} \right]$$

Wir führen zur Abkürzung ein:

$$K_2^{(x_n s_2 s_1)} = \left[K_1^{(s_2 s_1)} \sum_{x_n}^{s_2-1} \frac{1}{v^x} + \sum_{s_2}^{s_1-1} \frac{K_1^{(x s_1)}}{v^x} \right]$$

Die Ausdrücke K_2 nennen wir die zweiten Koeffizienten. Sie sind abhängig von den Altern x_n , s_2 und s_1 , so dass jeder Kombination dieser 3 Alter ein bestimmter Wert K_2 entspricht. x_n ist in theoretischem Sinn das Alter, bei welchem der Eintritt in die Kasse erfolgt. Praktisch kann als x_n etwa das niedrigste vollbesetzte Alter angenommen werden, wobei vereinzelt jüngere Aktive ohne grosse Störung der Rechnung auf dieses Alter verschoben werden können.

Wir erhalten also:

$$(II) \Delta V_{(s_1 \rightarrow s_2)} = \lambda \cdot c \cdot (r_m + p) K_2^{(x_n s_2 s_1)}$$

In Worten lautet diese erstaunlich einfache Formel:

Unter der Voraussetzung, dass sich eine Kasse im natürlichen Beharrungszustand befindet und dass der Lohn der Aktiven als konstant angenommen werden darf, wird

die Veränderung des Deckungskapitals, welche durch die Verschiebung des Schlussalters bedingt ist, das Produkt von 4 Faktoren.

Diese sind:

1. λ = mittlerer Lohn,
2. $c = \frac{m_x}{l_x^{aa}}$ = Verhältnis zwischen der Aktivenzahl der Kasse und jener der zugrunde gelegten Aktivitätsordnung,
3. $(r_m + p)$ = Rentensatz + Prämiensatz,
4. $K_2^{(x_n s_2 s_1)}$ = ein für die gegebene Alterskombination konstanter, tabellierter Faktor.

Leider ist die Anwendungsmöglichkeit dieser schönen Formel eine ziemlich beschränkte. Es gibt nicht allzu viele Kassen, die sich im sog. natürlichen Beharrungszustand befinden. In vielen Fällen dürfte auch eine ausgesprochene Abhängigkeit des Lohnes vom Alter vorliegen. Wir möchten daher im folgenden noch unsere Formel einer häufig auftretenden Lohnentwicklung anpassen.

Wir nehmen an, der Lohn steige linear vom tiefsten Alter x_n bis zum Alter x_m , wo der sog. Maximallohn erreicht werde. Der Anfangslohn sei λ_{x_n} , der Maximallohn λ_{x_m} , die gesamte Lohnsteigerung also $a = \lambda_{x_m} - \lambda_{x_n}$. Die Periode der Lohnsteigerung sei n Jahre, so dass der Lohn pro Jahr $d = \frac{a}{n}$ steigt.

Dann wird unsere Formel zu:

$$(III) \quad \Delta V_{(s_1 \rightarrow s_2)} = c (r_m + p) [\lambda_{x_m} \cdot K_2^{(x_n s_2 s_1)} - (1+i)^{x_n} \{a A_n - dB_n\} K_1^{(s_2 s_1)}]$$

Darin bedeutet i der Zinsfuß; ferner ist

$$A_n = \frac{(1+i)^n - 1}{i}; \quad B_n = \frac{1+i}{i} \left[(n-1) (1+i)^{n-1} - \frac{(1+i)^{n-1} - 1}{i} \right]$$

Wir sehen, dass von der mit dem Maximallohn λ_{x_m} ausgewerteten Formel II ein Korrekturglied abgezählt werden muss, das scheinbar kompliziert ist, jedoch ziemlich rasch berechnet werden kann, da die Werte $(1+i)^{n-1}$ und A_n gewöhnlich aus Tafeln abgelesen werden können.

Die Anwendung von Formel III verlangt selbstredend Voruntersuchungen in bezug auf Beharrungszustand und Verlauf der Lohnkurve. Es ist leicht einzusehen, dass diese Voruntersuchungen nicht allzuviel Zeit in Anspruch nehmen dürfen, weil sich sonst eine Rückkehr zur genauen Formel I empfehlen würde. Die Entscheidung darüber, welche der 3 Formeln verwendet werden soll, muss von Fall zu Fall gefällt werden.

2. Veränderung der Prämie bei Verschiebung des Rücktrittsalters.

Die Prämie, welche dem Eintrittsalter x_n und dem bisherigen Schlussalter s_1 entspricht, sei p_{x_n} . Welcher Prämienzuschlag wird nötig, wenn das Rücktrittsalter von s_1 auf s_2 gesenkt wird?

