Ein Verfahren zum Einbezug der säkularen Sterblichkeitsabnahme in die versicherungstechnischen Berechnungen

Ein Verfahren zum Einbezug der säkularen Sterblichkeitsabnahme in die versicherungstechnischen Berechnungen [1]

Von *Werner Peter Schuler*, Basel

Einleitung und Problemstellung

Seit ungefähr zwei Jahrzehnten sind Versuche im Gange, welche die Erfassung und den Einbezug der säkularen Sterblichkeitsabnahme in die versicherungstechnischen Berechnungen zum Gegenstand haben. Vor allem für die Rentenversicherung ist die Abnahme der Sterblichkeit und deren Berücksichtigung bei der Ermittlung der Barwerte von entscheidender Bedeutung; denn nur auf diese Weise lässt sich das Gleichgewicht zwischen Prämie und Versicherungsleistung dauernd erhalten. Dem Versicherer kann die Vernachlässigung der zu erwartenden Lebensverbesserung bedeutende absolute Verluste bringen; die Einbusse wird vor allem dann schwerwiegend sein, wenn gleichzeitig die Zinsüberschüsse verschwinden.

In der vorliegenden Abhandlung versuchen wir, eine neue Methode zur analytischen Erfassung der säkularen Sterblichkeitsabnahme und ihrem Einbezug in die Berechnung der Rentenbarwerte herzuleiten. Zum Vorgehen selber ist indessen von Anfang an eine Klarstellung nötig. Stellen wir im Laufe der Darlegungen die Sterblichkeit durch ein «Sterblichkeitsgesetz» und die Änderung dieses «Gesetzes» in der Zeit durch eine weitere «gesetzmässige» Beziehung mathematisch dar, so denken wir doch nicht daran, die naturbedingte Verteilung der Sterblichkeit auf die verschiedenen Alter und Zeitabschnitte so festzulegen, wie etwa der Physiker die Vorgänge beim freien Fall durch die Fallgesetze wiedergibt. Mit dem «Sterbegesetz» wollen wir vielmehr

[1]) Die vorliegende Abhandlung ist ein Teildruck der Basler Inauguraldissertation gleichen Titels (Basel 1943).

nur eine beobachtete Regelmässigkeit einer Naturerscheinung mathematisch zu beschreiben versuchen. Es handelt sich stets nur darum, eine statistische Beobachtungsreihe, die Sterbetafel, durch geeignete analytische Funktionen zu *approximieren*. Genau so dürfen wir bei der Betrachtung der säkularen Sterblichkeitsabnahme nicht versuchen, durch eine mathematische Formel diese Erscheinung zu erklären. Vielmehr werden wir nur abschätzen, welche zukünftige Entwicklung der Sterblichkeit die bisherigen Beobachtungen erwarten lassen; diese Prognose ist dann in mathematischer Form zu beschreiben.

Für das Ergebnis der Berechnung des Rentenbarwertes unter Einbezug der zu erwartenden Lebensverbesserung ist es grundsätzlich gleichgültig, an welcher Stelle und in welcher Weise wir die säkulare Sterblichkeitsabnahme in unsere Betrachtungen eingehen lassen. Wir könnten also unmittelbar den Rentenbarwert als Funktion der Beobachtungszeit extrapolieren; wir dürfen aber auch das Verhalten der Überlebensordnung, der Überlebenswahrscheinlichkeit, der Sterbeziffer oder irgendeines Sterblichkeitsmasses mit wachsender Zeit untersuchen und analytisch festlegen. Jedoch halten wir dafür, jeder Versuch zur Abschätzung der Sterblichkeit hätte *methodisch* von der Sterbeintensität oder der Sterbewahrscheinlichkeit auszugehen. So werden wir bei unserem Vorgehen die *theoretischen* Betrachtungen durchwegs an der Sterbeintensität durchführen, bei den *praktischen* Anwendungen jedoch auf die Sterbewahrscheinlichkeiten übergehen. — Haben wir einmal den künftigen Verlauf der Sterblichkeit analytisch festgelegt, so ist es eine rein mathematische Aufgabe, den Rentenbarwert bei Berücksichtigung der säkularen Sterblichkeitsabnahme zu bestimmen unter Begründung allfällig notwendiger Annäherungen.

Das mit der vorliegenden Untersuchung angestrebte Ziel ist bereits beschrieben: den Rentenbarwert unter Berücksichtigung der zu erwartenden Lebensverbesserung analytisch darzustellen. Dabei stellen wir uns von vornherein die Aufgabe, das Verfahren derart zu gestalten, dass es auch praktisch einfach anwendbar ist. Wir werden deshalb bei unseren Betrachtungen an der Grundforderung festhalten, bei grösstmöglicher Approximation an die zu erwartenden Ereignisse eine mathematisch exakte und praktisch doch einfache Darstellung des Rentenbarwertes als Funktion des Alters und der Beobachtungszeit zu finden.

1. Abschnitt

Theoretische Grundlagen

§ 1

Das Verfahren

Die uns gestellte Aufgabe, eine Formel für den Rentenbarwert unter Einbezug der zu erwartenden Lebensverbesserung zu finden, lösen wir nach den folgenden Grundsätzen:

a) Die Extrapolation der Sterblichkeit wird in dem Sinne rechnerisch auf eine Interpolation [1]) zurückgeführt, dass die Grenzwerte, denen die Sterbeintensitäten oder Sterbewahrscheinlichkeiten mit wachsender Zeit zustreben, durch eine Sterbetafel mit dem zugehörigen Zeitpunkt $t = \infty$ *(unendlich ferne Sterbetafel)* festgelegt werden. (In § 2 geben wir eine Methode an, mit der sich eine solche unendlich ferne Sterbetafel konstruieren lässt.)

b) Zwischen dieser unendlich fernen Sterbetafel und den bekannten Erfahrungstafeln werden sodann die Sterbeintensitäten oder die Sterbewahrscheinlichkeiten nach der *logistischen Funktion* interpoliert. An die Stelle der vom jeweiligen Alter abhängigen Kurvenkonstanten treten feste, vom Alter unabhängige Mittelwerte.

c) Aus der für jedes Alter und jeden Zeitpunkt nun analytisch festgelegten Sterblichkeit kann die *Überlebensordnung* dargestellt und auch berechnet werden. Die Ergebnisse dieser genauen Berechnung sind indessen für die numerische Auswertung infolge ihrer komplizierten Bauart wenig brauchbar. Daher wird noch eine Näherungsformel hergeleitet mit der Annahme, dass die Glieder, welche $q(x, \infty)$ in zweiten und höheren Potenzen enthalten, vernachlässigt werden dürfen. (Dass die Fehler, die wir bei dieser Näherung begehen, äusserst gering sind, werden wir bei der numerischen Auswertung unserer Ergebnisse später zeigen.)

---

[1]) Der Ausdruck «Interpolation» ist insofern nicht ganz treffend, als es sich stets um die Abschätzung einer künftigen Entwicklung handelt, also um eine «Extrapolation». Formal dagegen haben wir eine Interpolation vor uns; deshalb die Benennung.

d) Durch die getroffenen Näherungen gelingt es, den *Rentenbarwert* $\mathfrak{a}(x,t)$ so darzustellen, dass die einzelnen Bestimmungsgrössen entweder nur Funktionen der Zeit oder nur des Alters sind und daher einfach tabelliert werden können.

e) Schliesslich folgt eine Formel für den Barwert der *kontinuierlich* zahlbaren Rente, wenn angenommen wird, die Sterbeintensitäten der unendlich fernen Tafel seien durch eine Makehamsche Kurve darstellbar.

Die entwickelte Methode und die daraus gewonnenen Ergebnisse werden im zweiten Abschnitt auf die Sterblichkeitserfahrungen der schweizerischen Bevölkerung angewendet und auf ihre praktische Eignung hin geprüft.

§ 2

Die unendlich ferne Sterbetafel

Unter der «unendlich fernen Sterbetafel» verstehen wir die Absterbeordnung auf Grund der im Zeitpunkt $t=\infty$ erreichten und sich nicht mehr verbessernden Sterblichkeit. Die Darstellung der Grenzsterbetafel kann von Sterbeintensitäten oder Sterbewahrscheinlichkeiten ausgehen, je nachdem ob die kontinuierliche oder die diskontinuierliche Methode benutzt werden soll. In beiden Fällen handelt es sich bei der Konstruktion einer unendlich fernen Sterbetafel indessen um eine Hypothese, die wir durch die Ergebnisse früherer Sterblichkeitsmessungen stützen — insbesondere durch die Analyse der Todesursachen.

Gegeben seien n Erfahrungstafeln mit den Sterbeintensitäten $\mu(x,t_1), \ldots, \mu(x,t_n)$; diese Erfahrungstafeln geben die Sterbeintensitäten in den Zeitpunkten $t_1, t_2, \ldots, t_n$ $(t_1 < t_2 < \ldots < t_n)$ wieder. Wir greifen das bestimmte Alter x heraus und betrachten zunächst die Reihe der n gegebenen Sterbeintensitäten dieses Alters als Funktionen von t.

Angenommen, jede der Erfahrungstafeln kenne k Todesursachen, so lassen sich die Sterbeintensitäten $\mu(x,t_\nu)$, $\nu=1,\ldots,n$, in k Teilintensitäten $\mu_\varkappa(x,t_\nu)$, $\varkappa=1,\ldots,k$, zerlegen, dergestalt, dass

$$(1) \qquad \mu(x,t_\nu)=\sum_\varkappa \mu_\varkappa(x,t_\nu)$$

ist. Betrachten wir sodann den Verlauf jeder dieser Teilintensitäten für sich als Funktion von t, so werden wir eine Klasse mit abnehmenden Teilintensitäten finden; andere Teilintensitäten werden gleichbleiben und andere sogar leicht zunehmen. Wir erhalten damit für die letzte Erfahrungstafel t_n grundsätzlich die folgende Zerlegung der Sterbeintensität $\mu(x, t_n)$:

$$\mu(x, t_n) = \mu^{(1)}(x, t_n) + \mu^{(2)}(x, t_n),$$

wobei $\mu^{(1)}(x, t_n)$ die Summe aller mit wachsender Zeit abnehmenden Teilintensitäten, $\mu^{(2)}(x, t_n)$ die Summe aller anderen Teilintensitäten bedeuten soll.

Nehmen wir nun an, dass die Teilintensität $\mu^{(1)}$ mit $t \to \infty$ gegen den Bruchteil α des im Zeitpunkt t_n beobachteten Wertes $\mu^{(1)}(x, t_n)$ strebe, so definieren wir als Sterbeintensität des Alters x in der unendlich fernen Sterbetafel den Wert

$$\mu(x, \infty) = \alpha \mu^{(1)}(x, t_n) + \mu^{(2)}(x, t_n). \tag{2}$$

Es wäre möglich, das Verfahren zu verfeinern und für jede der k Teilintensitäten einen besonderen Grenzwert zu bestimmen und deren Summe als Sterbeintensität der unendlich fernen Sterbetafel zu definieren. Für unsere Aufgabe wäre indessen ein derartiges Vorgehen nutzlos, da es durch andere Näherungen in seiner Wirkung aufgehoben würde.

§ 3

Die Interpolationsformel

a) Die logistische Formel. Nach der Festlegung der unendlich fernen Sterbetafel haben wir die Verbindung mit den Werten der Erfahrungstafeln herzustellen.

In der mathematischen Bevölkerungstheorie hat sich die *logistische Funktion* zur Darstellung von Wachstumsvorgängen als nützlich erwiesen. Diese Formel werden wir hier verwenden, um mit ihr die Abnahme der Sterblichkeit wiederzugeben.

Die Herleitung der logistischen Formel ist nicht weiter zu verfolgen [1]); wir begnügen uns mit der Angabe einiger wesentlicher Eigenschaften.

---

[1]) Ausführliche Darstellungen der logistischen Funktion finden sich z. B. bei *Verhulst* [1] und bei *Pearl* und *Reed* [2].

Ausgangspunkt für die logistische Funktion bildet die *Bernoulli*sche Differentialgleichung

$$\frac{1}{y(t)}\frac{d}{dt}\,y(t) = \alpha^{-1}(1 - k\,y(t))\,. \tag{3}$$

Das allgemeine Integral dieser Differentialgleichung hat bei geeigneter Annahme der Konstanten die Form:

$$y(t) = \left(1 + e^{\frac{\beta - t}{\alpha}}\right)^{-1} Y\,.$$

Lassen wir vorerst t gegen $-\infty$ gehen, so erhalten wir $y(-\infty) = 0$. Für $t \to \infty$ folgt der Grenzwert $y(\infty) = Y$. Wir können also auch setzen:

$$y(t) = \frac{y(\infty)}{1 + e^{\frac{\beta - t}{\alpha}}}\,. \tag{4}$$

Die Funktion $y(t)$ strebt mit wachsendem t einem gegebenen Grenzwert Y monoton zu. Weiter ist leicht zu zeigen, dass die Funktion für $t = \beta$ einen Wendepunkt hat; es gilt dort $y(\beta) = \frac{1}{2}\,y(\infty)$. Die Konstante α charakterisiert die Stärke der Konvergenz der Funktion gegen ihren Grenzwert hin; die Konstante β andererseits legt die Lage des Wendepunktes fest.

b) Ansatz der Interpolation. Zur Interpolation der Sterblichkeit zwischen den Erfahrungstafeln einerseits und der unendlich fernen Tafel andererseits legen wir fest:

Die Zunahme der reziproken Werte der Sterbeintensitäten bzw. der Sterbewahrscheinlichkeiten erfolge nach der logistischen Formel.

