Über eine Erweiterung des Ausgleichungsverfahrens von Karup

Autor(en): **Kreis, H.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **49 (1949)**

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-555040

Über eine Erweiterung des Ausgleichungsverfahrens von Karup

Von *H. Kreis*, Winterthur

Die Erweiterung des von *Karup* angewendeten Interpolationsverfahrens [1] führt zu der allgemeinen Ausgleichungsformel

$$(n) = \frac{f(n)}{d} + \sum_{1}^{d-1}{}_t \frac{1}{d} P\left(\frac{t}{d}\right)[f(n+t) + f(n-t)] + \sum_{d+1}^{2d-1}{}_t \frac{1}{d} N\left(\frac{t}{d}\right)[f(n+t) + f(n-t)]. \quad (1)$$

Es bedeuten

$f(n)$; $f(n \pm 1)$; $f(n \pm 2)$; ...... die Beobachtungsfolge;

d, eine beliebige positive ganze Zahl;

$$P(x) = 1\frac{1}{2} x^3 - 2\frac{1}{2} x^2 + 1; \quad (2)$$

$$N(x) = -\frac{1}{2} x^3 + 2\frac{1}{2} x^2 - 4x + 2; \quad (3)$$

$\overline{f}(n)$, den statt $f(n)$ zu nehmenden ausgeglichenen Wert.

Die neue Formel enthält insbesondere für den speziellen Wert $d = 5$ die bekannte Ausgleichungsformel von *Karup*.

Zur Ableitung des Ausdruckes (1) betrachten wir eine beliebige Zusammenstellung von vier gleich weit auseinander liegenden Beobachtungswerten

$$f(x) = f(a); \quad f(a + d); \quad f(a + 2d); \quad f(a + 3d)$$

und ordnen den Argumenten derselben die symmetrische arithmetische Folge

$$\xi = -1\frac{1}{2}; \quad -\frac{1}{2}; \quad +\frac{1}{2}; \quad +1\frac{1}{2}$$

mit Hilfe der Substitution

$$\xi = \frac{x-a}{d} - 1\frac{1}{2} \tag{4}$$

zu. Umgekehrt folgt aus dieser

$$f(x) = f\left(a + 1\frac{1}{2}d + d\,\xi\right) \equiv g(\xi)$$

und

$$f(a) = g\left(-1\frac{1}{2}\right); \quad f(a+d) = g\left(-\frac{1}{2}\right);$$

$$f(a+2d) = g\left(+\frac{1}{2}\right); \quad f(a+3d) = g\left(+1\frac{1}{2}\right).$$

Unter den verschiedenen Interpolationskurven, welche durch die Punkte

$$P_0 : \xi = -1\frac{1}{2}; \qquad y = g\left(-1\frac{1}{2}\right);$$

$$P_1 : \xi = -\frac{1}{2}; \qquad y = g\left(-\frac{1}{2}\right);$$

$$P_2 : \xi = +\frac{1}{2}; \qquad y = g\left(+\frac{1}{2}\right);$$

$$P_3 : \xi = +1\frac{1}{2}; \qquad y = g\left(+1\frac{1}{2}\right)$$

bestimmt werden können, zeichnet sich diejenige kubische Parabel aus, die die quadratische Parabel $P_0 P_1 P_2$ im mittleren Punkte P_1 und die Parabel $P_1 P_2 P_3$ im mittleren Punkte P_2 berührt.

Es seien

$$\left.\begin{aligned} C_1 : y &= \varphi_1(\xi); \\ C_2 : y &= \varphi_2(\xi), \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

wenn

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(\xi) &= f(a) + \binom{\xi + 1\frac{1}{2}}{1} \Delta f(a) + \binom{\xi + 1\frac{1}{2}}{2} \Delta^2 f(a), \\ \varphi_2(\xi) &= f(a+h) + \binom{\xi + \frac{1}{2}}{1} \Delta f(a+h) + \binom{\xi + \frac{1}{2}}{2} \Delta^2 f(a+h), \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

die Gleichungen der Parabeln $P_0 P_1 P_2$ und $P_1 P_2 P_3$.

Anderseits stellt die Gleichung

$$C_3 : \frac{y - \varphi_1(\xi)}{\xi - \lambda_1} = \frac{y - \varphi_2(\xi)}{\xi - \lambda_2}$$

oder

$$C_3 : (\lambda_1 - \lambda_2)\, y = (\xi - \lambda_2)\, \varphi_1(\xi) - (\xi - \lambda_1)\, \varphi_2(\xi) \tag{7}$$

die allgemeine Parabel dritten Grades dar, die durch die Schnittpunkte P_1, P_2 der Parabeln C_1, C_2 hindurchgeht.

