B. Wissenschaftliche Mitteilungen

Eine Näherungsformel für Übersterblichkeitszuschläge

Von *Heinrich Jecklin*, Zürich

I.

Die folgenden Ausführungen beziehen sich ausschliesslich auf die sogenannte Methode der multiplikativen Erhöhung der Sterbenswahrscheinlichkeit. Dieses Verfahren hat in der Praxis unter allen andern Methoden, welche für die Versicherung minderwertiger Risiken in Vorschlag gebracht wurden, die grösste Verbreitung gefunden. Es beruht bekanntlich auf dem Grundsatz, dass die Sterbenswahrscheinlichkeit eines anormalen Risikos gegenüber jener des normalen Risikos für alle Altersstufen um einen bestimmten Prozentsatz erhöht wird. Hieraus ergibt sich, dass bei der Bestimmung der Zuschlagsprämien für minderwertige Risiken zwei getrennte Aufgaben vorliegen.

Die erste Aufgabe ist medizinischer Natur, indem es sich darum handelt, auf Grund der Feststellungen des Untersuchungsarztes die im Verhältnis zum normalen Risiko in Anrechnung zu bringende Sterblichkeitserhöhung anzugeben. Es ist einleuchtend, dass eine gute Risikentaxierung insbesondere von einer Stelle vorgenommen werden kann, welche die Möglichkeit hat, ausgedehnte Erfahrungen zu sammeln und zu verwerten, wie dies beim international arbeitenden Rückversicherer der Fall ist.

Die zweite Aufgabe ist Sache des Mathematikers, nämlich die Bestimmung der Zuschlagsprämie, welche der angesetzten Übersterblichkeit entspricht. Eine genaue Berechnung müsste in jedem einzelnen Fall auf Grund der mit den Ausscheidewahrscheinlichkeiten $\overset{*}{q}_x = q_x\,(1+\alpha)$ gebildeten Absterbeordnung erfolgen, wobei q_x die

Die Ziffern im Text beziehen sich auf die Literaturangaben am Schluss der Arbeit.

normale Sterbenswahrscheinlichkeit und α die zu derselben im betreffenden Fall angenommene konstante multiplikative Sterblichkeitserhöhung bedeuten. Es wäre demnach, bei im übrigen gegebenen Rechnungsgrundlagen, für jeden Übersterblichkeitssatz eine besondere Abfallsordnung zu berechnen.

Für die Praxis hat man sich zumeist damit beholfen, dass man nur eine beschränkte Zahl von Übersterblichkeitsklassen aufstellte und für diese nach bestimmten technischen Grundlagen ein Tabellenwerk durchrechnete. Wenn auch einesteils die Vorteile eines solchen Vorgehens nicht zu verkennen sind, so haftet ihm anderseits der schwere Nachteil an, dass bei einem Übergang in den Tarifen der normalen Risiken zu andern Rechnungsgrundlagen folgerichtig auch das Tabellenmaterial für die anormalen Leben von Grund aus entsprechend umgestellt werden muss. Eine stetig-dynamische Anpassung an verschiedene Rechnungsgrundlagen wäre bei diesem Verfahren nur in mühsamem und zum Ergebnis in keinem Verhältnis stehenden Arbeitsaufwand zu erreichen.

Es wurden daher schon verschiedene Vorschläge zur Approximierung der Sonderprämien für Sterblichkeitserhöhung innerhalb tragbarer Grenzen ausgearbeitet [1]. Dabei rechtfertigt sich bis zu gewissem Grade eine auf Kosten der Genauigkeit gehende Vereinfachung aus der Überlegung, dass die auf Basis des ärztlichen Urteils angesetzte Übersterblichkeit selbst eine im Wesen der Sache liegende Schwankungsbreite beanspruchen muss. Wir werden im folgenden eine neue Näherungsformel für Übersterblichkeitszuschläge bei gemischten Versicherungen ableiten, welche bezüglich der Sterbetafel sowohl als des technischen Zinsfusses frei beweglich ist.

II.