Also

$$\mu(x,t) = \left(1 + e^{\frac{\beta - t}{\alpha}}\right)\mu(x,\infty) \tag{5}$$

oder

$$q(x,t) = \left(1 + e^{\frac{\beta - t}{\alpha}}\right)q(x,\infty)\,. \tag{6}$$

Die Grössen α und β sind Funktionen des Alters x, ohne dass dies durch die Schreibweise besonders noch hervorgehoben wird.

Im folgenden werden wir, solange die Betrachtungen theoretischer Natur sind, die Interpolation auf die Sterbeintensitäten ausüben; für die numerischen Untersuchungen dagegen werden wir die Sterbewahrscheinlichkeiten verwenden.

c) Die Bestimmung der Werte $\alpha(x)$ *und* $\beta(x)$. Zur Bestimmung der Grössen $\alpha(x)$ und $\beta(x)$ benötigen wir neben den Sterbeintensitäten der unendlich fernen Sterbetafel noch die Intensitäten aus zwei Erfahrungstafeln, etwa der Sterbetafeln mit den Zeitkoordinaten t_1 und t_2 [1]). Dann sind für jedes Alter x die Intensitäten $\mu(x, t_1)$, $\mu(x, t_2)$ und $\mu(x, \infty)$ gegeben, und wir haben aus den Gleichungen

$$\mu(x, t_1) = \left(1 + e^{\frac{\beta - t_1}{\alpha}}\right) \mu(x, \infty),$$

$$\mu(x, t_2) = \left(1 + e^{\frac{\beta - t_2}{\alpha}}\right) \mu(x, \infty)$$

$\alpha(x)$ und $\beta(x)$ zu berechnen. Dazu dividieren wir beide Gleichungen durch $\mu(x, \infty)$, subtrahieren von beiden 1 und erhalten:

$$\frac{\mu(x, t_1)}{\mu(x, \infty)} - 1 = e^{\frac{\beta - t_1}{\alpha}}, \quad \frac{\mu(x, t_2)}{\mu(x, \infty)} - 1 = e^{\frac{\beta - t_2}{\alpha}}.$$

Sodann logarithmieren wir beide Ausdrücke und subtrahieren den zweiten vom ersten. Als Bestimmungsgleichung für $\alpha(x)$ bleibt schliesslich

$$\text{(7)} \qquad \frac{t_2 - t_1}{\alpha} = \log \frac{\mu(x, t_1) - \mu(x, \infty)}{\mu(x, t_2) - \mu(x, \infty)}.$$

Ist daraus der Wert $\alpha(x)$ berechnet, so erhalten wir $\beta(x)$ unmittelbar, wenn wir $\alpha(x)$ in eine der beiden Ausgangsgleichungen einsetzen und diese nach $\beta(x)$ auflösen.

Genau gleich gestaltet sich die Berechnung von $\alpha(x)$ und $\beta(x)$, wenn nicht die Sterbeintensitäten, sondern die Sterbewahrscheinlichkeiten als gegeben anzusehen sind.

---

[1]) Wir verzichten absichtlich auf die Darlegung des strengeren Verfahrens der Berücksichtigung von mehr als zwei Erfahrungstafeln; die spätere Ersetzung der Werte $\alpha(x)$ und $\beta(x)$ durch Mittelwerte α und β würde dieses genauere Vorgehen weitgehend illusorisch machen.

d) Die Interpolation mit Mittelwerten α und β. Zur Weiterführung der Betrachtungen ist es notwendig, ein Ergebnis der späteren numerischen Auswertungen vorwegzunehmen. Wir werden feststellen, dass die Grössen $\alpha(x)$ und $\beta(x)$ vom Alter x weitgehend unabhängig sind und mit ausreichender Genauigkeit durch Mittelwerte α und β ersetzt werden können [1]). Daher werden wir auch unsere weiteren theoretischen Untersuchungen mit solchen von x unabhängigen Konstanten α und β durchführen.

Durch die Festsetzung konstanter Mittelwerte wird die Lösung unserer Aufgabe wesentlich vereinfacht. Denn wir haben damit die Sterbeintensitäten bzw. die Sterbewahrscheinlichkeiten in der Interpolationsformel (5) bzw. (6) als Produkte zweier Faktoren dargestellt, von denen der eine Funktion des Alters x, der andere nur eine Funktion der Zeit t ist.

Die Annahme der Mittelwerte α und β ersetzt weiter die Festlegung einer unendlich fernen Sterbetafel weitgehend; denn wir können für α und β geeignete Werte annehmen und mittels der Interpolationsformel (5) bzw. (6) aus einer für den Zeitpunkt t_0 gegebenen Erfahrungstafel die Werte $\mu(x, \infty)$ und $q(x, \infty)$ berechnen und an Stelle der vorausgesetzten $\mu(x, \infty)$ bzw. $q(x, \infty)$ die extrapolierten Grössen verwenden. Diesen Gedanken werden wir hier allerdings nicht weiter verfolgen.

e) Die Berechnung der Mittelwerte α und β. Unsere nächste Aufgabe ist es, eine geeignete Methode zur Bestimmung der Mittelwerte α und β herzuleiten. — In Anlehnung an das Vorgehen bei der *Methode der kleinsten Quadrate* treffen wir folgenden Ansatz zur Bestimmung von α und β:

Es seien

1) $\mu(x, t_1)$ und $\mu(x, t_2)$ die gegebenen Sterbeintensitäten der Erfahrungstafeln der Zeitpunkte t_1 bzw. t_2;

2) $\mu^*(x, t_1)$ und $\mu^*(x, t_2)$ die Sterbeintensitäten für die Zeitpunkte t_1 bzw. t_2, berechnet mittels der logistischen Interpolationsformel (5) unter Voraussetzung der gegebenen unendlich fernen Sterbetafel der $\mu(x, \infty)$ und der vom Alter x unabhängigen Konstanten α und β.

---

[1]) Sinngemäss wollen wir unter $\alpha(x)$ und $\beta(x)$ die von x abhängigen Werte und unter α und β die von x unabhängigen Werte verstehen.

Dann sind α und β so zu bestimmen, dass die Summe der Integrale

$$(8) \qquad \int_{x_0}^{x_1} (\mu(x,t_1) - \mu^*(x,t_1))^2 \, dx + \int_{x_0}^{x_1} (\mu(x,t_2) - \mu^*(x,t_2))^2 \, dx$$

ein Minimum wird. Integriert wird über alle Alter von x_0 bis x_1.

Damit der Ausdruck (8) ein Minimum wird, ist es notwendig, dass seine ersten Ableitungen nach α und β verschwinden. Wir erhalten also die beiden Bedingungsgleichungen zur Bestimmung von α und β:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\int_{x_0}^{x_1} (\mu(x,t_1) - \mu^*(x,t_1))^2 \, dx + \int_{x_0}^{x_1} (\mu(x,t_2) - \mu^*(x,t_2))^2 \, dx \right] = 0\,,$$

wo y durch α bzw. durch β zu ersetzen ist. Da nur die $\mu^*(x,t)$ Funktionen von α und β sind, ergibt sich weiter:

$$(9) \qquad \int_{x_0}^{x_1} (\mu(x,t_1) - \mu^*(x,t_1)) \frac{\partial \mu^*(x,t_1)}{\partial y} \, dx + \\ + \int_{x_0}^{x_1} (\mu(x,t_2) - \mu^*(x,t_2)) \frac{\partial \mu^*(x,t_2)}{\partial y} \, dx = 0\,,$$

wo $y = \alpha$ bzw. $= \beta$ ist. Es ist aber

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \mu^*(x,t) = \mu(x,\infty) \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(1 + e^{\frac{\beta - t}{\alpha}}\right) = -\frac{\beta - t}{\alpha^2} e^{\frac{\beta - t}{\alpha}} \mu(x,\infty)\,,$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \mu^*(x,t) = \mu(x,\infty) \frac{\partial}{\partial \beta} \left(1 + e^{\frac{\beta - t}{\alpha}}\right) = \frac{1}{\alpha} e^{\frac{\beta - t}{\alpha}} \mu(x,\infty)\,.$$

Setzen wir diese Ableitungen in (9) ein und beachten, dass $\mu^*(x,t) = \left(1 + e^{\frac{\beta - t}{\alpha}}\right) \mu(x,\infty)$ ist, so ergibt sich nach Division durch $-\alpha^{-2} e^{\frac{\beta}{\alpha}}$ bzw. $\alpha^{-1} e^{\frac{\beta}{\alpha}}$:

$$(\beta - t_1)\, e^{-\frac{t_1}{\alpha}} \int\limits_{x_0}^{x_1} \left(\mu(x, t_1)\, \mu(x, \infty) - \mu^2(x, \infty)\left(1 + e^{\frac{\beta - t_1}{\alpha}}\right)\right) dx +$$

$$+ (\beta - t_2)\, e^{-\frac{t_2}{\alpha}} \int\limits_{x_0}^{x_1} \left(\mu(x, t_2)\, \mu(x, \infty) - \mu^2(x, \infty)\left(1 + e^{\frac{\beta - t_2}{\alpha}}\right)\right) dx = 0\,,$$

(10)

$$e^{-\frac{t_1}{\alpha}} \int\limits_{x_0}^{x_1} \left(\mu(x, t_1)\, \mu(x, \infty) - \mu^2(x, \infty)\left(1 + e^{\frac{\beta - t_1}{\alpha}}\right)\right) dx +$$

$$+ e^{-\frac{t_2}{\alpha}} \int\limits_{x_0}^{x_1} \left(\mu(x, t_2)\, \mu(x, \infty) - \mu^2(x, \infty)\left(1 + e^{\frac{\beta - t_2}{\alpha}}\right)\right) dx = 0\,.$$

Wir multiplizieren die zweite Gleichung mit $\beta - t_1$ und subtrahieren sie von der ersten. Dann folgt

$$(t_1 - t_2)\, e^{-\frac{t_2}{\alpha}} \int\limits_{x_0}^{x_1} \left(\mu(x, t_2)\, \mu(x, \infty) - \mu^2(x, \infty)\left(1 + e^{\frac{\beta - t_2}{\alpha}}\right)\right) dx = 0\,.$$

Wir dürfen diese Gleichung durch den Faktor vor dem Integral dividieren, da dieser sicher nicht verschwindet. Beachten wir ferner, dass wir aus den Gleichungen (10) durch Elimination der zweiten Integrale eine der vorstehenden Gleichung analoge Bedingung in $\mu(x, t_1)$ herleiten können, so erhalten wir schliesslich zur Ermittlung von α und β die folgenden Gleichungen:

$$1 + e^{\frac{\beta - t_1}{\alpha}} = \frac{\int\limits_{x_0}^{x_1} \mu(x, t_1)\, \mu(x, \infty)\, dx}{\int\limits_{x_0}^{x_1} \mu^2(x, \infty)\, dx}\,,$$

(11)

$$1 + e^{\frac{\beta - t_2}{\alpha}} = \frac{\int\limits_{x_0}^{x_1} \mu(x, t_2)\, \mu(x, \infty)\, dx}{\int\limits_{x_0}^{x_1} \mu^2(x, \infty)\, dx}\,.$$

Rechnen wir mit den Sterbewahrscheinlichkeiten $q(x, t)$ an Stelle der Sterbeintensitäten, so haben wir in den eben abgeleiteten Formeln die Integrationen von x_0 bis x_1 durch Summationen über alle vorkommenden Alter von x_0 bis x_1 zu ersetzen:

$$
(12)\qquad
\begin{aligned}
1+e^{\frac{\beta-t_1}{\alpha}} &= \frac{\sum\limits_x q(x,t_1)\,q(x,\infty)}{\sum\limits_x q^2(x,\infty)}\,,\\
1+e^{\frac{\beta-t_2}{\alpha}} &= \frac{\sum\limits_x q(x,t_2)\,q(x,\infty)}{\sum\limits_x q^2(x,\infty)}\,.
\end{aligned}
$$

§ 4

Die Überlebensordnung unter Einbezug der Lebensverbesserung

a) Die Überlebenswahrscheinlichkeiten. Zur Darstellung der einjährigen Überlebenswahrscheinlichkeit $p(x, t)$ des x-jährigen zur Zeit t gehen wir von der Definition der Sterbeintensität aus. Wir haben

$$\mu(x+\xi, t+\xi) = -\frac{1}{l(x+\xi, t+\xi)}\,\frac{dl(x+\xi, t+\xi)}{d\xi}\,,$$

wo $l(x, t)$ die Zahl der x-jährigen zur Zeit t aus dem Anfangsbestand $l(x_0, t - x + x_0)$ bedeutet. Durch Integration von $\xi = 0$ bis $\xi = 1$ erhalten wir die einjährige Überlebenswahrscheinlichkeit; es ist

$$(13)\qquad p(x, t) = e^{-\int\limits_0^1 \mu(x+\xi,\, t+\xi)\,d\xi}\,.$$

Nun gilt aber für die Sterbeintensität die Darstellung

$$\mu(x+\xi, t+\xi) = \left(1 + e^{\frac{\beta-t-\xi}{\alpha}}\right)\mu(x+\xi, \infty)\,.$$