Soll die Kurve C_3 die Parabeln C_1, C_2 in P_1, P_2 berühren, so sind die Parameter λ_1, λ_2 so zu bestimmen, dass in den Punkten P_1, P_2 von C_3 y' gleich $\varphi_1'\left(-\frac{1}{2}\right)$ bzw. $\varphi_2'\left(+\frac{1}{2}\right)$ ist. Aus diesen Forderungen ergibt sich

$$\left(\lambda_1 + \frac{1}{2}\right)\left[\varphi_1'\left(-\frac{1}{2}\right) - \varphi_2'\left(-\frac{1}{2}\right)\right] = 0,$$

$$\left(\lambda_2 - \frac{1}{2}\right)\left[\varphi_1'\left(+\frac{1}{2}\right) - \varphi_2'\left(+\frac{1}{2}\right)\right] = 0.$$

Da im allgemeinen

$$\varphi_1'\left(-\frac{1}{2}\right) \neq \varphi_2'\left(-\frac{1}{2}\right) \quad \text{und} \quad \varphi_1'\left(+\frac{1}{2}\right) \neq \varphi_2'\left(+\frac{1}{2}\right) \quad \text{ist,}$$

muss
$$\lambda_1 = -\frac{1}{2}\,, \quad \lambda_2 = +\frac{1}{2}$$

sein, so dass die Gleichung von C_3 lautet:

$$C_3 : y = \left(\frac{1}{2} - \xi\right)\varphi_1(\xi) + \left(\frac{1}{2} + \xi\right)\varphi_2(\xi).$$

Durch die erhaltene Parabel C_3 wird folgende Interpolationsfunktion dritten Grades definiert

$$\Phi(\xi) = \left(\frac{1}{2} - \xi\right)\varphi_1(\xi) + \left(\frac{1}{2} + \xi\right)\varphi_2(\xi). \tag{8}$$

In den Ausdrücken $\varphi_1(\xi)$, $\varphi_2(\xi)$ (6) können die Differenzen Δf und $\Delta^2 f$ durch lineare Funktionen der Grundwerte $f(a)$; $f(a+d)$; $f(a+2d)$; $f(a+3d)$ ersetzt werden, so dass $\Phi(\xi)$ sich auch folgendermassen darstellen lässt

$$\Phi(\xi) = \Phi_0(\xi) f(a) + \Phi_1(\xi) f(a+d) + \Phi_2(\xi) f(a+2d) + \Phi_3(\xi) f(a+3d). \tag{9}$$

Zur Berechnung dieser Polynome dritten Grades $\Phi_i(\xi)$ wählen wir passende Zahlenwerte für $f(a)$; $f(a+d)$; $f(a+2d)$; $f(a+3d)$, berechnen nach den Formeln (6) $\varphi_1(\xi)$, $\varphi_2(\xi)$ und nach der Formel (8) $\Phi(\xi)$.

Berechnung von $\Phi_0(\xi)$:

$$f(a) = 1;\ f(a+d) = f(a+2d) = f(a+3d) = 0.$$

$$\varphi_1(\xi) = 1 - \binom{\xi + 1\frac{1}{2}}{1} + \binom{\xi + 1\frac{1}{2}}{2};$$

$$\varphi_2(\xi) = 0.$$

$$\Phi_0(\xi) = \Phi(\xi) = \frac{1}{16}(-8\xi^3 + 4\xi^2 + 2\xi - 1). \tag{10}$$

Berechnung von $\Phi_1(\xi)$:

$$f(a+d) = 1;\ f(a) = f(a+2d) = f(a+3d) = 0.$$

$$\varphi_1(\xi) = \binom{\xi + 1\frac{1}{2}}{1} - 2\binom{\xi + 1\frac{1}{2}}{2};$$

$$\varphi_2(\xi) = 1 - \binom{\xi + \frac{1}{2}}{1} + \binom{\xi + \frac{1}{2}}{2}.$$

$$\Phi_1(\xi) = \Phi(\xi) = \frac{1}{16}(24\xi^3 - 4\xi^2 - 22\xi + 9). \tag{11}$$

Berechnung von $\Phi_2(\xi)$:

$$f(a+2d) = 1;\ f(a) = f(a+d) = f(a+3d) = 0.$$

$$\varphi_1(\xi) = \binom{\xi + 1\frac{1}{2}}{2};$$

$$\varphi_2(\xi) = \binom{\xi + \frac{1}{2}}{1} - 2\binom{\xi + \frac{1}{2}}{2}.$$

$$\Phi_2(\xi) = \Phi(\xi) = \frac{1}{16}(-24\xi^3 - 4\xi^2 + 22\xi + 9). \tag{12}$$

Berechnung von $\Phi_3(\xi)$:

$$f(a+3d) = 1;\ f(a) = f(a+d) = f(a+2d) = 0.$$

$$\varphi_1(\xi) = 0;$$

$$\varphi_2(\xi) = \binom{\xi + \frac{1}{2}}{2}.$$

$$\Phi_3(\xi) = \Phi(\xi) = \frac{1}{16}(8\xi^3 + 4\xi^2 - 2\xi - 1). \tag{13}$$

Durch die Resultate (10) bis (13) ist die Interpolationsfunktion $\Phi(\xi)$ vollständig bestimmt.