Es darf wohl als bekannt vorausgesetzt werden, dass sich die Zusatzprämie für Übersterblichkeit bei Variation der letzteren mit grosser Näherung proportional ändert, oder mit andern Worten dass einer Vervielfachung eines bestimmten Übersterblichkeitssatzes näherungsweise auch eine gleiche Vervielfachung der bezüglichen Zusatzprämie entspricht. Es genügt demnach, die Extraprämie Z für eine Übersterblichkeit von 100% (d. h. $\alpha = 1$) zu kennen, woraus sich die Sonderprämie für beliebigen anderen Übersterblichkeitssatz einfach durch Multiplikation mit demselben ergibt [2].

Stützt man sich bei der Erfassung der Übersterblichkeit statt auf eine multiplikative Erhöhung der Sterbenswahrscheinlichkeit auf eine solche der Sterbensintensität, so entspricht einer Übersterblichkeit von 100 % die aus der ursprünglichen Absterbeordnung abgeleitete Absterbeordnung auf zwei verbundene gleichaltrige Leben [3], [4]. Also gilt, wenn wir mit $P^*_{x\overline{n}|}$ die auf Grund der Tafel mit 100 %iger Übersterblichkeit berechnete Nettoprämie der gemischten Versicherung bezeichnen,

$$Z = P^*_{x\overline{n}|} - P_{x\overline{n}|} \sim P_{xx\overline{n}|} - P_{x\overline{n}|}$$

Nun ist offenbar die Absterbeordnung mit 100 %iger Übersterblichkeit, bei welcher

$$l^*_{x+1} = l^*_x \cdot (1 - 2q_x)$$

rascher abfallend als die Sterbetafel auf gleichaltrige verbundene Leben mit

$$l_{x+1,\,x+1} = l_{x,\,x} \cdot (1 - 2q_x + q_x^2)$$

weshalb $P^*_{x\overline{n}|} > P_{xx\overline{n}|}$ und damit auch $Z > P_{xx\overline{n}|} - P_{x\overline{n}|}$. Der Unterschied ist jedoch sehr gering, im Mittel etwa 1 % von Z [1], [5].

Nach einer bekannten Näherungsformel von Lidstone gilt [6]

$$P_{xy\overline{n}|} \sim P_{x\overline{n}|} + P_{y\overline{n}|} - P_{\overline{n}|}$$

also insbesondere $$P_{xx\overline{n}|} \sim P_{x\overline{n}|} + P_{x\overline{n}|} - P_{\overline{n}|}$$

woraus also folgt $$P_{xx\overline{n}|} - P_{x\overline{n}|} \sim P_{x\overline{n}|} - P_{\overline{n}|}. \qquad [7]$$

Im allgemeinen, d. h. bis etwa zum Endalter $x + n = 70$ — womit der für die Praxis wichtige Bereich erfasst ist —, gilt $P_{xx\overline{n}|} - P_{x\overline{n}|} > P_{x\overline{n}|} - P_{\overline{n}|}$. Es ist jedoch nicht möglich, für die beiden Differenzen eine allgemein gültige arithmetische Ungleichung anzugeben. Der Grund ist sofort ersichtlich aus der von Jacob gegebenen Darstellung [2]

$$P_{xx\overline{n}|} - P_{x\overline{n}|} = P_{x\overline{n}|} - P_{\overline{n}|} + \frac{1}{\text{a}_{x\overline{n}|}} \cdot \sum_{t=0}^{n-1} {}_tE_x \cdot v \cdot q_{x+t} \cdot ({}_{t+1}V_{\overline{n}|} - {}_{t+1}V_{xx\overline{n}|}),$$

indem die Reservedifferenz in der Klammer im allgemeinen positiv ist, bei grossem n aber negativ ausfallen kann.