Diesen Ausdruck setzen wir in (13) ein und erhalten

$$p(x,t) = exp\left(-\int\limits_0^1 \mu(x+\xi, \infty)\,d\xi - e^{\frac{\beta-t}{\alpha}}\int\limits_0^1 e^{-\frac{\xi}{\alpha}}\,\mu(x+\xi, \infty)\,d\xi\right)$$

oder wenn wir die rechte Seite in Faktoren aufspalten sowie (13) für $t = \infty$ berücksichtigen:

$$(14)\qquad p(x,t) = p(x,\infty)\,exp\left(-e^{\frac{\beta-t}{\alpha}}\int\limits_0^1 e^{-\frac{\xi}{\alpha}}\,\mu(x+\xi, \infty)\,d\xi\right).$$

Wir setzen noch

$$(15) \qquad e^{-\int\limits_0^1 e^{-\frac{\xi}{\alpha}} \mu(x+\xi,\infty)\,d\xi} = 1 - Q(x)$$

und finden schliesslich zur Bestimmung der *einjährigen Überlebenswahrscheinlichkeit* die Formel:

$$(16) \qquad p(x,t) = p(x,\infty)\,[1 - Q(x)]^{e^{\frac{\beta-t}{\alpha}}}.$$

In (16) muss offenbar, damit diese Gleichung einen Sinn hat,

$$(17) \qquad 0 \leqq e^{-\int\limits_0^1 e^{-\frac{\xi}{\alpha}} \mu(x+\xi,\infty)\,d\xi} \leqq 1$$

gelten. Um dies zu beweisen, logarithmieren wir die Ungleichung:

$$-\infty \leqq -\int\limits_0^1 e^{-\frac{\xi}{\alpha}} \mu(x+\xi,\infty)\,d\xi \leqq 0$$

oder

$$0 \leqq \int\limits_0^1 e^{-\frac{\xi}{\alpha}} \mu(x+\xi,\infty)\,d\xi \leqq \infty\,.$$

Der Integrand ist aber stets positiv oder null, so dass (17) bewiesen ist. Gleichzeitig folgt für $Q(x)$:

$$0 \leqq Q(x) \leqq 1\,.$$

Zur Bestimmung von $Q(x)$ wenden wir auf das Integral links in (15) den ersten Mittelwertsatz der Integralrechnung an und erhalten

$$Q(x) = 1 - e^{-e^{-\frac{\vartheta}{\alpha}} \int\limits_0^1 \mu(x+\xi,\infty)\,d\xi}\,, 0 \leqq \vartheta \leqq 1\,,$$

oder, wenn wir die Definitionsgleichung der Intensität $\mu(x+\xi,\infty)$ berücksichtigen,

$$Q(x) = 1 - [1 - q(x,\infty)]^{e^{-\frac{\vartheta}{\alpha}}}.$$

Darin entwickeln wir das Binom rechter Hand nach dem binomischen Satz, wobei wir die Glieder zweiter und höherer Ordnung in $q(x,\infty)$ verabredungsgemäss vernachlässigen; ferner setzen wir noch für $e^{-\frac{\vartheta}{a}}$ die Konstante k ein; alsdann ergibt sich für $Q(x)$ der Näherungswert

$$Q(x) = k\,q(x,\infty)\,,\; e^{-\frac{1}{a}} \leqq k \leqq 1\,.$$

Dabei ist k eine im angegebenen Intervall beliebige Konstante, die erst durch die numerischen Berechnungen genau festgelegt werden kann. Bei der numerischen Auswertung der Ergebnisse wird es sich erweisen, dass der für die numerischen Berechnungen günstigste Wert von k gerade 1 ist. — Den exakten Beweis, dass $k = 1$ gesetzt werden darf, werden wir später noch erbringen. — Damit erhalten wir für $Q(x)$ die Beziehung

$$Q(x) = q(x,\infty)\,. \tag{18}$$

Diesen besonderen Wert von $Q(x)$ werden wir in den weiteren theoretischen Betrachtungen verwenden.

Für die einjährige Überlebenswahrscheinlichkeit selber folgt dann der Wert, wenn (18) in (16) eingesetzt wird,

$$p(x,t) = p(x,\infty)\,[1 - q(x,\infty)]^{e^{\frac{\beta-t}{a}}}\,.$$

In diesem Ausdruck entwickeln wir den zweiten Faktor rechts nach dem binomischen Satz und vernachlässigen wiederum alle Glieder zweiter und höherer Ordnung in $q(x,\infty)$. Damit ergibt sich für $p(x,t)$ der Wert:

$$p(x,t) = p(x,\infty)\left[1 - e^{\frac{\beta-t}{a}}\,q(x,\infty)\right] \tag{19}$$

oder

$$p(x,t) = p(x,\infty) - e^{\frac{\beta-t}{a}}\,p(x,\infty)\,q(x,\infty)\,. \tag{19'}$$

Damit haben wir einen Ausdruck für die Überlebenswahrscheinlichkeit unter Einbezug der zu erwartenden Lebensverbesserung gefunden und können nun an die Darstellung der Überlebensordnung selber gehen.

b) Die Überlebensordnung $l(x, t)$. Bilden wir mittels der Formel (16) die n-jährige Überlebenswahrscheinlichkeit des x_0-jährigen zur Zeit t_0, wo $x = x_0 + n$, $t = t_0 + n$ ist, und multiplizieren mit der beliebigen Ausgangsgrösse $l(x_0, t)$, wo x_0 das unterste beobachtete Alter bedeutet, so erhalten wir den *genauen* Wert von $l(x, t)$:

$$l(x,t) = l(x,\infty) \prod_{\xi=0}^{n-1} [1 - Q(x_0 + \xi)]^{e^{\frac{\beta - t_0 - \xi}{\alpha}}}.$$

Wir wollen jedoch im Sinne unserer Vereinfachungen direkt an die Näherungsformel (19) anknüpfen. Die n-jährige Überlebenswahrscheinlichkeit des x_0-jährigen zur Zeit t_0 lässt sich dann schreiben als

$${}_np(x_0, t_0) = {}_np(x_0, \infty) \prod_{\xi=0}^{n-1} \left[1 - e^{\frac{\beta - t_0 - \xi}{\alpha}} q(x_0 + \xi, \infty)\right].$$

Das Produkt werten wir aus und vernachlässigen dabei wiederum alle Glieder zweiter und höherer Ordnung in $q(x + \xi, \infty)$. Dann folgt für ${}_np(x_0, t_0)$ der Wert

$$(20) \qquad {}_np(x_0, t_0) = {}_np(x_0, \infty) \left[1 - \sum_{\xi=0}^{n-1} e^{\frac{\beta - t_0 - \xi}{\alpha}} q(x_0 + \xi, \infty)\right].$$

Diese Gleichung multiplizieren wir mit $l(x_0, t)$ und beachten, dass, falls x_0 das unterste beobachtete Alter ist, diese Grösse eine von t unabhängige Konstante bedeutet. Es ergibt sich damit die Überlebensordnung zu

$$(21) \qquad l(x,t) = l(x,\infty) \left[1 - \sum_{\xi=0}^{n-1} e^{\frac{\beta - t_0 - \xi}{\alpha}} q(x_0 + \xi, \infty)\right]$$

oder

$$(21') \qquad l(x,t) = l(x,\infty) - e^{\frac{\beta - t_0}{\alpha}} \sum_{\xi=0}^{n-1} e^{-\frac{\xi}{\alpha}} 1(x,\infty)\, q(x_0 + \xi, \infty),$$

wo $x = x_0 + n$ und $t = t_0 + n$ bedeuten.

§ 5

Der Rentenbarwert unter Einbezug der Lebensverbesserung in diskontinuierlicher Darstellung[1])

a) Lebenslängliche Rente. In die Beziehung für den Rentenbarwert

$$\mathfrak{a}(x,t) = \frac{1}{l(x,t)} \sum_{\xi=0}^{\infty} v^{\xi}\, l(x+\xi, t+\xi) = \frac{N(x,t)}{D(x,t)}$$

führen wir die im letzten Paragraphen abgeleitete Näherungsformel ein. Vorerst definieren wir die folgenden *Kommutationszahlen:*

$$D(x,t) = v^x\, l(x,t)\,,$$
$$D(x+1, t+1) = D(x,t)\, v\, p(x,t)\,,$$
$$D(x+2, t+2) = D(x,t)\, v^2\, {}_2p(x,t)\,, \text{ usw.}$$

Durch Summation dieser Grössen ergibt sich weiter

$$N(x,t) = D(x,t)\left[1 + \sum_{\xi=1}^{\infty} v^{\xi}\, {}_{\xi}p(x,t)\right], \tag{22}$$

und wenn wir durch $D(x,t)$ dividieren,

$$\mathfrak{a}(x,t) = 1 + \sum_{\xi=1}^{\infty} v^{\xi}\, {}_{\xi}p(x,t)\,.$$

Wir ersetzen die Grössen ${}_{\xi}p(x,t)$ durch die Näherungswerte (19) und erhalten für den Rentenbarwert die folgende Darstellung:

$$\mathfrak{a}(x,t) = 1 + \sum_{\xi=1}^{\infty} v^{\xi}\, {}_{\xi}p(x,\infty) - e^{\frac{\beta-t}{\alpha}} \sum_{\xi=1}^{\infty} v^{\xi}\, {}_{\xi}p(x,\infty) \sum_{\eta=0}^{\xi-1} e^{-\frac{\eta}{\alpha}}\, q(x+\eta,\infty)$$

oder, wenn wir den Rentenbarwert $\mathfrak{a}(x,\infty)$ der unendlich fernen Tafel einführen,

---

[1]) Mit Rücksicht auf die bisher verwendete Bezeichnungsweise benennen wir — leicht abweichend von der üblichen Art — den Barwert der lebenslänglichen Rente mit $\mathfrak{a}(x,t)$, den Barwert der temporären Rente mit ${}_{|n}\mathfrak{a}(x,t)$ und den Barwert der aufgehobenen Rente mit ${}_{n|}\,\mathfrak{a}(x,t)$.

$$a(x,t) = a(x,\infty) - e^{\frac{\beta - t}{\alpha}} F(x)\,, \tag{23}$$

wo

$$F(x) = \sum_{\xi=1}^{\infty} v^{\xi}\, {}_{\xi}p(x,\infty) \sum_{\eta=0}^{\xi-1} e^{-\frac{\eta}{\alpha}} q(x+\eta,\infty)$$

ist. Die Doppelsumme in $F(x)$ werden wir noch vereinfachen. Zunächst führen wir in ihr die diskontierten Zahlen der unendlich fernen Tafel ein und erhalten

$$F(x) = \sum_{\xi=1}^{\infty} \frac{D(x+\xi,\infty)}{D(x,\infty)} \sum_{\eta=0}^{\xi-1} e^{-\frac{\eta}{\alpha}} q(x+\eta,\infty)\,.$$

Zur Vertauschung der Summationen schreiben wir den ganzen Ausdruck aus. Es ist

$$\begin{aligned} F(x)\,D(x,\infty) = {} & D(x+1,\infty)\,q(x,\infty) + \\ & D(x+2,\infty)\,q(x,\infty) + e^{-\frac{1}{\alpha}} D(x+2,\infty)\,q(x+1,\infty) + \\ & D(x+3,\infty)\,q(x,\infty) + e^{-\frac{1}{\alpha}} D(x+3,\infty)\,q(x+1,\infty) + \\ & \qquad + e^{-\frac{2}{\alpha}} D(x+3,\infty)\,q(x+2,\infty) + \\ & + \cdots \end{aligned}$$

Wir addieren die Kolonnen und erhalten

$$F(x)\,D(x,\infty) = \sum_{\xi=1}^{\infty} e^{-\frac{\xi-1}{\alpha}} q(x+\xi-1,\infty)\,N(x+\xi,\infty)\,. \tag{24}$$

Diesen Ausdruck für $F(x)$ setzen wir in (23) ein und erhalten für den Rentenbarwert die Gleichung

$$a(x,t) = a(x,\infty) - e^{\frac{\beta-t}{\alpha}} \sum_{\xi=1}^{\infty} e^{-\frac{\xi-1}{\alpha}} q(x+\xi-1,\infty) \frac{N(x+\xi,\infty)}{D(x,\infty)}\,. \tag{25}$$

b) Temporäre Rente. Auch hier gehen wir von der Formel (22) für die diskontierten Zahlen $N(x,t)$ aus und bilden die Differenz

$$N(x,t) - N(x+n,t+n) = D(x,t) \left[1 + \sum_{\xi=1}^{n-1} v^{\xi}\, {}_{\xi}p(x,t) \right],$$

oder, wenn wir durch $D(x,t)$ dividieren,

$$_{|n}a(x,t) = 1 + \sum_{\xi=1}^{n-1} v^{\xi}\, {}_{\xi}p(x,t)\,.$$

Wieder ersetzen wir die ${}_{\xi}p(x,t)$ durch ihre Näherungswerte (19):

$$(26) \qquad {}_{|n}a(x,t) = {}_{|n}a(x,\infty) - e^{\frac{\beta-t}{\alpha}}\, {}_{|n}F(x)\,,$$

wo

$${}_{|n}F(x) = \sum_{\xi=1}^{n-1} v^{\xi}\, {}_{\xi}p(x,\infty) \sum_{\eta=0}^{\xi-1} e^{-\frac{\eta}{\alpha}}\, q(x+\eta,\infty)$$

ist.