Zwischen den Koeffizienten $\Phi_i(\xi)$ bestehen folgende Beziehungen

$$\Phi_0(\pm\xi) = \Phi_3(\mp\xi);$$
$$\Phi_1(\pm\xi) = \Phi_2(\mp\xi).$$

Es bedeuten nun n irgendein festes Argument der Grundfolge und d irgendeine feste natürliche Zahl. Wir können das Anfangsargument a stets so wählen, dass

$$a + d < n < a + 2d$$

oder

$$n - 2d < a < n - d$$

ist, so dass $a = n - 2d + \tau$, $\tau = 1; 2; \ldots\ldots d - 1$ gesetzt werden kann. Für $x = n$; $a = n - 2d + \tau$ folgt aus der Gleichung (4)

$$\xi = \frac{1}{2} - \frac{\tau}{d}.$$

Die Formel (8) liefert uns den dem Argument $x = n$ entsprechenden Funktionswert

$$\Phi\left(\frac{1}{2}-\frac{\tau}{d}\right) = \Phi_0\left(\frac{1}{2}-\frac{\tau}{d}\right) f(n-2d+\tau) + \Phi_1\left(\frac{1}{2}-\frac{\tau}{d}\right) f(n-d+\tau) +$$
$$+ \Phi_2\left(\frac{1}{2}-\frac{\tau}{d}\right) f(n+\tau) + \Phi_3\left(\frac{1}{2}-\frac{\tau}{d}\right) f(n+d+\tau). \quad (14)$$

Indem wir nacheinander $\tau = 1; 2; \ldots\ldots d - 1$ einsetzen, ergeben sich $d - 1$ interpolierte Werte für $f(n)$, so dass wir mit dem Beobachtungswert $f(n)$ selbst über d Werte verfügen. Bildet man aus diesen das arithmetische Mittel, so findet man

$$(n) = \frac{f(n)}{d} + \sum_{1}^{d-1}{}_{\tau} \frac{1}{d}\Bigg[\Phi_0\left(\frac{1}{2}-\frac{\tau}{d}\right) f(n-2d+\tau) + \Phi_1\left(\frac{1}{2}-\frac{\tau}{d}\right) f(n-d+\tau) +$$
$$+ \Phi_2\left(\frac{1}{2}-\frac{\tau}{d}\right) f(n+\tau) + \Phi_3\left(\frac{1}{2}-\frac{\tau}{d}\right) f(n+d+\tau)\Bigg]. \quad (15)$$

Der Übersichtlichkeit wegen wollen wir die Glieder nach dem Abstand t der Argumente $n \pm t$ vom festen Argument n ordnen. Der *Abstand t der Argumente $n \pm t$ vom Index n ist kleiner als d, also das Verhältnis $\frac{t}{d}$ kleiner als 1.*

In der Gleichung (15) setzen wir entweder

$$n + \tau = n + t, \quad \text{d. h.} \quad \tau = t$$

und erhalten als Koeffizienten von $f(n + \tau) = f(n + t)$:

$$\Phi_2\left(\frac{1}{2} - \frac{\tau}{d}\right) = \Phi_2\left(\frac{1}{2} - \frac{t}{d}\right) = \Phi_1\left(-\frac{1}{2} + \frac{t}{d}\right),$$

oder

$$n - d + \tau = n - t, \quad \text{d. h.} \quad \tau = d - t.$$

Wir bekommen als Koeffizienten von $f(n - d + \tau) = f(n - t)$:

$$\Phi_1\left(\frac{1}{2} - \frac{\tau}{d}\right) = \Phi_1\left(-\frac{1}{2} + \frac{t}{d}\right).$$

Hieraus folgt, dass die Koeffizienten von $f(n + t)$ und $f(n - t)$ übereinstimmen. Der gemeinsame Wert beträgt nach der Gleichung (11)

$$\Phi_1\left(-\frac{1}{2} + \frac{t}{d}\right) = 1\frac{1}{2}\,\frac{t^3}{d^3} - 2\frac{1}{2}\,\frac{t^2}{d^2} + 1 = P\left(\frac{t}{d}\right).$$

Der Abstand t der Argumente $n \pm t$ vom Index n ist grösser als d, also das Verhältnis $\frac{t}{d}$ grösser als 1.