Die Veränderung des Deckungskapitals bei Senkung des Rücktrittsalters ist für den x_n -jährigen Aktiven

$$\Delta V_{x_n}(s_1 \rightarrow s_2) = \frac{\lambda_{x_n}}{D_{x_n}^{ia}} (p + r_m) K_1^{(s_2 s_1)}$$

Dieses Betreffnis muss durch die Zusatzprämie vom Betrag $\frac{\lambda_{x_n} \Delta p_{x_n}}{100}$, zahlbar bis zum Alter s_2 , aufgebracht werden.

Wir schreiben also:

$$\frac{\lambda_{x_n}}{100} \cdot \Delta p_{x_n} \cdot a_{x_n:s_2-x_n}^{aa} = \frac{\lambda_{x_n}}{D_{x_n}^{aa}} (p + r_m) K_1^{(s_2 s_1)}$$

Daraus ergibt sich:

$$(IV) \quad \Delta p_{x_n} = 100 (p + r_m) \frac{K_1^{(s_2 s_1)}}{N_{x_n}^{aa} - N_{s_2}^{aa}}$$

Die Tabellierung der Koeffizienten K_1 & K_2 .

Die ersten Koeffizienten sind abhängig von den beiden Rücktrittsaltern s_2 und s_1 , die zweiten Koeffizienten sind sogar 3fach abgestuft, nämlich nach dem Eintrittsalter x_n und den beiden Rücktrittsaltern s_2 und s_1 . Es ist einleuchtend, dass die Erstellung eines so grossen Tabellenwerkes nicht zweckmässig wäre und vor allem den Rahmen dieses Aufsatzes erheblich überschreiten würde. Wir ermitteln an Stelle der K -Werte Hilfszahlen, aus welchen sich die K -Werte sehr einfach bestimmen lassen. Wir haben gesetzt:

$$K_1^{(s_2 s_1)} = \frac{1}{100} (N_{s_2}^{aa} - N_{s_1}^{aa})$$

An Stelle der $K_1^{(s_2 s_1)}$ -Werte geben wir die Werte $\frac{N_s^{aa}}{100}$.

Aus der einfach abgestuften $\frac{N_s^{aa}}{100}$ -Tabelle lassen sich die K_1 -Werte durch Subtraktion leicht gewinnen.

In ähnlicher Weise können an Stelle der Koeffizienten $K_2^{(x_n s_2 s_1)}$ Hilfswerte berechnet werden, aus denen die K_2 -Werte durch einfache Subtraktion hervorgehen. Bezeichnen wir nämlich mit w dasjenige Alter, für welches l_x^{aa} zu 0 wird, dann ist

$$K_2^{(x_n s_2 s_1)} = K_2^{(x_n s_2 w)} - K_2^{(x_n s_1 w)}$$

Wir erstellen also anstatt der 3fach abgestuften $K_2^{(x_n s_2 s_1)}$ -Tabelle die doppelt abgestufte $K_2^{(x_n s w)}$ -Tabelle.

Wir geben im folgenden für das Tabellenwerk von F. Deprez: Versicherungstechnische Berechnungsgrundlagen für Pensionskassen, 4 %, die Werte $\frac{N_s^{aa}}{100}$ und $K_2^{(x_n s w)}$. Wir beschränken uns dabei auf das männliche Geschlecht und auf die 3 Eintrittsalter $x_n = 20, 25$ und 30 . Das Rücktrittsalter s lassen wir von $w = 77$ bis zum Alter 60 gleiten. Wir setzen für Renten und Prämien die monatliche Zahlungsweise voraus. Wir gelangen zur folgenden Tabelle (siehe folgende Seite).

Um einerseits die Verwendung der vorstehenden Tabelle zu zeigen, hauptsächlich aber auch, um die Bedeutung der ganzen Frage hervorzuheben, geben wir noch ein *Beispiel*:

Eine Kasse versichere ihre Mitglieder nur gegen Invalidität, und zwar trete im Invaliditätsfall eine Rente von 70 % des anrechenbaren Lohnes in Kraft. Der anrechenbare Lohn sei konstant = Fr. 6000. Die Kasse befinde sich im sog. natürlichen Beharrungszustand und zwar sei für alle Alter:

$$m_x = 0,001 l_x^{aa}$$

Das Eintrittsalter sei $x_n = 30$.

Grundlagen: Deprez, 4 ‰, männliches Geschlecht.