In ${}_{|n}F(x)$ führen wir die diskontierten Zahlen der unendlich fernen Tafel ein und schreiben die Doppelsumme aus. Es gilt

$$\begin{aligned} D(x,\infty)\, {}_{|n}F(x) = {} & D(x+1,\infty)\, q(x,\infty) + \\ & D(x+2,\infty)\, q(x,\infty) + e^{-\frac{1}{\alpha}} D(x+2,\infty)\, q(x+1,\infty) + \\ & + \ldots + \\ & + D(x+n-1,\infty)\, q(x,\infty) + \ldots \\ & \qquad + D(x+n-1,\infty)\, e^{-\frac{n-1}{\alpha}}\, q(x+n-2,\infty)\,. \end{aligned}$$

Addieren wir hier die Kolonnen, so erhalten wir schliesslich für ${}_{|n}F(x)$ den Wert:

$$D(x,\infty)\, {}_{|n}F(x) = \sum_{\xi=1}^{n-1} e^{-\frac{\xi-1}{\alpha}}\, q(x+\xi-1,\infty)\, [N(x+\xi,\infty) - N(x+n,\infty)]\,.$$

Für den Rentenbarwert folgt somit die Gleichung:

$$(27) \qquad {}_{|n}a(x,t) = {}_{|n}a(x,\infty) - e^{\frac{\beta-t}{\alpha}} \sum_{\xi=1}^{n-1} e^{-\frac{\xi-1}{\alpha}}\, q(x+\xi-1,\infty)\, \frac{N(x+\xi,\infty) - N(x+n,\infty)}{D(x,\infty)}\,.$$

c) Aufgeschobene Rente. Den Barwert der m Jahre aufgeschobenen Rente ${}_{m|}a(x,t)$ berechnen wir als Differenz der lebenslänglichen und der m Jahre laufenden temporären Rente.

Wir haben also

$$ (28) \qquad {}_{m|}\mathrm{a}(x,t) = {}_{m|}\mathrm{a}(x,\infty) - e^{\frac{\beta-t}{\alpha}}\, {}_{m|}F(x), $$

wo

$$ {}_{m|}F(x) = \sum_{\xi=m}^{\infty} e^{-\frac{\xi-1}{\alpha}} q(x+\xi-1,\infty) \frac{N(x+\xi,\infty)}{D(x,\infty)} + $$

$$ + \sum_{\xi=1}^{m-1} e^{-\frac{\xi-1}{\alpha}} q(x+\xi-1,\infty) \frac{N(x+m,\infty)}{D(x,\infty)} $$

ist.

Damit sind alle Rentenbarwerte ausgedrückt als Differenzen zweier Funktionen, von denen die erste den Rentenbarwert der unendlich fernen Tafel darstellt, während die zweite das Produkt einer nur von t abhängigen mit einer nur vom Alter x abhängigen Funktion ist. Alle drei Funktionen sind tabellierbar.

§ 6

Der Rentenbarwert unter Einbezug der Lebensverbesserung in kontinuierlicher Darstellung

a) Die Überlebensordnung $l(x, t)$ bei Voraussetzung der Makehamschen Sterbeformel. Es gelte für die Sterbeintensität der unendlich fernen Sterbetafel der Ansatz

$$ (29) \qquad \mu(x,\infty) = \sigma + \gamma c^x, $$

wo $\sigma = -\log s$ und $\gamma = -\log g \log c$ bedeuten, und

$$ l(x,\infty) = k s^x g^{c^x} $$

ist.

Folgt die unendlich ferne Sterbetafel der Makehamschen Formel, so gilt dies auch für jede aus ihr mittels der logistischen Formel (5) hergeleitete Sterbetafel. — Sind nämlich $\sigma(t)$, $\gamma(t)$ und $c(t)$ die Makehamschen Konstanten der Sterbetafel für den Zeitpunkt t, so besteht nach der Interpolationsformel (5) die Relation

$$ \mu(x,t) = \left(1 + e^{\frac{\beta-t}{\alpha}}\right)\left[\sigma(\infty) + \gamma(\infty)\, c^x(\infty)\right] = \sigma(t) + \gamma(t)\, c^x(t). $$

Vergleichen wir die entsprechenden Koeffizienten, so finden wir zwischen den Makehamschen Konstanten die Beziehungen

$$\sigma(t) = \left(1 + e^{\frac{\beta - t}{\alpha}}\right)\sigma(\infty), \gamma(t) = \left(1 + e^{\frac{\beta - t}{\alpha}}\right)\gamma(\infty),$$

während die Konstante c von der Zeit t unabhängig ist.

Aus den Makehamschen Konstanten der unendlich fernen Sterbetafel können wir also sofort die Makehamschen Konstanten jeder andern mittels der Interpolationsformel (5) abgeleiteten Sterbetafel aus den vorstehenden Beziehungen berechnen.

Für die *Überlebensordnung* $l(x, t)$ gilt definitionsgemäss die Beziehung

$$l(x, t) = l(x_0, t - x + x_0) e^{-\int\limits_0^{x-x_0} \mu(x_0 + \xi,\, t - x + x_0 + \xi)\, d\xi},$$

wo $l(x_0, t - x + x_0)$ den $l(x, t)$ entsprechenden Ausgangsbestand bedeutet. Bei Berücksichtigung der Interpolationsformel (5) folgt

$$l(x, t) = l(x_0, t_0) e^{-\int\limits_0^{x-x_0} \left(1 + e^{\frac{\beta - t_0 - \xi}{\alpha}}\right) \mu(x_0 + \xi, \infty)\, d\xi}, \tag{30}$$

wo $t_0 = t - x + x_0$ ist. Führen wir in dieser Beziehung endlich noch die Makehamsche Formel für $\mu(x, \infty)$ ein, so ergibt sich

$$l(x, t) = l(x_0, t_0) e^{-\int\limits_0^{x-x_0} \left(1 + e^{\frac{\beta - t_0 - \xi}{\alpha}}\right) [\sigma + \gamma c^{x_0 + \xi}]\, d\xi}. \tag{31}$$

Die weitere Auswertung dieses Integrals wird später folgen.

b) Die Theorie von Cantelli. Mit Rücksicht auf eine vorzunehmende Zerlegung des Rentenbarwertes $a(x, t)$ haben wir uns in einer Einschaltung kurz mit der Theorie äquivalenter Prämiensysteme von *Cantelli* [1]) zu befassen.

Gegeben sei eine Versicherungskombination mit der kontinuierlichen n Jahre zahlbaren Prämie $P_{\overline{xn}|}$, der Zinsintensität δ und den

[1]) Es sei hier insbesondere auf die Abhandlung von *Cantelli* [3] verwiesen.

k Ausscheideintensitäten $\mu^{(\varkappa)}(x+\xi), \varkappa = 1, \ldots, k$, denen jeweils die Versicherungsleistungen $S^{(\varkappa)}(x+\xi)$ entsprechen [1]).

Dann lautet die *Differentialgleichung des Nettodeckungskapitals:*

$$\frac{d\,{}_{\xi}V_{\overline{xn}|}}{d\xi} = \Big[\delta + \sum_{\varkappa} \mu^{(\varkappa)}(x+\xi)\Big]\,{}_{\xi}V_{\overline{xn}|} + P_{\overline{xn}|} - \sum_{\varkappa} \mu^{(\varkappa)}(x+\xi)\,S^{(\varkappa)}(x+\xi)\,.$$

(32)

Verändern wir die Leistungen derart, dass

$$S^{(\varkappa)}(x+\xi) \rightarrow S^{(\varkappa)}(x+\xi) + \varepsilon^{(\varkappa)}\big(S^{(\varkappa)}(x+\xi) - {}_{\xi}V^{*}_{\overline{xn}|}\big)$$

wird, wo $\varepsilon^{(\varkappa)}$ eine beliebige von $\varkappa$ abhängige Konstante bedeutet, so folgt die neue Gleichung

$$\text{(33)} \quad \frac{d\,{}_{\xi}V^{*}_{\overline{xn}|}}{d\xi} = \Big[\delta + \sum_{\varkappa} \mu^{(\varkappa)}(x+\xi)\Big]\,{}_{\xi}V^{*}_{\overline{xn}|} + P^{*}_{\overline{xn}|} - \\ - \sum_{\varkappa} \mu^{(\varkappa)}(x+\xi)\,\big[(1+\varepsilon^{(\varkappa)})\,S^{(\varkappa)}(x+\xi) - \varepsilon^{(\varkappa)}\,{}_{\xi}V^{*}_{\overline{xn}|}\big]$$

oder

$$\text{(34)} \quad \frac{d\,{}_{\xi}V^{*}_{\overline{xn}|}}{d\xi} = \Big[\delta + \sum_{\varkappa} (1+\varepsilon^{(\varkappa)})\,\mu^{(\varkappa)}(x+\xi)\Big]\,{}_{\xi}V^{*}_{\overline{xn}|} + P^{*}_{\overline{xn}|} - \\ - \sum_{\varkappa} (1+\varepsilon^{(\varkappa)})\,\mu^{(\varkappa)}(x+\xi)\,S^{(\varkappa)}(x+\xi)\,.$$

Vergleichen wir (33) mit (34), so sehen wir, dass in der ersten Beziehung den k Ausscheideintensitäten $\mu^{(\varkappa)}$ die Leistungen $(1+\varepsilon^{(\varkappa)})$ $S^{(\varkappa)} - \varepsilon^{(\varkappa)}\,V^{*}$ entsprechen, während in der zweiten Gleichung die Ausscheideintensitäten $(1+\varepsilon^{(\varkappa)})\,\mu^{(\varkappa)}$ an die Leistungen $S^{(\varkappa)}$ gebunden sind. In beiden Fällen haben wir die gleiche Prämie und das gleiche Deckungskapital. Es bleibt also belanglos, ob wir die Teilintensitäten oder die Leistungen in der angegebenen Weise variieren.

---

[1]) In diesem Abschnitt wollen wir unter $a(x, t)$ den Barwert der kontinuierlich zahlbaren Leibrente des x-jährigen zur Zeit t verstehen; ${}_{|n}a(x, t)$ ist der entsprechende temporäre Rentenbarwert. Die vorkommenden Prämien und Reserven sind ebenfalls kontinuierlich zu verstehen. Ist das Argument t nicht angegeben, so wird der entsprechende Ausdruck allein in seiner Abhängigkeit von x betrachtet.

Symbolisch können wir dies folgendermassen darstellen:

$$(35)\qquad P_{\Sigma\mu}\left[\sum(1+\varepsilon)\,S-\varepsilon\,V\right]=P_{\Sigma(1+\varepsilon)\mu}\left[\sum S\right].$$

Von dieser Gleichung werden wir unmittelbar Gebrauch machen.

c) Zerlegung des Rentenbarwertes. Es sei $P_{\mu_1,\mu_2}[S_1, S_2]$ die Prämie einer gemischten Versicherung, bei der im Falle des Ausscheidens nach der Ausscheideintensität μ_1 oder μ_2 die Leistung S_1 oder S_2 erfolgt. Ferner sei die Summe $\mu_1+\mu_2=\mu_3$.

Auf die Grösse $P_{\mu_1,\mu_2}[1,1]$ wenden wir die Umformung an:

$$P_{\mu_1,\mu_2}[1,1]\cong P_{\mu_1,\mu_2}[1,V]+P_{\mu_1,\mu_2}[V,1]-P_{\mu_1,\mu_2}[V,V].$$

Hier stellt die linke Seite die Prämie derjenigen Versicherungskombination dar, bei der im Falle des Ausscheidens infolge einer der beiden Teilintensitäten μ_1 oder μ_2 jeweils die Leistung «1» erfolgt. Wir können daher für $P_{\mu_1,\mu_2}[1,1]$ wegen der Festsetzung $\mu_1+\mu_2=\mu_3$ auch $P_{\mu_3}[1]$ schreiben. Auf der rechten Seite bedeutet V der Reihe nach das Deckungskapital der Kombination $[1, V]$ oder $[V, 1]$ oder $[V, V]$.

Um die Grösse $P_{\mu_1,\mu_2}[1, V]$ auszuwerten, wenden wir die Gleichung (35) bei zwei Ausscheideursachen an und setzen darin $\varepsilon^{(1)}=0$ und $\varepsilon^{(2)}=-1$.