Wir haben also nunmehr für Z die im allgemeinen gültige Näherung

$$Z \sim P_{xx\overline{n}|} - P_{x\overline{n}|} > P_{x\overline{n}|} - P_{\overline{n}|}$$

oder
$$Z \sim \frac{1}{a_{xx\overline{n}|}} - \frac{1}{a_{x\overline{n}|}} > \frac{1}{a_{x\overline{n}|}} - \frac{1}{a_{\overline{n}|}}.$$

Anderseits folgt aus spezieller Anwendung der Ungleichung von Jensen [8], [9] dass stets gilt

$$\frac{a_{\overline{n}|}}{a_{x\overline{n}|}} > \frac{a_{x\overline{n}|}}{a_{xx\overline{n}|}}$$

woraus sich in leichter Umformung ergibt

$$Z \sim \frac{1}{a_{xx\overline{n}|}} - \frac{1}{a_{x\overline{n}|}} < \left(\frac{1}{a_{x\overline{n}|}} - \frac{1}{a_{\overline{n}|}}\right) \cdot \frac{a_{x\overline{n}|}}{a_{xx\overline{n}|}} < \left(\frac{1}{a_{x\overline{n}|}} - \frac{1}{a_{\overline{n}|}}\right) \cdot \frac{a_{\overline{n}|}}{a_{x\overline{n}|}}.$$

Es wäre nun naheliegend, eine Verbesserung der Approximation für Z durch Mittelung aus den Ungleichungen zu versuchen. Unser Ziel ist jedoch, in ähnlicher Weise, ausgehend von der vielfach benutzten Näherung $Z \sim \frac{1}{a_{x\overline{n}|}} - \frac{1}{a_{\overline{n}|}}$, welche aber meist zu niedrige Werte liefert, eine ebenso einfache, aber verbesserte Approximation aufzustellen.

III.

Die Näherungsformel von Lidstone kann auch Anwendung finden bei Variation des technischen Zinsfusses [10], derart, dass

$$P'_{x\overline{n}|} \sim P_{x\overline{n}|} + P'_{\overline{n}|} - P_{\overline{n}|}$$

wenn die respektiven Werte zu den Zinsfüssen i' und i gerechnet sind. Damit gilt auch

$$\frac{1}{a'_{x\overline{n}|}} - \frac{1}{a'_{\overline{n}|}} \sim \frac{1}{a_{x\overline{n}|}} - \frac{1}{a_{\overline{n}|}}$$

und wenn $i' > i$, so ist fast immer, mit Ausnahme sehr grosser n,

$$\frac{1}{a'_{x\overline{n}|}} - \frac{1}{a'_{\overline{n}|}} > \frac{1}{a_{x\overline{n}|}} - \frac{1}{a_{\overline{n}|}}.$$

Setzen wir hierin $i' = i$ und $i = 0$, so folgt die fast stets gültige Ungleichung

$$\frac{1}{a_{\overline{xn}|}} - \frac{1}{a_{\overline{n}|}} > \frac{1}{e_{\overline{xn}|}} - \frac{1}{n}.$$

Anderseits gilt ohne Einschränkung — wieder in spezieller Anwendung der Ungleichung von Jensen [8] —, wenn $i' > i$

$$\frac{a_{\overline{n}|}}{a'_{\overline{n}|}} > \frac{a_{\overline{xn}|}}{a'_{\overline{xn}|}}$$

woraus folgt

$$\frac{1}{a'_{\overline{xn}|}} - \frac{1}{a'_{\overline{n}|}} < \left(\frac{1}{a_{\overline{xn}|}} - \frac{1}{a_{\overline{n}|}}\right) \cdot \frac{a_{\overline{xn}|}}{a'_{\overline{xn}|}} < \left(\frac{1}{a_{\overline{xn}|}} - \frac{1}{a_{\overline{n}|}}\right) \cdot \frac{a_{\overline{n}|}}{a'_{\overline{n}|}}$$

und insbesondere, wenn hierin $i' = i$ und $i = 0$ gesetzt wird,

$$\frac{1}{a_{\overline{xn}|}} - \frac{1}{a_{\overline{n}|}} < \left(\frac{1}{e_{\overline{xn}|}} - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{e_{\overline{xn}|}}{a_{\overline{xn}|}} < \left(\frac{1}{e_{\overline{xn}|}} - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{n}{a_{\overline{n}|}}.$$

