

# Über Darstellungsformen der Prämien und Reserven der Todesfallversicherung

Autor(en): **Zwinggi, Ernst**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuairees Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **47 (1947)**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-966854>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Über Darstellungsformen der Prämien und Reserven der Todesfallversicherung

Von *Ernst Zwinggi*, Basel

1. Die Einmalprämie einer Todesfallversicherung mit variabler Summe  $U_t$  auf das Leben des  $x + t$ -jährigen kann man, wie allgemein bekannt ist, auch auffassen als retrospektives Deckungskapital einer vor  $t$  Jahren gegen Einmalprämie abgeschlossenen gleichartigen Versicherung. Wenn  $A_t$  allgemein für die Einmalprämie im Alter  $x + t$  steht,  $\delta$  die Zinsintensität und  $\mu_t$  die Intensität der Sterblichkeit bedeuten, so ist

$$A_t = e^{\int_0^t (\delta + \mu_\tau) d\tau} \left[ A_0 - \int_0^t e^{-\int_0^\lambda (\delta + \mu_\tau) d\tau} \mu_\lambda U_\lambda d\lambda \right]. \quad (1)$$

Es lässt sich nun leicht zeigen, dass für die stetig zahlbare Prämie  $P_t$  der gleichen Versicherungsform ein äusserlich mit (1) völlig übereinstimmender Ausdruck gilt.

Aus der Differentialgleichung des Rentenbarwertes folgt mit der für die gemischte Versicherung «1» gültigen Beziehung  $P_t = \frac{1}{a_t} - \delta$ ,

$$a'_t = (\delta + \mu_t) a_t - 1 = a_t \left[ \mu_t - \left( \frac{1}{a_t} - \delta \right) \right] = a_t (\mu_t - P_t).$$

Diesen Wert führen wir ein in  $P'_t = \frac{-a'_t}{(a_t)^2}$  und erhalten

$$P'_t - \frac{P_t}{a_t} + \frac{\mu_t}{a_t} = 0. \quad (2)$$

Die Integration dieser Differentialgleichung vom Typus

$$y'(t) + \varphi(t)y(t) + f(t) = 0$$

führt mit

$$\varphi(t) = \frac{-1}{a_t} = -(\delta + P_t),$$

$$f(t) = \frac{\mu_t}{a_t} = \mu_t(P_t + \delta) = P_t \left( \mu_t + \frac{\delta \mu_t}{P_t} \right) = P_t \frac{\mu_t}{A_t}$$

auf

$$P_t = e^{\int_0^t (\delta + P_\tau) d\tau} \left[ P_0 - \int_0^t e^{-\int_0^\lambda (\delta + P_\tau) d\tau} P_\lambda \frac{\mu_\lambda}{A_\lambda} d\lambda \right]. \quad (3)$$

Man kann die rechte Seite von (3) im Sinne von (1) auffassen als Einmalprämie (oder als Deckungskapital) einer Todesfallversicherung, für welche beim Abschluss die Einmalprämie  $P_0$  bezahlt worden ist, deren «Leistung»  $\frac{\mu_t}{A_t}$  beträgt und deren «Intensität des Sterbens»  $P_t$  ausmacht.

2. Aus Gleichung (3) lässt sich eine weitere (retrospektive) Darstellungsform für die Prämie finden. Wir ersetzen  $\delta + P_t$  durch  $\frac{1}{a_t}$  und erhalten

$$P_t = e^{\int_0^t \frac{d\tau}{a_\tau}} \left[ P_0 - \int_0^t e^{-\int_0^\lambda \frac{d\tau}{a_\tau}} P_\lambda \frac{\mu_\lambda}{A_\lambda} d\lambda \right]. \quad (4)$$

Fassen wir (4) als Bestimmungsgleichung für  $P_t$  auf, so haben wir eine *Volterrasche Integralgleichung 2. Art* zu lösen<sup>1)</sup>. Die unmittelbare Auflösung, z. B. über den lösenden Kern, dürfte nicht leicht möglich sein, da der Kern die Form

$$K(\lambda, t) = \frac{\mu_\lambda}{A_\lambda} e^{\int_\lambda^t \frac{d\tau}{a_\tau}}$$

hat.

---

<sup>1)</sup> (3) ist selbstredend auch eine Integralgleichung für  $P_t$ .

3. Beziehung (2) gibt Anlass zu einem der äussern Form nach einfachen Ausdruck für das Deckungskapital der gemischten Versicherung «1». Es ist aus (2)

$$\mu_t = P_t - P'_t a_t;$$

dies eingesetzt in

$$\frac{l_t}{l_0} = e^{-\int_0^t \mu_\tau d\tau}$$

ergibt

$$\frac{l_t}{l_0} = e^{-\int_0^t P_\tau d\tau + \int_0^t P'_\tau a_\tau d\tau};$$

weil aber <sup>1)</sup>

$$\frac{l_t}{l_0} (1 - {}_tV) = e^{-\int_0^t P_\tau d\tau},$$

folgt weiter

$$1 = (1 - {}_tV) e^{\int_0^t P'_\tau a_\tau d\tau}$$

und aufgelöst

$${}_tV = 1 - e^{-\int_0^t P'_\tau a_\tau d\tau}. \quad (5)$$

Gleichung (5) stimmt inhaltlich mit einem von *Vasmoen* [5] aus der *Riccatischen* Differentialgleichung der Prämie hergeleiteten Ausdruck überein. Ersetzen wir nämlich  $P'_t a_t$  durch  $P_t - \mu_t$ , so wird

$${}_tV = 1 - e^{-\int_0^t (P_\tau - \mu_\tau) d\tau}. \quad (6)$$

Formel (5) erinnert an die Darstellung der  $t$ -jährigen Sterbewahrscheinlichkeit durch die Sterbeintensität. Es bestehen die Beziehungen <sup>2)</sup>

<sup>1)</sup> Formel (1) in Arbeit [2], ebenso Formel (3) in Arbeit [3].