Dann folgt die Beziehung:

$$P_{\mu_1,\mu_2}[1,V]=P_{\mu_1}[1].$$

Ganz analog erhalten wir für $\varepsilon^{(1)}=-1$ und $\varepsilon^{(2)}=0$:

$$P_{\mu_1,\mu_2}[V,1]=P_{\mu_2}[1].$$

Damit ergibt sich die Zerlegung der Prämie:

$$(36)\qquad P_{\mu_3}[1]\cong P_{\mu_1}[1]+P_{\mu_2}[1]-P_{\mu_1,\mu_2}[V,V].$$

Bevor wir diese Beziehung weiter umformen, müssen wir den Ausdruck $P_{\mu_1,\mu_2}[V, V]$ deuten. $P_{\mu_1,\mu_2}[V, V]$ ist die Prämie derjenigen Versicherungsform, bei der im Falle des Ausscheidens die Leistung jeweils gleich der Reserve ist; in die Reservedifferentialgleichung (32) haben wir also für $S(x+\xi)$ den Wert V einzusetzen. Die Sterbeintensitäten heben sich heraus, und es bleibt die Reservedifferentialgleichung der Sparversicherung. Also ist

$$P_{\mu_1, \mu_2}[V, V] = P_{\overline{n|}} = \frac{1}{a_{\overline{n|}}} - \delta .$$

Nun beachten wir, dass ausserdem

$$P_{\mu_i}[1] = \frac{1}{{}_{|n}a_i(x)} - \delta, i = 1, 2, 3,$$

ist, dann erhalten wir aus (36) die Beziehung

$$\frac{1}{{}_{|n}a_3(x)} \cong \frac{1}{{}_{|n}a_1(x)} + \frac{1}{{}_{|n}a_2(x)} - \frac{1}{a_{\overline{n|}}} .$$

Lassen wir darin noch n ins Unendliche gehen, so ergibt sich

$$(37) \qquad \frac{1}{a_3(x)} \cong \frac{1}{a_1(x)} + \frac{1}{a_2(x)} - \frac{1}{a_{\overline{n=\infty|}}}, \; a_{\overline{n=\infty|}} = \frac{1}{\delta} .$$

Darin ist allgemein $a_i(x)$ der Barwert der kontinuierlich zahlbaren Rente, der die Ausscheideintensität $\mu_i(x)$ zugrunde liegt; dabei gilt $\mu_1 + \mu_2 = \mu_3$. Eine gleiche Zerlegung des Rentenbarwerts hat bereits *Lidstone* [1]) hergeleitet.

Die Interpolationsformel (5) schreiben wir, um $\mu_3(x) = \mu_1(x) + + \mu_2(x)$ zu erhalten, in der Form

$$\mu(x, t) = \mu(x, \infty) + e^{\frac{\beta - t}{\alpha}} \mu(x, \infty) .$$

Der gesuchte Rentenbarwert $a(x, t)$ lässt sich dann gemäss (37) darstellen durch den Rentenbarwert $a_1(x) \to a(x, \infty)$ und den Rentenbarwert $a_2(x) \to a^*(x, t)$, dem die Ausscheideintensität $e^{\frac{\beta - t}{\alpha}} \mu(x, \infty)$ entspricht.

Ist δ die gegebene Zinsintensität, so nimmt der Rentenbarwert $a^*(x, t)$ die Gestalt an:

---

[1]) *Lidstone* [4] leitet diese Formel auf einem anderen Wege her. Die Formel gilt näherungsweise auch für die Zerlegung der diskontinuierlichen temporären Verbindungsrente.

$$a^*(x,t) = \int_0^\infty e^{-\int_0^\tau \left[\delta + e^{\frac{\beta - t - \xi}{\alpha}} \mu(x+\xi, \infty)\right] d\xi} \, d\tau \,, \tag{38}$$

während

$$a(x, \infty) = \int_0^\infty e^{-\int_0^\tau [\delta + \mu(x+\xi, \infty)]\, d\xi} \, d\tau \tag{39}$$

ist.

d) Einführung der Makehamschen Sterbeformel. Zur Berechnung des Wertes $a^*(x, t)$ nehmen wir erneut an, $\mu(x, \infty)$ sei durch eine Makehamsche Kurve darstellbar. Dann gilt (29):

$$\mu(x, \infty) = \sigma + \gamma c^x,$$

wobei $\sigma, \gamma > 0$ sind und $c > 1$ ist.

Zuerst lösen wir das Integral des Exponenten von (38)

$$\int_0^\tau \left[\delta + e^{\frac{\beta - t - \xi}{\alpha}} \mu(x + \xi, \infty)\right] d\xi$$

auf. Setzen wir darin für $\mu(x + \xi, \infty)$ den Wert aus (29) ein, so nimmt es den Wert an

(40)

$$\int_0^\tau \left[\delta + e^{\frac{\beta - t - \xi}{\alpha}} (\sigma + \gamma c^{x+\xi})\right] d\xi = \left[\delta \xi - e^{\frac{\beta - t - \xi}{\alpha}} \left(\alpha\sigma + \frac{\alpha \gamma c^{x+\xi}}{1 - \alpha \log c}\right)\right]_0^\tau .$$

Wir setzen zur Abkürzung noch

$$\alpha e^{\frac{\beta - t}{\alpha}} = \varDelta(t), e^{-\frac{1}{\alpha}} = b, 0 \leq b \leq 1, \frac{\gamma c^x}{1 - \alpha \log c} = C(x)$$

und erhalten für (40) den Wert

$$\delta\tau + \sigma\varDelta(t) + \varDelta(t)\, C(x) - \sigma\varDelta(t)\, b^\tau - \varDelta(t)\, C(x)\, (bc)^\tau .$$

Dieses Ergebnis führen wir in (38) ein und finden

$$a^*(x,t) = e^{-\varDelta(t)\,(\sigma + C(x))} \int_0^\infty e^{-\delta\tau + \sigma\varDelta(t) b^\tau + \varDelta(t)\, C(x)\, (bc)^\tau} \, d\tau \,. \tag{41}$$

Zur Vereinfachung bezeichnen wir das Integral rechts mit J; dann gilt

$$a^*(x, t) = J\, e^{-A(t)\,(\sigma + C(x))},$$

mit

$$J = \int_0^\infty e^{-\delta\tau + \sigma A(t) b^\tau + A(t)\, C(x)\, (bc)^\tau}\, d\tau\,.$$

Sodann führen wir eine neue Integrationsvariable $y = e^{-\delta\tau}$ ein mit $dy = -\,\delta y\, d\tau$. Ferner wird

$$b^\tau = y^{\frac{1}{\alpha\delta}}\,, c^\tau = y^{-\frac{\log c}{\delta}}\,, \quad \text{Grenzen:} \quad \begin{array}{c|c} \tau & y \\ \hline 0 & 1 \\ \infty & 0 \end{array}$$

und damit

$$(42) \qquad J = \frac{1}{\delta} \int_0^1 exp\left(\sigma A(t)\, y^{\frac{1}{\alpha\delta}} + A(t)\, C(x)\, y^{\frac{1-\alpha \log c}{\alpha\delta}}\right) dy\,.$$

Eine direkte Auflösung dieses Integrals besteht nicht, dagegen lässt sich sein Wert durch Reihenentwicklungen beliebig approximieren.

α) Approximation mittels einer binomischen Reihe. Wir entwickeln den Integranden zunächst in eine Exponentialreihe

$$exp\left(\sigma A(t)\, y^{\frac{1}{\alpha\delta}} + A(t)\, C(x)\, y^{\frac{1-\alpha \log c}{\alpha\delta}}\right) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \left|\sigma A(t)\, y^{\frac{1}{\alpha\delta}} + A(t)\, C(x)\, y^{\frac{1-\alpha \log c}{\alpha\delta}}\right|^\nu$$

und schreiben für die ν-te Potenz rechts die binomische Reihe:

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!}\, A(t)^\nu \sum_{\lambda=0}^{\nu} \frac{\nu!}{\lambda!\,(\nu-\lambda)!}\, \sigma^{\nu-\lambda}\, C(x)^\lambda\, y^{\frac{\nu-\alpha\lambda \log c}{\alpha\delta}}\,.$$

Die Summe integrieren wir gliedweise; alsdann ergibt sich

$$J = \alpha \sum_{\nu=0}^{\infty} \sigma^\nu A(t)^\nu \sum_{\lambda=0}^{\nu} \frac{\sigma^{-\lambda}\, C(x)^\lambda}{\lambda!\,(\nu-\lambda)!\,(\nu - \alpha\lambda \log c + \alpha\delta)}\,.$$

Diesen Ausdruck setzen wir in (41) ein und erhalten als Rentenbarwert

(43)
$$a^*(x,t) = \alpha e^{-\Delta(t)(\sigma + C(x))} \sum_{\nu=0}^{\infty} (\sigma \Delta(t))^{\nu} \sum_{\lambda=0}^{\nu} \frac{\sigma^{-\lambda} C(x)^{\lambda}}{\lambda!\,(\nu-\lambda)!\,(\nu - \alpha\lambda \log c + \alpha\delta)} .$$

β) Approximation mittels zweier Exponentialreihen. Als Ausgangspunkt wählen wir das Integral J, werden jedoch zuerst nur einen Teil des Integranden in eine Exponentialreihe entwickeln, nämlich

$$exp\left(\Delta(t)\, C(x) y^{\frac{1-\alpha \log c}{\alpha\delta}}\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \Delta(t)^{\nu}\, C(x)^{\nu}\, y^{\frac{\nu - \alpha\nu \log c}{\alpha\delta}} .$$

Diese Beziehung setzen wir in J ein und erhalten

$$(44) \qquad J = \frac{1}{\delta} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \Delta(t)^{\nu}\, C(x)^{\nu} \int_0^1 y^{\frac{\nu-\alpha\nu \log c}{\alpha\delta}}\, e^{\sigma \Delta(t) y^{\frac{1}{\alpha\delta}}}\, dy .$$

Sodann entwickeln wir den zweiten Faktor dieses Integranden in eine Exponentialreihe und erhalten

$$J = \frac{1}{\delta} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \Delta(t)^{\nu}\, C(x)^{\nu} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda!} \sigma^{\lambda}\, \Delta(t)^{\lambda} \int_0^1 y^{\frac{\nu+\lambda-\alpha\nu \log c}{\alpha\delta}}\, dy$$

und daraus

$$J = \alpha \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\sigma^{\lambda}\, \Delta(t)^{\nu+\lambda}\, C(x)^{\nu}}{\nu!\,\lambda!\,(\nu+\lambda - \alpha\nu \log c + \alpha\delta)}$$

Damit ist der Rentenbarwert bestimmt:

$$(45) \qquad a^*(x,t) = \alpha e^{-\Delta(t)(\sigma + C(x))} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\sigma^{\lambda}\, \Delta(t)^{\nu+\lambda}\, C(x)^{\nu}}{\nu!\,\lambda!\,(\nu+\lambda - \alpha\nu \log c + \alpha\delta)} .$$

γ) Darstellung mittels unvollständiger Γ-Funktionen [1]). Im Integral der Formel (44) setzen wir als neue Variable

---

[1]) Vgl. *Friedli* [5], wo die Entwicklung des Rentenbarwerts — allerdings nur als Funktion von x — mittels unvollständiger Γ-Funktionen vorgenommen wird.

$$z = -\sigma \Delta(t) y^{\frac{1}{\alpha\delta}},\ dy = \alpha\delta\,(-\sigma\Delta(t))^{-\alpha\delta}\, z^{\alpha\delta-1}\, dz\,,$$

Grenzen:

y	z
0	0
1	$-\sigma\Delta(t)$

Für J erhalten wir, wenn wir $k = 1 - \alpha \log c$ setzen,

$$J = \alpha \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} (-\sigma)^{-\alpha\delta-\nu k}\, \Delta(t)^{\alpha(\nu \log c - \delta)}\, C(x)^{\nu} \int_0^{-\sigma\Delta(t)} z^{\nu k + \alpha\delta - 1}\, e^{-z}\, dz\,.$$

Darin stellt das Integral rechts eine unvollständige Γ-Funktion dar, nämlich

$$P(-\sigma\Delta(t), \nu k + \alpha\delta)\,.$$

Die unvollständige Γ-Funktion kann auf verschiedene Arten ausgewertet werden [1]). Wir geben hier eine von *Legendre* herrührende Entwicklung an; es gilt

$$P(x, h) = e^{-x} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^{h+\nu}}{h(h+1)\ldots(h+\nu)}\,.$$

Mit Hilfe dieser Formel erhalten wir für das Integral J die Gleichung:

$$J = \alpha \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!}\, \Delta(t)^{\nu}\, C(x)^{\nu} \sum_{\lambda=0}^{\infty} e^{\sigma\Delta(t)} \frac{(\nu k + \alpha\delta - 1)!}{(\nu k + \alpha\delta + \lambda)!} (-\sigma\Delta(t))^{\lambda}\,.$$

Setzen wir diesen Wert endlich noch in (38) ein, so folgt

$$(46)\quad a^*(x,t) = \alpha e^{-\Delta(t)\, C(x)} \sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(\nu k + \alpha\delta - 1)!}{\nu!\,(\nu k + \alpha\delta + \lambda)!} (-\sigma)^{\lambda}\, C(x)^{\nu}\, \Delta(t)^{\nu+\lambda}\,.$$

Bei den vorstehenden Ableitungen haben wir darauf verzichtet, die Frage der Konvergenz der auftretenden Summen sowie die der Vertauschbarkeit der Summationen mit den Integrationen besonders zu untersuchen. Wir verweisen an dieser Stelle auf die Abhandlung von *Reichelt* [2]), der allerdings ohne Berücksichtigung der Abhängigkeit der Leibrente von der Beobachtungszeit t die Konvergenz der rechten Seite von (38) einer kritischen Betrachtung unterzogen hat.