Dass — wie hier ersichtlich — stets $\frac{n}{a_{\overline{n}|}} > \frac{e_{\overline{xn}|}}{a_{\overline{xn}|}}$, kann übrigens auch direkt gefolgert werden; denn in der expliziten Anschreibung

$$\frac{n}{\sum v^t} > \frac{\sum l_{x+t}}{\sum l_{x+t} \cdot v^t}$$

haben wir, da l_{x+t} und v^t beides positive und fallende Funktionen sind, eine spezielle Verifikation der Ungleichung von Tchebycheff [8]. Für praktische Belange der Näherungsrechnung dürfen jedoch in gewissem Rahmen die beiden Quotienten $\frac{e_{\overline{xn}|}}{a_{\overline{xn}|}}$ und $\frac{n}{a_{\overline{n}|}}$ einander gleichgesetzt werden, was sich durch die folgenden Überlegungen begründen lässt.

Nach der Theorie der Kapitalansammlung von Cantelli [11] kann man Ausdrücke von der Form

$$\frac{\sum l_{x+t} \cdot k_{x+t} \cdot v^t}{\sum l_{x+t} \cdot v^t}$$

näherungsweise ersetzen durch

$$\frac{\sum k_{x+t} \cdot v^t}{\sum v^t}.$$

Dabei bedeutet k_{x+t} eine versicherungstechnische Funktion, wie z. B. Sterbenswahrscheinlichkeit, Invalidisierungswahrscheinlichkeit usw. So finden wir z. B. in einer Arbeit von Jacob [12], indem er $k_{x+t} = q_{x+t} \cdot v$ setzt, die Näherungsformel

$$\frac{\sum l_{x+t} \cdot q_{x+t} \cdot v^{t+1}}{\sum l_{x+t} \cdot v^t} \sim \frac{\sum q_{x+t} \cdot v^{t+1}}{\sum v^t}.$$

Für unseren Zweck setzen wir $k_{x+t} = r^t$ und können dann schreiben

$$\frac{e_{\overline{xn}|}}{a_{\overline{xn}|}} = \frac{\sum\limits_{t=0}^{n-1} l_{x+t}}{\sum\limits_{t=0}^{n-1} l_{x+t} \cdot v^t} = \frac{\sum l_{x+t} \cdot r^t \cdot v^t}{\sum l_{x+t} \cdot v^t} \sim \frac{\sum r^t \cdot v^t}{\sum v^t} = \frac{n}{a_{\overline{n}|}}.$$

Wenn wir uns nun bezüglich unserer Näherungsformel im folgenden für die Verwendung des Quotienten $\frac{n}{a_{\overline{n}|}}$ entscheiden, so nicht nur, weil er einfacher ist, sondern weil damit auch eine merkliche Verbesserung der Approximation von Z erwartet werden kann.

Die graphische Darstellung am Schluss zeigt für die Alter $x = 30$, 40 und 50 den Verlauf der Funktionen

$$\frac{1}{a^*_{\overline{xn}}} - \frac{1}{a_{\overline{xn}|}}, \; \frac{1}{a_{\overline{xn}|}} - \frac{1}{a_{\overline{n}|}}, \; \frac{1}{e_{\overline{xn}|}} - \frac{1}{n} \text{ und } \left(\frac{1}{e_{\overline{xn}|}} - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{n}{a_{\overline{n}|}},$$

und es ist auch auf Grund des Schaubildes naheliegend, durch einfache Mittelbildung aus den beiden letzteren Funktionswerten eine Approximation für Z zu versuchen, welche bis zum Endalter $x + n = 70$ brauchbare Werte liefern dürfte.

Vorerst ersetzen wir noch in weiterer Vereinfachung $\frac{1}{a_{\overline{n|}}}$ durch die grobe, aber plausible Näherung $\frac{1}{a_{\overline{n|}}} \sim \frac{1}{n} + 0{,}5 \cdot i$, so dass also $\frac{n}{a_{\overline{n|}}} \sim 1 + 0{,}5 \cdot n \cdot i$.

