Untersuchungen zum Erneuerungsproblem nichtkonstanter Gesamtheiten

Autor(en): **Tarján, Rudolf**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **44 (1944)**

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-550811

Untersuchungen zum Erneuerungsproblem nichtkonstanter Gesamtheiten

Von *Rudolf Tarján*, Budapest

I.

Das Erneuerungsproblem wird in der Literatur fast ausschliesslich für eine konstante Personengesamtheit betrachtet. Im Vordergrund des Interesses steht allgemein die Bestimmung, bzw. die Eigenschaften der Erneuerungsfunktion, für welche die zuerst von *Moser* [1] [1]) angegebene lineare Volterrasche Integralgleichung zweiter Art

$$\varphi(t) = p(t)\,\mu(t) + \int_0^t \varphi(\tau)\, p(t-\tau)\, \mu(t-\tau)\, d\tau \tag{1}$$

auch als Definitionsgleichung angesehen werden kann. Handelte es sich aber um nichtkonstante Gesamtheiten, so wurden die dabei auftretenden Integralgleichungen mehr als Mittel zur Formulierung oder zur Lösung des konkret vorliegenden versicherungstechnischen [2], [3], [4] oder bevölkerungstechnischen [5], [6], [7] Problems, als als selbständige Probleme betrachtet, ohne dabei auf die interessanten Zusammenhänge der verschiedenen Erneuerungsprobleme näher einzugehen. Der Zweck dieser Arbeit ist nun, die Zusammenhänge der Erneuerungsprobleme bei nichtkonstanten Gesamtheiten mit dem Erneuerungsproblem bei konstanter Gesamtheit zu zeigen.

Die in den Folgenden geführten Beweise stützen sich durchwegs auf die sogenannten Faltungssätze der Laplace-Transformation (in der Folge kurz als L-Transformation erwähnt), bezüglich welcher auf das bekannte Lehrbuch von *G. Doetsch* [8] verwiesen sei. Da es uns ferner in dieser Arbeit mehr auf die versicherungstechnische, als auf die formalmathematische Seite des Problems ankommt, werden wir

[1]) Die in eckige Klammern [ ] gesetzten Zahlen verweisen auf das Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit.

der Einfachheit halber voraussetzen, dass die auftretenden Funktionen stets so beschaffen sind, dass die Voraussetzungen der Faltungssätze erfüllt sind. Wegen der exakten Bedingungen verweisen wir auf die ausgezeichneten Arbeiten von *H. Richter* [9], [10].

II.

Moser hat in der zitierten Arbeit für die Übertragung von Vorgängen (wie z. B. Ausscheidungen, Reservebildungen usw.) von einer geschlossenen Gesamtheit auf eine offene Gesamtheit konstanten Umfanges ohne Beweis die Gleichung

$$Y(t) = y(t) + \int_0^t \varphi(\tau)\, y(t-\tau)\, d\tau \tag{2}$$

angegeben, wo $y(t)$ den Vorgang in der geschlossenen Gesamtheit, $Y(t)$ den Vorgang in der offenen Gesamtheit und $\varphi(t)$ die durch die Integralgleichung (1) definierte Erneuerungsfunktion bedeutet. Ist diese letztere bekannt, so ist zur Berechnung des Vorganges in der offenen Gesamtheit konstanten Umfanges nur eine einfache Integration notwendig.

Maret [11] hat nun in seiner letzten Kongressabhandlung nachgewiesen, dass die Vorgangsfunktion $Y(t)$ ebenfalls einer linearen Volterraschen Integralgleichung zweiter Art

$$Y(t) = y(t) + \int_0^t Y(\tau)\, p(t-\tau)\, \mu(t-\tau)\, d\tau \tag{3}$$

genügt. Es ist also, um die Funktion $Y(t)$ zu berechnen, nicht notwendig, auf die Lösung von (1) zurückzugreifen.

Bevor wir nun auf unseren eigentlichen Gegenstand näher eintreten, wollen wir für die Gleichung (3) mit Hilfe der L-Transformation einen einfachen Beweis geben und zugleich die Voraussetzungen etwas präziser fassen. Dabei wird die Methode, die in den Folgenden mehrfach anzuwenden sein wird, klar zutage treten.