[1]) Die Theorie der unvollständigen Γ-Funktionen sowie der Beweis der Entwicklung nach *Legendre* finden sich z. B. bei *Nielsen* [6].

[2]) Vgl. *Reichelt* [7].

2. Abschnitt

Numerische Überprüfung des Verfahrens

Die im vorhergehenden Abschnitt entwickelte Methode wollen wir nun auf Grund schweizerischer Sterblichkeitserfahrungen numerisch überprüfen und damit auch die einfache Handhabung des Vorgehens belegen.

§ 7

Die unendlich ferne Sterbetafel

a) Die Baltenspergersche Tafel. Baltensperger [1]) hat den Versuch unternommen, die Sterblichkeit der schweizerischen Bevölkerung auf der Grundlage einer unendlich fernen Sterbetafel vorauszuberechnen. Zuerst konstruiert er in einfacher Weise die benötigte unendlich ferne Sterbetafel, auf die wir später noch genauer eingehen müssen. Zur Interpolation der Sterbewahrscheinlichkeiten selber wird die Formel benutzt:

$$q(x, t) = q(x, \infty) + \Delta(q(x))C^{-t},$$

wo $\Delta(q) = q(x, 1929\text{—}1932) - q(x, \infty)$ bedeutet und $C > 1$ eine feste Konstante ist. Der Nullpunkt der t-Abszisse liegt bei 1931,0.

Um die Ergebnisse von *Baltensperger* in den Berechnungen der Rentenversicherung praktisch anwenden zu können, müsste man mit Hilfe der $q(x, t)$ für alle Zeitpunkte t die Überlebensordnung $l(x, t)$ bestimmen und daraus weiter die Rentenbarwerte ermitteln.

Für unsere Zwecke ist aus der Arbeit von *Baltensperger* die Konstruktion der unendlich fernen Sterbetafel von Bedeutung; die folgenden Grundsätze waren für ihre Aufstellung massgebend:

1. Die absolute Sterblichkeit infolge der Todesursachen Selbstmord, Unfall, Krankheiten des Kreislaufapparates, Altersschwäche und Krebs behält für das Alter 25 den Wert der Jahre 1928—1935 bei.

2. Die prozentuale Verteilung dieser Todesursachen auf die Altersgruppen bleibt dieselbe wie in den Jahren 1928—1935.

---

[1]) Vgl. *Baltensperger* [8].

3. Die absolute Sterblichkeit strebt mit wachsender Zeit für jedes Alter einem festen Grenzwert zu.

4. Die absolute Sterblichkeit infolge anderer als der in der ersten Voraussetzung angeführten Todesursachen wird für das jüngste beobachtete Alter, d. h. für das Alter 25, beim Erreichen des Grenzwertes noch die Hälfte ihres Wertes der Jahre 1928—1935 haben.

5. Die absolute Sterblichkeit der Hundertjährigen behält ihren Wert von 1928—1935 bei.

Bezeichnen wir die Sterblichkeit infolge der in der ersten Voraussetzung genannten Todesursachen mit $q_I(x, t)$, so erhalten wir nach *Baltensperger* die folgende Formel zur Konstruktion der unendlich fernen Sterbetafel:

$$q(x, \infty) = q(x, 1931{,}0) - \frac{100 - x}{2 \cdot 75} \left[q(x, 1931{,}0) - q_I(x, 1931{,}0) \right].$$

Der Zahlenfaktor des Minuenden rechter Hand ist einerseits bedingt durch die vierte Voraussetzung, wonach der Endwert der heute in der Abnahme begriffenen Todesursachen gegen den halben Wert der Jahre 1928—1935 konvergieren soll. Andererseits ist $\frac{100 - x}{75}$ der einfachste Ausdruck für die Voraussetzung, die Abnahme der Sterblichkeit auf die halben Werte der Periode 1928—1935 treffe in der unendlich fernen Sterbetafel nur für das unterste Alter ein, während die Sterblichkeit der Hundertjährigen unverändert bleibe.

Um zu entscheiden, ob wir diese Vorausberechnung der Sterblichkeit nach *Baltensperger* für die Lösung unserer Aufgabe übernehmen dürfen, vergleichen wir mit der 1941 — nach Abschluss der Untersuchungen von *Baltensperger* — veröffentlichten schweizerischen Volkssterbetafel SM 1933—1937. Die Sterbewahrscheinlichkeiten der Sterbetafel SM 1933—1937 decken sich für die Altersklassen bis 45 zienlich genau mit den von *Baltensperger* für den Zeitpunkt 1941,0 vorausberechneten; in den Altersklassen 45—70 entsprechen sich die Sterbeziffern der Tafel SM 1933—1937 und der *Baltensperger*schen Tafel für 1951,0. Für die höheren Alter nähern sich die Beobachtungswerte 1933—1937 mehr und mehr der unendlich fernen Tafel, und bei Alter 84 überschneiden sich die Werte sogar. Daraus sehen wir, dass die Annahmen von *Baltensperger* einer Anpassung bedürfen.

Baltensperger setzt voraus, dass die absolute Sterblichkeit der Hundertjährigen ihren Wert von 1928—1935 beibehalte. Um diese

Annahme rechnerisch zum Ausdruck zu bringen, gibt er in seiner Formel zur Berechnung der Sterbewahrscheinlichkeit $q(x, \infty)$ der Komponente der abnehmenden Teilwahrscheinlichkeiten den Faktor $\frac{100-x}{75}$ bei. Dieser soll in einfacher Weise den abnehmenden Einfluss der Lebensverbesserung auf die Sterbewahrscheinlichkeiten bei wachsendem Alter darstellen. Diese Einengung wollen wir fallen lassen.

b) Die Voraussetzungen der hypothetischen Sterbetafeln A_1 und A_2. Die modifizierten Annahmen für die unendlich fernen Sterbetafeln führen auf die folgenden *Voraussetzungen:*

1. Die absolute Sterblichkeit infolge der Ursachen Krebs, Unfall, Selbstmord, Krankheiten des Kreislaufapparates und Altersschwäche bleibt dieselbe wie in den Jahren 1928—1935.

2. Die absolute Sterblichkeit infolge anderer als der in der ersten Voraussetzung genannten Todesursachen strebt der Hälfte des Wertes zu, der in der Periode 1928—1935 beobachtet wurde.

3. Die prozentuale Verteilung der Todesursachen auf die Altersgruppen bleibt dieselbe, wie sie in der Beobachtungsperiode festgestellt wurde.

Betrachten werden wir die Sterblichkeit der Männer vom 25. Altersjahre an. — Die auf diesen Grundlagen gebildeten Werte $q(x, \infty)$ gleichen wir in der Hauptsache nach der Methode von *King* aus. Zur Ausgleichung der untersten 12 Jahre verwenden wir die Methode der orthogonalen Polynome von *Gram*, während wir die obersten Alter durch geeignete Mittelwerte glätten. Die so erhaltene Sterbetafel werden wir künftig mit A_1 bezeichnen und sämtliche auf sie bezogenen Grössen mit dem Index 1 versehen. So sei z. B. $q_1(x, \infty)$ die ausgeglichene Sterbewahrscheinlichkeit nach der Sterbetafel A_1.

Die Fortschritte der modernen Krebsforschung geben zu der Vermutung Anlass, es werde gelingen, die Wirkung des Krebses weitgehend einzudämmen. Um dieser möglichen Entwicklung Rechnung zu tragen, werden wir neben der Tafel A_1 eine zweite unendlich ferne Sterbetafel betrachten, der wir die gleichen Voraussetzungen zugrunde legen wie der Tafel A_1 mit dem einen Unterschiede, dass wir die Todesursache «Krebs» aus der ersten Voraussetzung herausnehmen und in die zweite Voraussetzung einsetzen [1]). Die derart entstandene Sterbe-

[1]) Die dabei benutzte Krebssterbetafel findet sich in der Abhandlung [9].

tafel bezeichnen wir mit A_2 und werden Grössen, die sich auf diese Tafel beziehen, mit dem Index 2 kennzeichnen.

Da Sterbefälle infolge Krebskrankheiten nur bis zum 94. Altersjahr beobachtet wurden, liegen auch die entsprechenden Sterbeziffern nur bis zu diesem Alter vor. Deshalb bricht unsere Sterbetafel A_2 beim Alter 94 ab.

Die Sterbetafeln A_1 und A_2 sind in der folgenden Tabelle I auszugsweise wiedergegeben:

Die Tafeln A_1 und A_2 *Tabelle I*

x	A_1 $q_1(x,\infty)$	A_2 $q_2(x,\infty)$	x	A_1 $q_1(x,\infty)$	A_2 $q_2(x,\infty)$
25	0,00 272	0,00 271	65	0,03 357	0,02 920
30	280	276	70	5 077	4 469
35	337	329	75	8 019	7 255
40	429	413	80	12 093	11 306
45	619	579	85	18 104	17 359
50	963	871	90	25 050	24 360
55	1 471	1 288	95	35 660	—
60	2 179	1 894	—	—	—

§ 8

Abhängigkeit der Grössen $\alpha(x)$ und $\beta(x)$ vom Alter x

Zwischen der unendlich fernen Sterbetafel und den Erfahrungstafeln interpolieren wir die Sterbewahrscheinlichkeiten nach der in § 3 angegebenen Methode. Zur Bestimmung der Grössen $\alpha(x)$ und $\beta(x)$ wählen wir neben der unendlich fernen Sterbetafel die beiden Volkssterbetafeln SM 1929—1932 und SM 1933—1937. Der ersten Tafel geben wir die Zeitabszisse $t_1 = 0$ und der zweiten die Abszisse $t_2 = 4{,}5$.

Um den Verlauf der Grössen $\alpha(x)$ und $\beta(x)$ in Abhängigkeit vom Alter x darzustellen, genügt es, die Rechnungen mit Gruppen von je fünf aufeinander folgenden Altern durchzuführen und dabei anzunehmen, dass für alle Alter in diesen Gruppen jeweils $\alpha(x)$ und $\beta(x)$ gemeinsame Werte annehmen. Dann gilt für die Altersgruppe, deren niederstes Alter x ist [1])

[1]) Auch weiterhin werden wir bei Rechnungen mit Altersgruppen, die einzelnen Gruppen jeweils durch das tiefste in ihnen enthaltene Alter kennzeichnen.

$$\sum_{\xi=x}^{x+4} q(\xi, t) = \left(1 + e^{\frac{\beta(x)-t}{\alpha(x)}}\right) \sum_{\xi=x}^{x+4} q(\xi, \infty).$$

Damit berechnen wir sofort die Werte $\alpha(x)$ und $\beta(x)$, die in der Tabelle II zusammengestellt sind.

Die Konstanten $\alpha(x)$, $\beta(x)$ und $\bar{\beta}(x)$ *Tabelle II*

	$\alpha_1(x)$	$\alpha_2(x)$	$-\beta_1(x)$	$-\beta_2(x)$	$-\bar{\beta}_1(x)$	$-\bar{\beta}_2(x)$
25	8,341 6	8,539 6	6,460 1	6,391 0	6,358 5	10,340 3
30	6,656 1	6,983 0	4,616 2	4,440 1	7,420 0	8,777 5
35	9,758 4	10,625 3	7,756 9	7,371 2	8,579 2	9,553 1
40	11,641 1	13,347 0	10,022 7	9,279 8	9,292 4	9,598 0
45	9,733 2	11,744 7	9,280 7	8,662 5	10,291 1	10,181 9
50	8,106 3	11,585 2	8,590 2	7,652 2	11,437 3	9,116 0
55	9,249 0	14,135 2	10,909 1	9,866 9	12,730 2	9,636 1
60	13,921 0	21,984 5	18,366 9	17,104 7	14,236 6	10,740 4
65	12,676 3	20,585 1	18,025 9	17,859 5	15,347 8	11,976 8
70	13,764 4	21,495 6	20,095 9	20,488 6	15,757 7	13,157 9
75	15,796 3	22,493 4	23,571 2	24,579 3	16,104 6	15,130 6
80	27,786 7	35,010 8	41,452 0	42,768 5	16,100 8	16,863 4
85	10,246 1	12,187 9	15,148 8	15,874 5	15,958 3	17,980 2
90	8,982 7	9,670 7	13,017 6	12,895 6	15,640 9	18,407 9
95	8,154 1	—	3,837 4	—	5,228 1	—

Untersuchen wir die Reihen $\alpha(x)$ und $\beta(x)$ auf ihre Abhängigkeit vom Alter hin, so sehen wir, dass sie keinen typischen Verlauf zeigen, der sich analytisch leicht umschreiben liesse. Die Konstante $\alpha(x)$ hat in beiden Fällen in den Altersgruppen 40 und 80 ein Maximum, bei 25, bei 50 und bei 95 ein Minimum. Doch ist ihr Verlauf auch zwischen diesen Extremwerten keineswegs monoton.

Betrachten wir sodann die beiden Reihen der $\beta(x)$, so können wir hier ähnliche Eigenschaften wie bei den $\alpha(x)$ feststellen, nur liegen hier die Beträge der Extremwerte weiter auseinander.

Die Schwankungen der Werte $\alpha(x)$ und $\beta(x)$ erklären sich daraus, dass die Sterbewahrscheinlichkeiten der zusammengehörigen Alter nicht proportional zueinander sind. Stünden nämlich jeweils alle drei bei der Interpolation betrachteten Sterbewahrscheinlichkeiten eines

Alters in einem festen Verhältnis zueinander, so hätten wir für alle Alter die gleichen Konstanten α und β.