Damit haben wir, in Mittelung der beiden Ungleichungen für die Differenz $\frac{1}{a_{\overline{xn|}}} - \frac{1}{a_{\overline{n|}}}$ folgende Näherungsformel für Z gefunden

$$Z \sim \frac{1}{2}\left(\frac{1}{e_{\overline{xn|}}} - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{e_{\overline{xn|}}} - \frac{1}{n}\right) \cdot (1 + 0{,}5 \cdot n \cdot i)$$

oder

$$\boxed{Z \sim \left(\frac{l_x}{\sum_{t=0}^{n-1} l_{x+t}} - \frac{1}{n}\right) \cdot (1 + 0{,}25 \cdot n \cdot i)}$$

Die Sonderprämie für minderwertige Risiken ist also genähert eine lineare Funktion des technischen Zinssatzes i.

IV.

Ist die Übersterblichkeit nicht 100 %, sondern gleich einem beliebigen Satz α, so wird — wie bereits erwähnt — die bezügliche Sonderprämie erhalten, indem die der 100 %igen Übersterblichkeit entsprechende Extraprämie Z, bzw. deren Näherungswert, einfach mit diesem Satz α multipliziert wird [1], [2], [3]. Wenn also beispielsweise eine Übersterblichkeit von 75 % vorliegt, so ist die Zusatzprämie gleich $0{,}75 \cdot Z$.

Es ist eine nicht zu unterschätzende Eigenschaft unserer Näherungsformel, dass sie ohne Kommutationszahlen, nur mit Hilfe der Ausscheideordnung allein in kurzer Rechnung für beliebigen Zinsfuss einen approximierten Wert für die Extraprämie liefert, der für die nach Eintrittsalter und Versicherungsdauer häufigeren Kombinationen der Praxis eine im allgemeinen bessere Näherung an den genauen Wert darstellt, als sie sich nach der sonst wohl einfachsten

Methode mittels der Formel $Z \sim \left(\frac{1}{a_{\overline{xn}|}} - \frac{1}{a_{\overline{n}|}}\right)$ ergibt. Abgesehen von letztgenanntem Verfahren benötigt man ansonst für die Berechnung der Anormalenzuschläge die Kommutationszahlen für jede Übersterblichkeitsklasse oder ein sonstwie starres Tabellensystem (wie z. B. bei der von Albers-Wissing vorgeschlagenen Methode [1]; unsere Näherungsformel dagegen ist bezüglich Übersterblichkeitssatz, Sterbetafel und Zinsfuss frei beweglich.

Zufolge der Darstellung der Sonderprämie als lineare Funktion des technischen Zinssatzes ist es auch sehr leicht möglich, bei bereits bekannter Sonderprämie dieselbe im Dreisatz auf einen andern technischen Zinssatz umzurechnen. Man kann einwenden, dass hier — als bei einer reinen Risikoversicherung — dem Zinsfuss keine grosse Bedeutung zukomme. Einem Zinsunterschied von 1 % entspricht jedoch im Mittel eine Differenz in der Sonderprämie von etwa 3 %, was immerhin von der Grössenordnung der laufenden Provision ist. — Es ist übrigens eine spezifische, aber leicht erklärliche Eigenart der Sonderprämie, dass sie mit steigendem Zinsfuss grösser wird.

Zur Illustration des Gesagten sind nachfolgend zwei Aufstellungen angefügt. Tabelle I gibt, beim festen Zinsfuss von 3½ %, einen Vergleich der nach verschiedenen Sterbetafeln berechneten genauen Extraprämie für 100 % Übersterblichkeit (also Verdoppelung der Sterbenswahrscheinlichkeit) mit den nach der Formel $Z \sim \left(\frac{1}{a_{\overline{xn}|}} - \frac{1}{a_{\overline{n}|}}\right)$ und den nach unserem Vorschlag bestimmten Näherungswerten. Tabelle II gibt eine analoge Gegenüberstellung, nur dass hier die Sterbetafel festgehalten ist (Schweiz 1921—1930, Männer) und der technische Zinssatz variiert wird. Diese tabellarischen Zusammenstellungen dürften am besten die Leistungsfähigkeit der vorgängig aufgestellten Näherungsformel belegen. Für Versicherungsdauern $n > 30$ möchten wir ihre Anwendung nicht vorbehaltlos empfehlen.