Dazu schreiben wir (2) in der äquivalenten Form

$$Y(t) = y(t) + \int_0^t y(\tau)\, \varphi(t-\tau)\, d\tau \tag{2a}$$

und beweisen folgenden

Satz 1. Ist die Funktion

$$S(t) = Y(t) - y(t)$$

vermöge des Kerns $\varphi(t)$ als eine Faltung

$$S(t) = Y(t) - y(t) = \int_0^t y(\tau)\, \varphi(t-\tau)\, d\tau \tag{a}$$

darstellbar und genügt der Kern $\varphi(t)$ der linearen Volterraschen Integralgleichung zweiter Art

$$\varphi(t) = p(t)\, \mu(t) + \int_0^t \varphi(\tau)\, p(t-\tau)\, \mu(t-\tau)\, d\tau \tag{b}$$

so ist die Funktion $Y(t)$ die Lösung der linearen Volterraschen Integralgleichung zweiter Art

$$Y(t) = y(t) + \int_0^t Y(\tau)\, p(t-\tau)\, \mu(t-\tau)\, d\tau \tag{c}$$

Bemerkung. Bei passenden Voraussetzungen über $\varphi(t)$, $y(t)$ und $p(t)\, \mu(t)$ lässt es sich zeigen, dass die Lösung eindeutig ist, wovon wir jedoch Abstand nehmen.

Beweis. Wir betrachten die beiden Relationen (a) und (b) als simultane Integralgleichungen mit den beiden unbekannten Funktionen $Y(t)$ und $\varphi(t)$. Indem wir diese beiden Gleichungen mit Hilfe der L-Transformation in den Resultatbereich «übersetzen», erhalten wir auf Grund des Faltungssatzes

$$L(\varphi) = L(p\mu) + L(\varphi)\, L(p\mu)$$

$$L(Y) = L(y) + L(\varphi)\, L(y)$$

Eliminieren wir nun aus diesen beiden *algebraischen* Gleichungen $L(\varphi)$, so erhalten wir nach elementarer Zwischenrechnung

$$L(Y) = L(y) + L(Y)\, L(p\mu)\,.$$

Kehren wir nun wieder in den Objektbereich zurück, so ergibt sich auf Grund des Faltungssatzes

$$Y(t) = y(t) + \int_0^t Y(\tau)\, p(t-\tau)\, \mu(t-\tau)\, d\tau$$

also die behauptete Integralgleichung (3).

Die Voraussetzung, dass $\varphi(t)$ der Beziehung (b) genügt, ist wesentlich. Aus der Theorie der linearen Integralgleichungen ist es nämlich bekannt (vgl. etwa das Referat von Féreaud [12]), dass eine Integralgleichung vom Typus der Gleichung (2) durch den sogenannten *reziproken Kern* gelöst wird, welcher aus der reziproken Integralgleichung

$$Q(t) = K(t) + \int_0^t Q(\tau)\, K(t-\tau)\, d\tau \tag{4}$$

zu bestimmen ist. Setzen wir für die Funktion $K(t)$ die Funktion $p(t)\,\mu(t)$ und für die Funktion $Q(t)$ die Funktion $\varphi(t)$ ein, so erhalten wir unmittelbar die Integralgleichung (1), d. h. die Voraussetzung (b). Wir erkennen also, dass die Funktion $\varphi(t)$ der reziproke Kern und die Gleichung (1) die reziproke Integralgleichung zu der Integralgleichung (3) ist. Das ist aber sehr wesentlich, denn die behauptete Integralgleichung wird beim Beweise von *Maret* direkt, in dem obigen Beweis indirekt gerade aus der richtigen reziproken Integralgleichung aufgebaut.

Korollar. Unter denselben Voraussetzungen wie der eben bewiesene Satz 1. gilt die Reziprozitätsrelation:

$$\int_0^t y(\tau)\, \varphi(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t Y(\tau)\, p(t-\tau)\, \mu(t-\tau)\, d\tau \tag{5}$$

die aus den Gleichungen (2) und (3) durch Subtraktion unmittelbar hervorgeht.

III.