<sup>2)</sup> Formeln (25) und (29) in [4].

$${}_t q_x = 1 - e^{-\int_0^t \mu_{x+\tau} d\tau} = \int_0^t e^{-\int_0^\lambda \mu_{x+\tau} d\tau} \mu_{x+\lambda} d\lambda = \int_0^t (1 - {}_\lambda q_x) \mu_{x+\lambda} d\lambda,$$

woraus durch Übertragung für  ${}_t V$  unmittelbar folgt

$${}_t V = \int_0^t (1 - {}_\lambda V) P'_\lambda a_\lambda d\lambda. \quad (7)$$

Fasst man (7) als Bestimmungsgleichung für  ${}_t V$  auf, so liegt, wie schon unter Ziffer 2, eine Volterrasche Integralgleichung 2. Art vor, mit dem Kern  $K(\lambda, t) = P'_\lambda a_\lambda$  <sup>1)</sup>.

4. Wir lassen in der Sterbetafel  $l_t$  die Sterbeintensität  $\mu_t$  übergehen in  $\bar{\mu}_t = (1 + \varepsilon)\mu_t$ . Die zugehörige Absterbeordnung hat dann die Gestalt

$$\frac{\bar{l}_t}{\bar{l}_0} = e^{-\int_0^t \bar{\mu}_\tau d\tau} = e^{-(1+\varepsilon)\int_0^t \mu_\tau d\tau} = \left(\frac{l_t}{l_0}\right)^{1+\varepsilon}.$$

Für das Deckungskapital  ${}_t \bar{V}$ , berechnet mit der Intensität  $\mu_t$  (und der Prämie  $\bar{P}_t$  bzw. dem Rentenbarwert  $\bar{a}_t$ ) gilt,

$$\frac{\bar{l}_t}{\bar{l}_0} = \frac{1}{1 - {}_t \bar{V}} e^{-\int_0^t \bar{P}_\tau d\tau} = \left(\frac{l_t}{l_0}\right)^{1+\varepsilon} = \left(\frac{1}{1 - {}_t V}\right)^{1+\varepsilon} e^{-\int_0^t P_\tau d\tau},$$

und nach Division

$$1 = \frac{(1 - {}_t V)^{1+\varepsilon}}{1 - {}_t \bar{V}} e^{-\int_0^t [\bar{P}_\tau - (1+\varepsilon) P_\tau] d\tau}. \quad (8)$$

Schliesslich ersetzen wir nach (5)

$$\frac{(1 - {}_t V)^{1+\varepsilon}}{1 - {}_t \bar{V}} = e^{-\int_0^t [(1+\varepsilon) P'_\tau a_\tau - \bar{P}'_\tau \bar{a}_\tau] d\tau}$$

<sup>1)</sup> Diese Integralgleichung ist nicht, wie diejenigen von *Berger, Loewy* u. a. [6], aus einer besonderen Zusammenfassung bei der Integration der Reservecifferentialgleichung entstanden, sondern durch passende Substitutionen in den fertigen Ausdruck für das Deckungskapital.

und erhalten

$$e^{\int_0^t (\bar{P}_\tau - \bar{P}'_\tau \bar{a}_\tau) d\tau} = e^{(1+\varepsilon) \int_0^t (P_\tau - P'_\tau a_\tau) d\tau}; \quad (9)$$

diese Gleichung muss für jedes  $t$  gelten; also muss auch sein

$$\frac{\bar{P}_t - \bar{P}'_t \bar{a}_t}{P_t - P'_t a_t} = 1 + \varepsilon. \quad (10)$$

Der Quotient aus Prämie minus Barwert der Ableitung der Prämie, berechnet mit der jeweiligen Sterbeintensität, verfolgt eine lineare Funktion von  $\varepsilon$ . Das gleiche Ergebnis hätte man auch aus (2) erhalten, ohne aber den Zusammenhang der beiden Deckungskapitalien zu erkennen.

---

## Literaturverzeichnis

- [1] *E. Zwinggi*: Ein Multiplikationssatz für das Deckungskapital. Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, 45. Band, 1945, S. 375—383.
  - [2] — Eine Produktdarstellung für das Deckungskapital. *Experientia*, Vol. II/5, 1946, S. 182.
  - [3] — About a form of representation of the policy value. Festschrift Filip Lundberg, 1946, S. 286—292.
  - [4] — Versicherungsmathematik. Verlag Birkhäuser Basel, 1945.
  - [5] *Vasmoen, P.*: Über den Einfluss einer Änderung der Sterblichkeit auf die Prämienreserve und andere damit zusammenhängende Fragen. *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, Jahrgang 18, 1935, S. 1—34.
  - [6] *A. Berger*: Über das Äquivalenzprinzip. *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, Jahrgang 12, 1929, S. 197—217.  
Über simultane Versicherungswerte. *Versicherungswissenschaftliche Mitteilungen des Deutschen Vereines für Versicherungswesen in der Tschechoslowakischen Republik*, 6. Heft, 1930, S. 45—68.  
Studien zur Versicherungsmathematik. *Assekuranz-Jahrbuch*, 52. Band, 1933, S. 3—31.
- A. Loewy*: Der Stieltjessche Integralbegriff und seine Verwertung in der Versicherungsmathematik. *Blätter für Versicherungsmathematik*, 2. Band, Hefte 1, 2 und 6, 1931/32, S. 3—18, 74—82, 207—216.