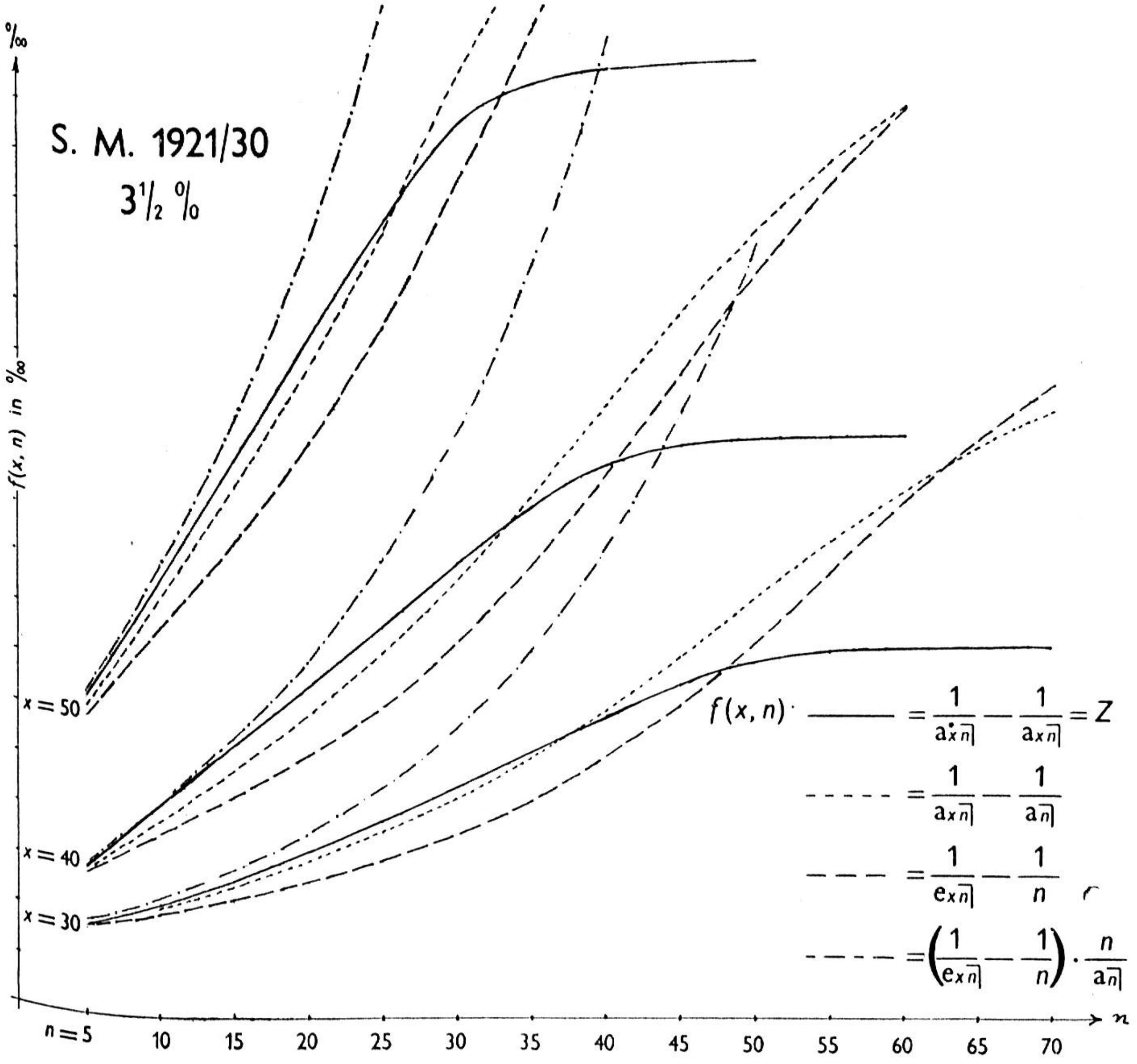
‰
S. M. 1921/30
3½ %
f(x, n) in ‰
x = 50
x = 40
x = 30
n = 5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
55
60
65
70
n
$f(x,n)$ —— $= \frac{1}{\ddot{a}_{x\overline{n}|}} - \frac{1}{a_{x\overline{n}|}} = Z$
- - - - $= \frac{1}{a_{x\overline{n}|}} - \frac{1}{a_{\overline{n}|}}$
— — — $= \frac{1}{e_{x\overline{n}|}} - \frac{1}{n}$
— - — $= \left(\frac{1}{e_{x\overline{n}|}} - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{n}{a_{\overline{n}|}}$