Für nichtkonstante Gesamtheiten hat ebenfalls *Moser* in der zitierten Arbeit die Integralgleichung

$$H(t) = H_0\, p(t) + \int_0^t \varepsilon(\tau)\, p(t-\tau)\, d\tau \tag{6a}$$

hergeleitet, wo

$$\varepsilon(t) = H(t)\, \psi(t)$$

bedeutet, wobei — um Verwechslungen mit dem Fall konstanter Gesamtheiten vorzubeugen — die Erneuerungsfunktion in diesem Falle mit $\psi(t)$ bezeichnet wird. Wir bemerken, dass H_0 die Grösse der zur Zeit $t = 0$ *bereits vorhandenen Gesamtheit* (also den übernommenen Bestand) bedeutet, während der *Anfangswert* der Bestandesfunktion $H(t)$ mit $H(0)$ bezeichnet wird. Um allfälligen Missverständnissen vorzubeugen, werden wir in der Folge H_0 stets als mit «1» normiert annehmen, also die Gleichung (6a) in der Form

$$H(t) = p(t) + \int_0^t \varepsilon(\tau)\, p(t-\tau)\, d\tau \tag{6}$$

schreiben. Indem man diese Gleichung nach t differenziert, erhält man das Analogon der *Moser*schen Grundgleichung (1)

$$\varepsilon(t) = H'(t) + p(t)\,\mu(t) + \int_0^t \varepsilon(\tau)\, p(t-\tau)\,\mu(t-\tau)\, d\tau \tag{7}$$

Der Kern dieser Integralgleichung ist wieder die Totenfunktion $p(t)\,\mu(t)$. Daraus folgt aber unmittelbar, dass die *Moser*sche Grundgleichung (1) die reziproke Integralgleichung auch zur vorliegenden Integralgleichung (7) ist. Die gesuchte Erneuerungsfunktion $\varepsilon(t)$ der nichtkonstanten Gesamtheit lässt sich also mit Hilfe des zugehörigen lösenden Kerns $\varphi(t)$ darstellen. Für die Darstellung gilt der folgende

Satz 2. Genügt die Erneuerungsfunktion der nichtkonstanten Gesamtheit $\varepsilon(t)$ der Integralgleichung (7), *so kann sie vermöge der Funktion $\varphi(t)$ in der Form*

$$H(t)\,\psi(t) = \varepsilon(t) = \varphi(t) + H'(t) + \int_0^t H'(\tau)\,\varphi(t-\tau)\, d\tau \tag{8}$$

dargestellt werden, wo $\varphi(t)$ die Lösung von (1) *ist.*

Beweis. Wir bilden die L-Transformierten der Gleichungen (7) und (1):

$$L(\varepsilon) = L(H') + L(p\mu) + L(\varepsilon)\, L(p\mu)$$
$$L(\varphi) = L(p\mu) + L(\varphi)\, L(p\mu)$$

Eliminieren wir aus diesen beiden Gleichungen $L(p\mu)$, so erhalten wir

$$L(\varepsilon) = L(\varphi) + L(H') + L(H')\, L(\varphi)$$

welcher Gleichung im Objektbereich die transzendente Relation

$$\varepsilon(t) = H(t)\,\psi(t) = \varphi(t) + H'(t) + \int_0^t H'(\tau)\,\varphi(t-\tau)\,d\tau \tag{8}$$

entspricht. Das ist aber unsere Behauptung.

Setzen wir

$$H'(t) = 0$$

d. h. setzen wir konstante Gesamtheit voraus, so folgt

$$\psi(t) = \varphi(t)$$

wie es sein muss.

In leicht übersichtlicher Weise besagt die Gleichung (8), dass sich die Erneuerungsfunktion der nichtkonstanten Gesamtheit aus folgenden drei Komponenten zusammensetzt:

erstens: aus der Erneuerung der konstanten Anfangsgesamtheit «1», —
zweitens: aus der laufenden Bestandesänderung und schliesslich
drittens: aus der Summe der Erneuerungen, die notwendig sind, um die früheren Bestandesänderungen — jede für sich — auf konstanter Höhe zu halten.