Rücktritts- alter s	$^{(12)}N_s^{aa}$ 100	$K_2^{(x_n s w)}$		
		$x_n = 20$	$x_n = 25$	$x_n = 30$
1	2	3	4	5
76	0	60	58	56
75	1	411	399	386
74	3	1.432	1.392	1.343
73	9	3.696	3.589	3.458
72	20	8.005	7.765	7.472
71	41	15.419	14.938	14.353
70	74	27.220	26.340	25.268
69	127	45.030	43.517	41.676
68	207	70.586	68.124	65.129
67	322	105.400	101.584	96.941
66	476	150.405	144.756	137.882
65	676	205.983	197.961	188.201
64	925	272.044	261.066	247.709
63	1225	347.918	333.378	315.689
62	1578	432.884	414.161	391.382
61	1983	525.887	502.360	473.732
60	2442	626.336	597.357	562.101

Die Prämie ist unter diesen Voraussetzungen

$$p_{30} = \frac{70 \cdot a_{30}^{ai}}{^{(12)}a_{30}^{aa}} = 9,40 \text{ ‰}.$$

Das Deckungskapital für die Aktiven der geschlossenen Kasse berechnet sich auf

$$V_{(s_1)} = 248,0 \text{ Millionen.}$$

Dabei setzen wir $s_1 = 77$, weil nach den Grundlagen Deprez $l_{77}^{aa} = 0$ wird.

Nun wünscht die Kasse, die Altersversicherung einzuführen und stellt dem Mathematiker folgende Frage:

1. Wie muss das Deckungskapital verstärkt werden, wenn das Rücktrittsalter auf 70, 69, 68 — — — 60 Jahre angesetzt wird.

2. Welches sind die entsprechenden Aufschläge auf der Prämie des Neueintretenden.

Da sich die Kasse im natürlichen Beharrungszustand befindet und der Lohn vom Alter unabhängig betrachtet wird, können wir Formel II verwenden. Es wird:

$$\begin{aligned} \Delta V (77 \rightarrow s_2) &= \lambda \cdot c \cdot (r_m + p) \cdot K_2^{(30, s_2, 77)} \\ &= 6000 \cdot 0,001 (70 + 9,4) \cdot K_2^{(30, s_2, 77)} \end{aligned}$$

Die Werte $K_2^{(x_n s_2 w)}$ entnehmen wir der Kolonne 5 unserer Tabelle.

Die zweite Frage wird durch Formel IV beantwortet.

Es ist

$$\Delta p_{30} = 100 (70 + 9,4) \cdot \frac{K_1^{(s_2, 77)}}{N_{30}^{aa} - N_{s_2}^{aa}} = \frac{7940 \cdot \frac{N_{s_2}^{aa}}{100}}{N_{30}^{aa} - N_{s_2}^{aa}}$$

Die Werte $\frac{N_{s_2}^{aa}}{100}$ entnehmen wir Kolonne 2 unserer

Tabelle, während $(N_{30}^{aa} - N_{s_2}^{aa})$ aus dem Tabellenwerk von Deprez ermittelt wird.

Wir werten die beiden Formeln für $s_2 = 70, 69 - - 60$ aus und erhalten:

s_2	$\Delta V (77 \rightarrow s_2)$		$\Delta p (77 \rightarrow s_2)$	
	absolut in Millionen	in % des bisherigen Deckungskapitals der Aktiven	absolut in Lohnprozent	in % der bisherigen Prämie
70	12,0	4,8	0,12	1,3
69	19,9	8,0	0,21	2,2
68	31,0	12,5	0,34	3,6
67	46,2	18,6	0,53	5,6
66	65,7	26,5	0,79	8,4
65	89,7	36,2	1,12	11,9
64	118,0	47,6	1,55	16,5
63	150,4	60,6	2,06	21,9
62	186,5	75,2	2,67	28,4
61	225,7	91,0	3,39	36,1
60	267,8	108,0	4,22	44,9

Aus diesen Zahlenreihen wird deutlich ersichtlich, welche überragende Bedeutung der Festsetzung des Rücktrittsalters s in der Pensionsversicherung beizumessen ist.

Beispielsweise muss die gewählte Kasse bei Einführung des Rücktrittsalters 60 das Deckungskapital mehr als verdoppeln, und die Prämie ist um 45 % zu erhöhen.

Es ist daher wünschenswert, dass man überall dort, wo aus verständlichen Gründen die frühere Pensionierung gefordert und durchgeführt wird, auch der Rückwirkung auf die Finanzlage der Pensionskasse die nötige Aufmerksamkeit schenkt.