Der Verlauf der Grössen $\alpha(x)$ und $\beta(x)$ ist also im wesentlichen nicht eine Funktion des Alters x. Daraus schliessen wir, dass wir die Werte $\alpha(x)$ und $\beta(x)$ durch geeignete Mittelwerte ersetzen dürfen.

Bevor wir an die Berechnung dieser Mittelwerte gehen, wollen wir zeigen, wie sich die Annahme eines Mittelwertes α auf die Grössen $\beta(x)$ auswirkt. Zu diesem Zweck greifen wir in unsern Rechnungen voraus und setzen für α_1 und α_2 die Mittelwerte 10,793 bzw. 13,804. Um damit die $\beta(x)$ zu bestimmen, brauchen wir neben den unendlich fernen Sterbeziffern noch die Sterbewahrscheinlichkeiten aus einer weitern Tafel; wir entnehmen sie der Tafel SM 1929—1932. Die so berechneten Konstanten bezeichnen wir mit $\bar{\beta}_1(x)$ bzw. $\bar{\beta}_2(x)$; ihre Werte sind in den beiden letzten Spalten der Tabelle II enthalten. Sie zeigen, verglichen mit den Werten $\beta_1(x)$ und $\beta_2(x)$, einen ausgeglicheneren Verlauf. Im wesentlichen haben wir es mit einer dem absoluten Betrage nach wachsenden Funktion zu tun. Die Werte $\bar{\beta}(x)$ liegen bereits in einem ziemlich engen Intervall, dessen halbe Länge in beiden Fällen etwa 4,5 beträgt. Da β eine Konstante von der Dimension einer Zeit ist, entsprechen die Abweichungen, die wir für die $q(x, t)$ bei Annahme eines von x unabhängigen α gegenüber den $q(x, t)$, gebildet mit den $\alpha(x)$, erhalten, höchstens der Lebensverbesserung von 4,5 Jahren (positiv oder negativ genommen).

§ 9

Berechnung und Anwendung der Mittelwerte α und β

a) Die Berechnung. Die Mittelwerte α und β berechnen wir nach der in § 3 *e* entwickelten Methode der kleinsten Quadrate unter Verwendung der beiden Sterbetafeln SM 1929—1932 und SM 1933 bis 1937. Bei Annahme der unendlich fernen Tafel A_1 summieren wir über alle Alter von 25 bis 95 und bei Annahme der Tafel A_2 über alle Alter von 25 bis 94. Die höheren Alter lassen wir bei dieser Rechnung weg, da ihre Quadrate zu sehr ins Gewicht fallen würden.

Nehmen wir zuerst an, die Sterblichkeit strebe mit wachsender Zeit gegen die Wahrscheinlichkeiten aus der Sterbetafel A_1, so erhalten wir folgende Bestimmungswerte:

$$\sum_{25}^{95} q(x, 0)\, q_1(x, \infty) = 1{,}172\,401\,138\,9$$

$$\sum_{25}^{95} q(x, 4{,}5)\, q_1(x, \infty) = 1{,}097\,586\,332\,5$$

$$\sum_{25}^{95} q_1^2(x, \infty) = 0{,}952\,963\,741\,6\,.$$

Daraus folgt

$$\alpha_1 = 10{,}792\,94\,, \quad \beta_1 = -15{,}849\,53\,.$$

Analog erhalten wir im zweiten Falle die Grössen:

$$\sum_{25}^{94} q(x, 0)\, q_2(x, \infty) = 0{,}976\,517\,857\,9$$

$$\sum_{25}^{94} q(x, 4{,}5)\, q_2(x, \infty) = 0{,}917\,439\,067\,5$$

$$\sum_{25}^{94} q_2^2(x, \infty) = 0{,}764\,140\,739\,5$$

und daraus

$$\alpha_2 = 13{,}804\,60\,, \quad \beta_2 = -17{,}675\,25\,.$$

b) Die Abweichungen. Um die eben gewonnenen Werte α und β auf ihre Eignung hin zu prüfen, berechnen wir für einige Alter mit der logistischen Interpolationsformel die Sterbewahrscheinlichkeiten erstens bei Zugrundelegung der vom Alter abhängigen Konstanten $\alpha(x)$ und $\beta(x)$ und zweitens mit den entsprechenden vom Alter unabhängigen Grössen α und β. Diese Rechnung führen wir für den Zeitpunkt 1940,0, d. h. für $t = 9$, durch. Wir erhalten, wenn wir annehmen, die Sterblichkeit konvergiere mit wachsender Zeit gegen die in der Sterbetafel A_1 enthaltenen Sterbeziffern, folgende Werte:

Tabelle III

x	$q_1(x, 1940)$ $[\alpha(x), \beta(x)]$	$q_1(x, 1940)$ $[\alpha, \beta]$	Fehler
25	0,00 315	0,00 299	5 %
35	396	370	6,5%
45	714	681	4,5%
55	1 642	1 618	1,5%
65	3 755	3 693	1,5%
75	9 039	8 822	2,5%
85	19 819	19 916	0,5%

Die auftretenden Fehler sind entsprechend der Natur der Aufgabe nicht gross, so dass die vorliegende Methode auch gut zur Vorausberechnung der Sterblichkeit an sich angewendet werden könnte. Offenbar werden die hier auftretenden Fehler mit wachsender Zeit immer kleiner, da in der Interpolationsformel (6) ja nur der Ausdruck $e^{\frac{\beta-t}{\alpha}}$ für den Verlauf der Sterblichkeit massgebend ist. Darin überwiegt aber die wachsende Grösse t immer mehr gegenüber den Mittelwerten α und β.

Wir haben uns aber nicht die Aufgabe gestellt, die Sterblichkeit an sich vorauszuberechnen, sondern wir wollen die Rentenbarwerte unter Berücksichtigung der Lebensverbesserung bestimmen. Dazu brauchen wir indessen nicht die Sterbeziffern, sondern allein die Überlebenswahrscheinlichkeiten $p(x, t)$. Für diese erhalten wir die folgenden Fehler, wenn wir von den oben berechneten Werten $q(x, 1940{,}0)$ ausgehen:

Tabelle IV

x	Fehler	x	Fehler	x	Fehler	x	Fehler
25	0,16 ‰	45	0,35 ‰	65	0,6 ‰	85	1 ‰
35	0,25 ‰	55	0,25 ‰	75	2 ‰	—	—

Wir sehen daraus, dass der Fehler, den wir durch die Annahme der vom Alter x unabhängigen Mittelwerte α und β begehen, gemessen an den Überlebenswahrscheinlichkeiten, sehr klein ist.

Legen wir unsern Rechnungen die unendlich ferne Sterbetafel A_2 zugrunde, so erhalten wir ähnliche Ergebnisse wie oben.

c) Hypothetischer Verlauf der Sterblichkeit. Zur Darstellung des hypothetischen Verlaufs der Sterblichkeit in den nächsten Jahrzehnten sind in den beiden folgenden Tabellen die Sterbewahrscheinlichkeiten für einige Alter zusammengestellt. Diese sind mittels der Interpolationsformel (6) berechnet, wobei die von x unabhängigen α und β benutzt wurden [1]).

[1]) Hier sind die Sterbewahrscheinlichkeiten für $x = 25$ bei Annahme der unendlich fernen Sterbetafel A_2 deshalb grösser als bei Annahme der Tafel A_1, da sich einerseits die Sterbeziffern $q_1(25, \infty)$ und $q_2(25, \infty)$ nur sehr wenig voneinander unterscheiden und andererseits die Konstante α_2 grösser ist als α_1, so dass die Sterbewahrscheinlichkeit $q_2(x, t)$ weniger schnell gegen ihren Endwert fällt als $q_1(x, t)$.

Die Sterbewahrscheinlichkeiten $q_1(x, t)$ berechnet mit $\alpha_1, \beta_1, q_1(x, \infty)$.

Tabelle V

x \ t	1940,0	1945,0	1955,0	1965,0	1975,0
25	0,00 299	0,00 289	0,00 279	0,00 275	0,00 272
35	370	358	345	340	339
45	681	659	634	625	622
55	1 618	1 564	1 508	1 486	1 477
65	3 693	3 568	3 441	3 398	3 370
75	8 822	8 524	8 219	8 098	8 050
85	19 916	19 243	18 555	18 283	18 175

Die Sterbewahrscheinlichkeiten $q_2(x, t)$ berechnet mit $\alpha_2, \beta_2, q_2(x, \infty)$.

Tabelle VI

x \ t	1940,0	1945,0	1955,0	1965,0	1975,0
25	0,00 310	0,00 298	0,00 284	0,00 278	0,00 274
35	377	362	345	337	333
45	663	638	607	593	586
55	1 475	1 418	1 354	1 318	1 303
65	3 343	3 214	3 063	2 989	2 954
75	8 306	7 986	7 609	7 426	7 338
85	19 873	19 109	18 207	17 770	17 558

§ 10

Prüfung der Näherungsformel (21) für $l(x, t)$

Für die Überlebensordnung $l(x, t)$ haben wir die Näherungsformel gefunden:

$$l(x, t) = l(x, \infty) - e^{\frac{\beta - t_0}{\alpha}} l(x, \infty) \sum_{\xi=0}^{n-1} e^{-\frac{\xi}{\alpha}} Q(x_0 + \xi),$$

wo $x_0 = x - n$ und $t_0 = t - n$ das unterste beobachtete Alter bzw. den ihm zugeordneten Zeitpunkt bedeuten. Ferner ist $Q(x) = kq(x, \infty)$ zu setzen, wo $e^{-\frac{1}{\alpha}} \leq k \leq 1$ ist.

Diese Näherungsformel wollen wir an einem Beispiel auf ihre Genauigkeit hin prüfen und dabei zeigen, dass der beste Wert von k gerade 1 ist.

Zu diesem Zweck berechnen wir mittels der Interpolationsformel (6) alle Sterbewahrscheinlichkeiten $q_1(25 + \xi, 1940 + \xi)$, $\xi = 0, 1, \ldots, 74$, mit festen Mittelwerten α_1 und β_1. Mit diesen Wahrscheinlichkeiten können wir dann die ganze Überlebensordnung $l_1(x, t)$ der 25jährigen Männer des Jahres 1940 berechnen. Diese Werte sind auszugsweise in der Tabelle VII enthalten.

1. $l_1(x, t)$, genaue Werte.
2. $\Delta = l_1(x, t)$ [genau] — $l_1(x, t)$ [angenähert].

Tabelle VII

x	$l_1(x,t)$	Δ	x	$l_1(x,t)$	Δ	x	$l_1(x,t)$	Δ
25	100 000	0	50	89 368	—1	75	40 170	1
30	98 564	0	55	84 288	—1	80	24 220	3
35	97 016	2	60	77 179	0	85	11 189	2
40	95 186	1	65	67 631	1	90	3 435	1
45	92 804	—1	70	55 084	2	95	620	2
						100	34	1

Die Grössen $l_1(x, t)$ berechnen wir andererseits mittels der Näherungsformel (21). Die Konstante k des Mittelwertsatzes ist so zu bestimmen, dass die Abweichungen Δ der nach der Näherungsformel (21) berechneten Werte von $l_1(x, t)$ von den exakten Werten für $l_1(x, t)$ möglichst klein werden. Durch einige Versuche findet man, dass dies für $k = 1$ der Fall ist. Die Differenzen Δ sind ebenfalls in der Tabelle VII auszugsweise zusammengestellt.

Wir sehen daraus, dass der Einfluss der Glieder zweiter und höherer Ordnung in $q(x, \infty)$ auf die Überlebensordnung äusserst gering ist.

§ 11

Prüfung der Näherungsformel (25) für $a(x, t)$

In § 5 *a* haben wir für den Barwert der lebenslänglichen Leibrente die Näherungsformel gefunden:

$$\mathsf{a}(x, t) = \mathsf{a}(x, \infty) - e^{\frac{\beta - t}{\alpha}} \sum_{\xi=1}^{\infty} e^{-\frac{\xi-1}{\alpha}} q(x + \xi - 1, \infty) \frac{N(x + \xi, \infty)}{D(x, \infty)} .$$

Im folgenden werden wir untersuchen, welchen Fehler wir bei der numerischen Anwendung dieser Näherungsformel begehen.

Aus der unendlich fernen Sterbetafel A_1 bestimmen wir zu diesem Zweck zunächst die unendlich ferne Überlebensordnung $l_1(x, \infty)$. Daraus berechnen wir mit dem gegebenen Zinsfuss i die Werte $D_1(x, \infty)$ und $N_1(x, \infty)$; diese Grössen sind für $i = 0{,}03$ auszugsweise in der Tabelle VIII aufgeführt. Ebenso bestimmen wir die Summen

$$D_1(x, \infty) F_1(x) = \sum_{\xi=1}^{\infty} e^{-\frac{\xi-1}{\alpha_1}} q_1(x + \xi - 1, \infty) N_1(x + \xi, \infty)$$

für alle Alter x. Auch diese Werte sind auszugsweise in der Tabelle VIII für $i = 0{,}03$ angegeben.