Wir wollen in diesem Zusammenhang hervorheben, dass wir bisher über die Richtung der Bestandesänderung, d. h. darüber, ob die betrachtete nichtkonstante Gesamtheit *zunimmt oder abnimmt*, noch keine Voraussetzungen gemacht haben. *Die Ergebnisse gelten also unabhängig von der Richtung der Entwicklung der Gesamtheit.* Handelt es sich etwa um eine abnehmende Gesamtheit — ein Problem, das in der Literatur bisher nicht behandelt worden ist —, so ist

$$H'(t) < 0$$

d. h. die beiden letzten Glieder rechts in der Gleichung (8) sind negativ. In diesem Falle kommt also die Bestandesänderung sowie die Summe der zu den früheren Bestandesänderungen als konstante Teilgesamtheiten gehörigen Erneuerungen zum ersten Gliede nicht hinzu, sondern ist davon abzuziehen. Setzt man den Anfangsbestand gleich Null, so nimmt die Gleichung (8) die bemerkenswerte Form

$$\varepsilon(t) = H'(t) + \int_0^t H'(\tau)\,\varphi(t-\tau)\,d\tau \tag{9}$$

an. In dieser Form besagt die Gleichung, dass zu der Berechnung der Erneuerung einer sich beliebig ($H'(t)$ braucht nicht für jedes t positiv zu sein!) ändernden Gesamtheit die Kenntnis der Erneuerung einer konstanten Gesamtheit hinreicht: die Berechnung erfolgt einfach in der Weise, dass jede frühere Änderung als eine konstante Teilgesamtheit betrachtet, die Summe der Zeitwerte der zugehörigen Erneuerungen gebildet, schliesslich dazu noch die momentane Änderung hinzugefügt wird. Dieses wichtige Erkenntnis formulieren wir als das *Superposititionsprinzip der nichtkonstanten Gesamtheiten* wie folgt:

Die Erneuerungsfunktion der nichtkonstanten Gesamtheiten setzt sich aus der Erneuerung der konstanten Anfangsgesamtheit, aus der laufenden Bestandesänderung und aus den zu früheren Änderungen der Gesamtheit als konstante Teilgesamtheit gehörigen Erneuerungen additiv zusammen.

IV.

Wir wenden uns nun der Untersuchung der Übertragung von Vorgängen in der nichtkonstanten Gesamtheit zu. Zu diesem Behufe wollen wir zunächst das Analogon der Formel (2) für nichtkonstante Gesamtheiten ableiten [1]).

Treten im Momente τ $\varepsilon(\tau)$ Personen der Gesamtheit bei, so sind daraus zurzeit t noch

$$\varepsilon(\tau)\, p(t-\tau)$$

Personen am Leben. Gibt eine einzelne Person zum Vorgange $z(t)$ Anlass, so hat dieser Vorgang für die zurzeit τ beigetretenen $\varepsilon(\tau)$ Personen den Wert

$$\varepsilon(\tau)\, p(t-\tau)\, z(t-\tau) = \varepsilon(\tau)\, u(t-\tau)$$

mit

$$u(t) = p(t)\, z(t)$$

Für den Anfangsbestand «1» erhalten wir in ähnlicher Weise

$$p(t)\, z(t) = u(t)$$

Für die ganze Gesamtheit ergibt sich so

[1]) Vgl. auch [2], [3], [4].

$$U(t) = u(t) + \int_0^t \varepsilon(\tau)\, u(t-\tau)\, d\tau \tag{10}$$

Diese Gleichung ist formal mit der Gleichung (2) identisch; *inhaltlich* besteht jedoch der Unterschied, dass die Erneuerungsfunktion $\varepsilon(t)$ hier die Lösung der Integralgleichung (7) bedeutet. Wir wollen nun zeigen, dass die Vorgangsfunktion $U(t)$ ebenfalls einer Integralgleichung genügt. Dazu beweisen wir den folgenden