Tabelle I

Technischer Zinsfuss $3\frac{1}{2}$ %

$a =$ genau berechnetes Z

$$b = \frac{1}{a_{\overline{xn}|}} - \frac{1}{a_{\overline{n}|}}$$

$$c = \left(\frac{1}{e_{\overline{xn}|}} - \frac{1}{n}\right) \cdot (1 + 0{,}25 \cdot n \cdot i)$$

	$x = 30$			$x = 40$			$x = 50$		
n	a	b	c	a	b	c	a	b	c
	Tafel der 17 englischen Gesellschaften								
10	4.53	4.40	4.41	5.81	5.62	5.65	9.98	9.48	9.56
15	5.17	4.99	4.98	6.95	6.66	6.69	12.45	11.69	11.85
20	5.80	5.55	5.55	8.17	7.79	7.90	14.99	14.15	14.60
25	6.47	6.18	6.23	9.46	9.10	9.39			
30	7.20	6.91	7.08						
	Tafel American Experience								
10	4.43	4.32	4.33	5.39	5.22	5.24	8.48	8.12	8.18
15	5.02	4.85	4.83	6.33	6.07	6.08	10.61	10.06	10.19
20	5.58	5.34	5.32	7.33	7.01	7.07	12.91	12.29	12.66
25	6.15	5.88	5.89	8.47	8.12	8.33			
30	6.79	6.49	6.59						
	Tafel der 23 deutschen Gesellschaften M und W I								
10	4.82	4.68	4.69	6.81	6.55	6.59	11.60	10.94	11.04
15	5.58	5.38	5.38	8.13	7.74	7.78	14.52	13.55	13.76
20	6.35	6.08	6.10	9.54	9.05	9.18	17.41	16.37	16.92
25	7.15	6.84	6.92	11.03	10.56	10.93			
30	8.00	7.70	7.94						
	Abelsche Aggregattafel								
10	2.18	2.17	2.18	4.64	4.53	4.56	10.09	9.63	9.62
15	2.74	2.70	2.73	5.80	5.64	5.70	12.84	12.17	12.39
20	3.34	3.30	3.36	7.08	6.91	7.07	15.55	15.00	15.55
25	4.01	3.99	4.13	8.43	8.39	8.78			
30	4.73	4.80	5.10						
	Deutsche Volkssterbetafel Männer 1924—1926								
10	2.08	2.05	2.05	3.18	3.12	3.14	6.62	6.40	6.46
15	2.40	2.36	2.35	3.93	3.83	3.86	8.54	8.19	8.32
20	2.76	2.71	2.71	4.79	4.67	4.76	10.65	10.30	10.64
25	3.19	3.13	3.17	5.79	5.70	5.93			
30	3.70	3.65	3.78						

Tabelle II

Schweizerische Volkssterbetafel, Männer, 1921—1930

$a =$ genau berechnetes Z

$$b = \frac{1}{a_{x\overline{n}|}} - \frac{1}{a_{\overline{n}|}}$$

$$c = \left(\frac{1}{e_{x\overline{n}|}} - \frac{1}{n}\right) \cdot (1 + 0{,}25 \cdot n \cdot i)$$