Tabelle VIII

x	$D_1(x, \infty)$	$N_1(x, \infty)$	$D_1(x, \infty) F_1(x)$
25	47 761	1 161 002	29 539,9
30	40 653	936 871	28 641,8
35	34 544	746 180	29 149,8
40	29 254	584 372	30 532,3
45	24 615	447 603	32 185,8
50	20 458	333 002	32 815,5
55	16 652	238 455	31 345,5
60	13 158	162 305	27 952,3
65	9 950,3	103 023,9	23 039,8
70	6 994,1	59 307,3	16 692,3
75	4 401,4	29 670,8	10 331,5
80	2 290,3	12 146,7	4 866,9
85	913,05	3 746,12	1 703,4
90	241,88	778,29	354,63
95	37,76	89,13	35,66

In einer weiteren Tabelle können wir für alle in Frage kommenden Jahre die Zeitfaktoren $e^{\frac{\beta_1 - t}{\alpha_1}}$ zusammenstellen. — Mit diesen Grundlagen ist es ohne weiteres möglich, nach der Näherungsformel (25) den gesuchten Rentenbarwert für jeden Zeitpunkt anzugeben.

Die zum Vergleich notwendigen genauen Werte der Rentenbarwerte wählen wir folgendermassen: ausgehend von den verschiedenen betrachteten Altern, denen jeweils der Zeitpunkt $t = 1945{,}0$ zugeordnet ist, bestimmen wir alle Sterbewahrscheinlichkeiten $q_1(x + \xi, 1945 + \xi)$, $x = 25{,}35, \ldots, 85$; $\xi = 0{,}1, \ldots,$ nach der Interpolationsformel (6) einzeln, wobei wir die Endwerte der Sterbeziffern der Sterbetafel A_1 entnehmen und die festen Mittelwerte α_1 und β_1 verwenden. Damit sind die Überlebensordnungen und die Rentenbarwerte $\mathsf{a}_1(x, t)$ für alle gesuchten Alter bestimmt. In der Tabelle IX sind die Ergebnisse für $t = 1945{,}0$ und $i = 0{,}03$ zusammengestellt; zu Vergleichszwecken sind ferner noch die Grössen a_x nach der Sterbetafel SM 1929—1932 und die Werte $\mathsf{a}_1(x, \infty)$ beigefügt.

Tabelle IX

x	$\mathsf{a}_1(x, t)$ genau	$\mathsf{a}_1(x, t)$ angenähert	Abweichungen absolut	Abweichungen relativ	a_x (1929/32)	$\mathsf{a}_1(x, \infty)$
25	24,1910	24,2763	0,0853	0,35%	23,258	24,309
35	21,5424	21,5477	0,0050	0,02%	20,492	21,601
45	18,0937	18,1019	0,0082	0,05%	17,033	18,184
55	14,1836	14,2014	0,0178	0,13%	13,226	14,320
65	10,1268	10,2060	0,0792	0,77%	9,404	10,354
75	6,5782	6,5955	0,0173	0,26%	5,968	6,741
85	3,9596	3,9854	0,0258	0,65%	3,523	4,103

Wir sehen aus dieser Zusammenstellung, dass die Fehler, die durch unser Näherungsverfahren entstehen, nur sehr gering sind. Ausserdem sind die angenäherten Rentenbarwerte immer grösser als die genauen Werte, so dass wir diese Differenz gewissermassen als einen Sicherheitszuschlag auffassen können.

Zusammenfassung

Wir stellen die wichtigsten Annahmen und Ergebnisse unserer Untersuchung zusammen:

1. In der analytischen Erfassung der künftigen Entwicklung der Sterblichkeit setzten wir voraus, die Zunahme der reziproken Werte der Sterbeintensitäten oder der Sterbewahrscheinlichkeiten erfolge nach einer logistischen Funktion gegen eine unendlich ferne Sterbetafel hin. Die unendlich ferne Sterbetafel berechneten wir auf Grund der Ergebnisse, die sich aus der Analyse der gegenwärtigen Sterblichkeit nach Todesursachen ergeben. Es zeigte sich, dass die Konstanten der logistischen Funktion praktisch als vom Alter unabhängig angenommen und daher durch geeignete Mittelwerte ersetzt werden dürfen.

2. Ausgehend von der üblichen Darstellung der Überlebenswahrscheinlichkeit durch die Sterbeintensität bestimmten wir sodann unter Verwendung der Ergebnisse nach Ziffer 1 die Überlebenswahrscheinlichkeiten und damit auch die Überlebensordnung in Abhängigkeit vom Alter und von der Beobachtungszeit. Dabei durften wir die Glieder, welche die Sterbewahrscheinlichkeit in zweiter und höherer Potenz enthalten, vernachlässigen. Aus der so gewonnenen Näherungsformel für die Überlebensordnung folgte unmittelbar für den Rentenbarwert bei Einbezug der zu erwartenden Lebensverbesserung ein einfach zu handhabender Ausdruck. Alle darin auftretenden Grössen lassen sich leicht tabellieren.

3. Die ziffernmässige Prüfung der Ergebnisse zeigte eine sehr gute Übereinstimmung mit den genauen Werten des Rentenbarwertes. Das Verfahren ist geeignet, für die Abschätzung des Einflusses der noch zu erwartenden Lebensverbesserung verwendet zu werden.

4. Es ist indessen unerlässlich, die Vorausberechnung stets durch die neuesten Ergebnisse der Sterblichkeitsmessung zu überprüfen und diesen anzupassen; wenn nötig sind die Konstanten und ebenso die unendlich ferne Sterbetafel neu zu berechnen.

Damit scheinen uns die eingangs gestellten Bedingungen erfüllt. Wir haben bei bestmöglicher Anpassung an die zu erwartende Entwicklung — so wie wir sie als wahrscheinlich ansehen — eine einfache analytische Darstellung des Rentenbarwertes als Funktion des Alters und der Beobachtungszeit gefunden.

Literaturverzeichnis

Abkürzungen

Bvm = Blätter für Versicherungsmathematik.
Giia = Giornale dell' Istituto Italiano degli Attuari.
Jia = Journal of the Institute of Actuaries.
Mvsv = Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker.
Sa = Skandinavisk Aktuarietidskrift.
Tfa = Transaction of the Faculty of Actuaries.
Va = Das Versicherungsarchiv.
Vdvw = Veröffentlichungen des Deutschen Vereins für Versicherungswissenschaften.
Zgvw = Zeitschrift für die gesamte Versicherungswissenschaft.
Zssv = Zeitschrift für schweizerische Statistik und Volkswirtschaft.

I. Zusammenstellung der bisher erschienenen Literatur über die säkulare Sterblichkeitsabnahme

Ohne den Anspruch auf Vollständigkeit zu erheben, geben wir zunächst eine Zusammenstellung der wichtigsten Versuche einer Darstellung der säkularen Sterblichkeitsabnahme.

Gylden, H.: —. Försäkringsföreningens. Stockholm 1878.
Richardt, T.: Betenkning angaaende valg af dödelighedstabeller for Kristiania kommunale pensionskasse. Dokument Nr. 48. Oslo 1901.
— Dödelighedsundersökelser i den Norske Enkekasse. Oslo 1910.
Lindstedt, A.: Alderdomsförsäkringskommitensbetänkande, del II. Stockholm 1912.
Elderton, W. P. und *Oakley, H. J. P.:* Report on the Resultats of an Investigation of the Mortality of Life Annuitants during the Period 1900—1920. Jia *54* 1923 43—90, 269—284.
— The Mortality of Annuitants, 1900—1920. London 1924.
Elderton, W. P.: Forecasting Mortality. Sa 1923 45—64.
Fraser, D. C.: Notes on recent Reports on the Mortality of Annuitants. Jia *55* 1924 160—177.
Elderton, W. P.: The Analysis of Annuity Experience 1900—1920 Jia Students' Soc. *2* 1926 215—225.
Richmond, G. W.: Neue Sterblichkeitserfahrungen in Grossbritannien. Vdvw *39* 1926 155—173.

Riebesell, P.: Über Sterblichkeitserfahrungen in Deutschland. Zgvw 1927 114—117.

Derrick, V. P. A.: Observations on (1) Errors of Age in the Population Statistics of England and Wales, and (2) the Changes in Mortality inticated by the National Records. Jia *58* 1927 117—146.

Davidson, A. R. und *Reid, A. R.*: On the Calculation of Rates of Mortality. Tfa *11* 1927 183—213.

Elderton, W. P.: Mortality Experience of Annuitants 1921—1925. London 1929 und Jia *59* 1928 387—398.

Braun, H.: Zwei technische Besonderheiten der neuen englischen Rentnertafeln. Bvm *1* 1928—1930 28—31.

— Die englischen Rentnertafeln 1900—1920. Zgvw *28* 1928 291—303.

Maltby, C. H.: Notes on some present day Questions regarding Mortality. Sa 1929 239—253.

Sachs, C. W.: Ein empirisches Gesetz der säkularen Sterblichkeitsschwankungen und Folgerungen daraus für das Rentenversicherungsgeschäft. Bvm *1* 1929 219—229.

Ibsch, W.: Über säkulare Sterblichkeitsänderungen in Deutschland. Bvm *2* 1931 31—39.

Sachs, C. W.: Nochmals: Säkulare Sterblichkeitsschwankungen und Folgerungen daraus. Bvm *2* 1931 39—40.

Riebesell, P.: Der Kampf um die Formel für die säkularen Sterblichkeitsschwankungen. Bvm *2* 1931 85.

Kobi, F.: Beiträge zur Kenntnis und zur Darstellung der Lebensverlängerung in der Schweiz. Mvsv *26* 1931.

— Untersuchungen über die Sterblichkeitsänderung, wenn die Überlebensordnungen das Makehamsche Gesetz befolgen, mit besonderer Berücksichtigung schweizerischer Verhältnisse. Festgabe Moser, Bern 1931 49—64.

Dublin, I. L. und *Lotka, A. J.*: The History of Longevity in the United States. Human Biology *6* 1934 43—86.

Funke, G.: Die säkularen Sterblichkeitsschwankungen im Deutschen Reiche. Diss Dresden 1934 und Bvm *3* 1935 175—183.

Cramér, H.: Über die säkulare Sterblichkeitsabnahme. Festschrift Höckner, Berlin 1935 61—67.

Cramér, H. und *Wold, H.*: Mortality Variations in Sweden. Sa *18* 1935 161—241.

Freudenberg, K.: Die Grundlinien der Sterblichkeitsentwicklung. Va 1935/36 6—25.

Riebesell, P.: Eine zukünftige deutsche Sterbetafel. Bvm *4* 1938 335—343.

Tauber, A.: Das Sinken der Sterblichkeit im Zeitverlauf. Sa *23* 1940 30—43.

Baltensperger, P.: Über die Vorausberechnung der Sterblichkeit in der schweizerischen Bevölkerung. Diss Zürich 1941 und Mvsv *41* 1941 109—161.

Goldziher, K.: Logistische Bearbeitung der säkularen Änderungen in der niederländischen Volkssterblichkeit. Verzekerings-Archief *23*, Haag 1942 40—72.

Wyss, H.: Beobachtungen über die Rentnersterblichkeit bei der schweizerischen Lebensversicherungs- und Rentenanstalt. Mvsv *43* 99—112.

II. Zusammenstellung der in der vorliegenden Abhandlung benutzten Literatur

[1] *Verhulst, P. F.:* Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement. Correspondance math. et phys. publiée par A. Quetelet, 1838.

[2] *Pearl, R.* und *Reed, L.:* On the Rate of Growth of the Population of the United States of America since 1790 and its mathematical Representation. Proc. of the Nat. Acad. of Sciences *6* 1920.

[3] *Cantelli, F. P.:* Genesi e costruzione delle tavole di mutualità. Bolletino di notizie sul Credito e sulla Previdenza, Roma 1914.

[4] *Lidstone, G. I.:* On a Method of approximately Calculating Net Premiums for Endowment Assurances of two Joint Lifes. Jia *33* 1902 354—356.
Vergleiche ferner:
Jakob, M.: Sul calcolo dei premi su due teste. Giia *2* 1931 185—188.

[5] *Friedli, W.:* Reserve und Rentenbarwert als analytische Funktionen. Mvsv *13* 1918 115—274.

[6] *Nielsen, N.:* Handbuch der Theorie der Gammafunktionen. Leipzig 1906.

[7] *Reichelt, M. G.:* Die strenge mathematische Lösung der kontinuierlichen Leibrente unter Zugrundelegung der Gompertz-Makehamschen Hypothese. Bvm *2* 1931—1933 234—237.

[8] *Baltensperger, P.:* Über die Vorausberechnung der Sterblichkeit der schweizerichen Bevölkerung. Diss Zürich 1941 und Mvsv *41* 1941 109—161.

III. Statistische Grundlagen

[9] *Eidgenössisches Statistisches Amt:* Schweizerische Sterbetafeln 1929—1932 für die Stadt- und Landbevölkerung nach Zivilstandsgruppen für Lungentuberkulose und Krebs. Zssv *77* 1941 425—454.

— Schweizerische Sterbetafeln 1933—1937 und neueste Entwicklung der Todesursachen. Zssv *76* 1940 420—454.

— Schweizerische Volkssterbetafeln 1876—1932. Beiträge zur schweizerischen Statistik, Heft 4, 1935.

Inhaltsverzeichnis