Satz 3. Kann die Funktion

$$R(t) = U(t) - u(t)$$

vermöge des Kerns $\varepsilon(\tau)$ als eine Faltung

$$R(t) = U(t) - u(t) = \int_0^t \varepsilon(\tau)\, u(t-\tau)\, d\tau \tag{α}$$

dargestellt werden und genügt der Kern $\varepsilon(t)$ der linearen Volterraschen Integralgleichung zweiter Art

$$\varepsilon(t) = H'(t) + p(t)\,\mu(t) + \int_0^t \varepsilon(\tau)\, p(t-\tau)\,\mu(t-\tau)\, d\tau \tag{β}$$

so genügt die Funktion $U(t)$ der ebenfalls linearen Volterraschen Integralgleichung zweiter Art

$$U(t) = u(t) + \int_0^t H'(\tau)\, u(t-\tau)\, d\tau + \int_0^t U(\tau)\, p(t-\tau)\,\mu(t-\tau)\, d\tau \tag{11}$$

Beweis. Ähnlich wie beim Beweis des Satzes 1 bilden wir zunächst die L-Transformierten der beiden Gleichungen (α) und (β)

$$L(\varepsilon) = L(H') + L(p\mu) + L(\varepsilon)\, L(p\mu)$$
$$L(U) = L(u) + L(\varepsilon)\, L(u)$$

Wir eliminieren $L(\varepsilon)$ aus diesen beiden Gleichungen und erhalten

$$L(U) = L(u) + L(H')\, L(u) + L(U)\, L(p\mu)$$

Zu dieser Gleichung im Resultatbereich gehört im Objektbereich die Integralgleichung

$$U(t) = u(t) + \int_0^t H'(\tau)\, u(t-\tau)\, d\tau + \int_0^t U(\tau)\, p(t-\tau)\, \mu(t-\tau)\, d\tau$$

also unsere Behauptung.

Korollar. Unter denselben Voraussetzungen wie der eben bewiesene Satz 3 gilt eine zum Korollar des Satzes 1 ähnliche Reziprozitätsrelation

$$\int_0^t \varepsilon(\tau)\, u(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t H'(\tau)\, u(t-\tau)\, d\tau + \int_0^t U(\tau)\, p(t-\tau)\, \mu(t-\tau)\, d\tau \quad (12)$$

die sich durch Subtraktion der Gleichungen (10) und (11) unmittelbar ergibt.

Spezialisieren wir

$$H'(t) \equiv 0$$

d. h. setzen wir eine konstante Gesamtheit voraus, so reduziert sich die Gleichung (11) auf

$$U(t) = u(t) + \int_0^t U(\tau)\, p(t-\tau)\, \mu(t-\tau)\, d\tau \quad (13)$$

was bis auf die Bezeichnung mit der Gleichung (3) identisch ist. Die Gleichung (3) ist also als Spezialfall in der Gleichung (11) enthalten.

Handelt es sich etwa um eine abnehmende Gesamtheit, so wird

$$H'(t) < 0$$

und ist dann das letzte Glied der Gleichung (11) von den ersten beiden abzuziehen.

V.

Moser hat in der zitierten Arbeit als Vorteil der Gleichung (2) angeführt, dass die Vorgangsfunktion in der offenen Gesamtheit konstanten Umfanges allein in Kenntnis der Vorgangsfunktion in der geschlossenen Gesamtheit und der Erneuerungsfunktion $\varphi(t)$ berechnet werden kann. Wir wollen nun zeigen, dass eine ähnliche Gleichung auch für nichtkonstante Gesamtheiten gilt, dass es also möglich ist, die Vorgangsfunktion der nichtkonstanten Gesamtheiten durch die Vorgangsfunktion der geschlossenen Gesamtheit und der Erneuerungsfunktion $\varphi(t)$ darzustellen.

Zu diesem Behufe gehen wir von den beiden Gleichungen (11) und (1) aus und schreiben die L-Transformierten an:

$$L(U) = L(u) + L(H')\,L(u) + L(U)\,L(p\,\mu) \qquad (a')$$

$$L(\varphi) = L(p\,\mu) + L(\varphi)\,L(p\,\mu) \qquad (b')$$

Eliminieren wir aus diesen beiden Gleichungen $L(p\,\mu)$, so erhalten wir nach kurzer Zwischenrechnung:

$$L(U) = L(u) + L(u)\,L(\varphi) + L(u)\,L(H') + L(u)\,L(H')\,L(\varphi) \qquad (c')$$