	$x = 30$			$x = 40$			$x = 50$		
n	a	b	c	a	b	c	a	b	c
					2½%				
10	2.20	2.17	2.17	4.23	3.80	3.81	8.51	8.13	8.17
15	2.59	2.53	2.54	5.24	4.70	4.73	10.74	10.13	10.22
20	3.13	2.98	2.99	6.32	5.74	5.81	13.14	12.44	12.69
25	3.73	3.52	3.56	7.50	6.96	7.13			
30	4.40	4.18	4.30						
					3%				
10	2.23	2.19	2.20	4.28	3.83	3.86	8.59	8.21	8.27
15	2.63	2.58	2.58	5.31	4.78	4.81	10.87	10.27	10.40
20	3.19	3.04	3.05	6.41	5.85	5.94	13.25	12.64	12.97
25	3.80	3.59	3.66	7.62	7.09	7.33			
30	4.48	4.27	4.44						
					3½%				
10	2.25	2.21	2.22	4.32	3.87	3.90	8.67	8.28	8.36
15	2.66	2.62	2.62	5.38	4.85	4.89	10.98	10.42	10.57
20	3.24	3.10	3.12	6.50	5.94	6.07	13.44	12.83	13.25
25	3.87	3.67	3.76	7.72	7.21	7.52			
30	4.54	4.36	4.57						
					4%				
10	2.27	2.24	2.25	4.35	3.91	3.95	8.74	8.37	8.46
15	2.70	2.66	2.67	5.45	4.92	4.98	11.09	10.55	10.75
20	3.29	3.15	3.19	6.58	6.04	6.20	13.57	13.01	13.54
25	3.93	3.74	3.85	7.82	7.32	7.71			
30	4.60	4.43	4.71						
					4½%				
10	2.28	2.27	2.27	4.38	3.96	3.99	8.80	8.45	8.56
15	2.74	2.70	2.71	5.50	4.98	5.06	11.20	10.68	10.92
20	3.33	3.21	3.25	6.66	6.13	6.33	13.69	13.18	13.82
25	3.98	3.80	3.95	7.90	7.43	7.90			
30	4.65	4.50	4.84						

Literaturverzeichnis

[1] *Albers-Wissing*: «Ein Beitrag zur Versicherung anomaler Risiken in der Lebensversicherung», Archiv für mathematische Wirtschafts- und Sozialforschung, Bd. VIII, Heft 2.

[2] *Jacob*: «Zur Theorie der Versicherung minderwertiger Leben», Assekuranz-Jahrbuch, Bd. 55.

[3] *Berger*: «Die Prinzipien der Lebensversicherungstechnik», Bd. II, S. 131.

[4] *Wünsche*: «Zur rechnerischen Erfassung der Übersterblichkeit in der Technik der Lebensversicherung», Neumanns Zeitschrift für Versicherungswesen 1939, Nr. 2.

[5] *Jecklin*: «Bemerkung betreffend die näherungsweise Bestimmung von Übersterblichkeitszuschlägen.» Das Versicherungsarchiv 1937, Nr. 5.

[6] *Meyer*: «Näherungsmethoden für Versicherungen verbundener Leben», Neumanns Zeitschrift für Versicherungswesen 1928, Nr. 7.

[7] *Koeppler*: «Die Berechnung der Zuschlagsprämien für erhöhte Sterbegefahr bei analytischer Prämienberechnung.» Das Versicherungsarchiv 1936, Nr. 12.

[8] *Steffensen*: «On a Generalization of certain inequalities by Tchebychef and Jensen.» Skandinavisk Aktuarietidskrift 1925, Nr. 3/4.

[9] *Berger*: «Mathematik der Lebensversicherung», S. 101.

[10] *Jacob*: «Su alcuni metodi di approssimazione per il calcolo delle variazioni del premio e delle riserve matematiche col variare del saggio d'interesse.» Aktuarkongress Paris 1937, Bd. I.

[11] *Margulies*: «Allgemeines über Sterblichkeitstafeln», Die Versicherung 1935, Nr. 25.

[12] *Jacob*: «Sui metodi di approssimazione per il calcolo dei premi nelle assicurazioni d'invalidità.» Aktuarkongress Rom 1934, Bd. I.