Setzen wir

$$L(H')\,L(\varphi) = L(\Phi) \qquad (d')$$

also im Objektbereich

$$\int_0^t H'(\tau)\,\varphi(t-\tau)\,d\tau = \Phi(t) \qquad (14)$$

so folgt aus (13) im Objektbereich die für nichtkonstante Gesamtheiten verallgemeinerte Form der Gleichung (2)

$$U(t) = u(t) + \int_0^t \varphi(\tau)\,u(t-\tau)\,d\tau + \int_0^t H'(\tau)\,u(t-\tau)\,d\tau + \int_0^t \Phi(\tau)\,u(t-\tau)\,d\tau \qquad (15)$$

Dieses Resultat formulieren wir als den

Satz 4. Ist die Funktion $\varphi(t)$ Lösung der Integralgleichung (1) *und genügt die Funktion $U(t)$ der Integralgleichung* (13), *so kann die letztere in der Form*

$$U(t) = u(t) + \int_0^t \varphi(\tau)\,u(t-\tau)\,d\tau + \int_0^t H'(\tau)\,u(t-\tau)\,d\tau + \int_0^t \Phi(\tau)\,u(t-\tau)\,d\tau$$

dargestellt werden, wo $\Phi(t)$ durch (14) *definiert ist.*

Damit ist die Vorgangsfunktion auch im allgemeinen Falle auf die *Moser*sche Erneuerungsfunktion $\varphi(t)$ zurückgeführt. Auch diese Darstellung gilt auch für abnehmende Gesamtheiten, in welchem Falle das Vorzeichen der beiden letzten Glieder rechts einfach negativ wird. Setzen wir wieder

$$H'(t) \equiv 0$$

d. h. setzen wir konstante Gesamtheit voraus, so reduziert sich die Gleichung (15) auf die Gleichung (2), die also als Spezialfall in der allgemeineren Gleichung (15) enthalten ist.

* * *

Um dieser Arbeit den allgemeinen Charakter nicht zu nehmen, wollen wir diesmal auf Anwendungsbeispiele verzichten, behalten uns jedoch vor, in einer weiteren Arbeit einige Probleme aus der Sozial- und Gruppenversicherung auf Grund der obigen Sätze zu behandeln.

Literaturverzeichnis

[1] *Chr. Moser:* Beiträge zur Darstellung von Vorgängen und des Beharrungszustandes bei einer sich erneuernden Gesamtheit. M. V. S. V. 1926.

[2] *H. Wyss:* Lage, Entwicklung und Beharrungszustand der eidgenössischen Versicherungskasse. M. V. S. V. 1929, Heft 24.

[3] *E. Zwinggi:* Die Witwenversicherung als Teil der allgemeinen Alters- und Hinterlassenenversicherung. M. V. S. V. 1931, Heft 26.

[4] *E. Zwinggi:* Beiträge zu einer Theorie des Bevölkerungswachstums mit einer Anwendung auf Sozialversicherungskassen. M. V. S. V. 1929, Heft 24.

[5] *H. Hadwiger:* Natürliche Ausscheidefunktionen für Gesamtheiten und die Lösung der Erneuerungsgleichung. M. V. S. V. 1940, Heft 40.

[6] *H. Hadwiger:* Über die Integralgleichung der Bevölkerungstheorie. M. V. S.V. 1939, Heft 38.

[7] *H. Hadwiger:* Über eine Funktionalgleichung der Bevölkerungstheorie und eine spezielle Klasse analytischer Lösungen. Blätter für Versicherungsmathematik, Bd. 5, Heft 4, 1941.

[8] *G. Doetsch:* Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation. Springer-Verlag, Berlin, 1937.

[9] *H. Richter:* Untersuchungen zum Erneuerungsproblem. Mathematische Annalen, Bd. 118, Heft 2, 1941.

[10] *H. Richter:* Die Konvergenz der Erneuerungsfunktion. Blätter für Versicherungsmathematik, Bd. 5, Heft 1, 1940.

[11] *A. Maret:* Direkte Berechnung der Vorgangsfunktionen einer offenen Gesamtheit. XII. Internationaler Kongress der Versicherungsmathematiker, Bd. III.

[12] *L. Féreaud:* Le renouvellement, quelques problemes connexes et les équations intégrales du cycle fermé. M. V. S. V. Bd. 41, Heft 1, 1941.