In der Gleichung (15) setzen wir entweder

$$n + d + \tau = n + t, \quad \text{d. h.} \quad \tau = t - d$$

und finden als Koeffizienten von $f(n + d + \tau) = f(n + t)$:

$$\Phi_3\left(\frac{1}{2} - \frac{\tau}{d}\right) = \Phi_3\left(1\frac{1}{2} - \frac{t}{d}\right) = \Phi_0\left(-1\frac{1}{2} + \frac{t}{d}\right),$$

oder

$$n - 2d + \tau = n - t, \quad \text{d. h.} \quad \tau = 2d - t.$$

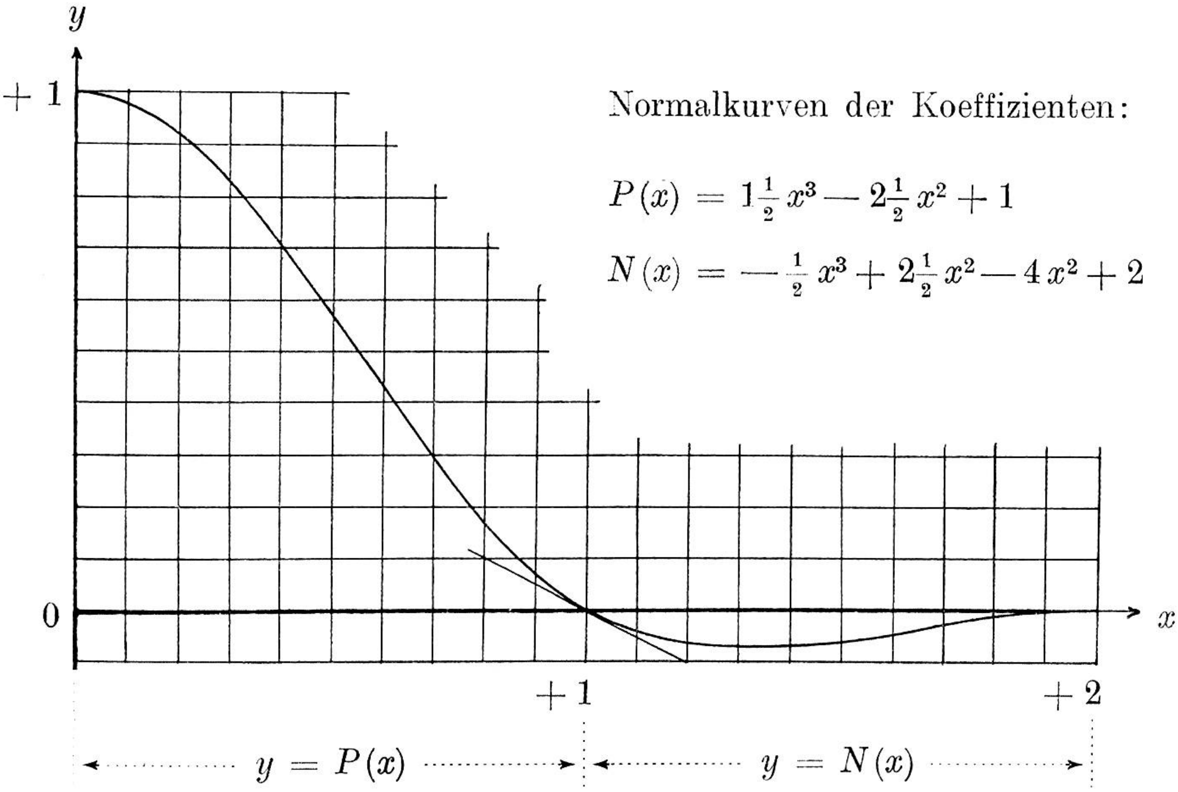
Wir erhalten als Koeffizienten von $f(n - 2d + \tau) = f(n - t)$:

$$\Phi_0\left(\frac{1}{2} - \frac{\tau}{d}\right) = \Phi_0\left(-1\frac{1}{2} + \frac{t}{d}\right).$$

Demzufolge stimmen die Koeffizienten von $f(n+t)$ und $f(n-t)$ überein. Der gemeinsame Wert beträgt nach der Gleichung (10)

$$\Phi_0\left(-1\frac{1}{2} + \frac{t}{d}\right) = -\frac{1}{2}\frac{t^3}{d^3} + 2\frac{1}{2}\frac{t^2}{d^2} - 4\frac{t}{d} + 2 = N\left(\frac{t}{d}\right).$$

Indem man daher in der Gleichung (15) die Glieder nach dem Abstand des Argumentes von dem Index n ordnet, resultiert schliesslich die eingangs angegebene Formel (1).



Die *Normalfunktion* der Koeffizienten

$$P(x) = 1\frac{1}{2}x^3 - 2\frac{1}{2}x^2 + 1$$

ist in dem in Betracht kommenden Intervall $x = 0$ bis 1 stets *positiv* und fällt von 1 bis 0. Im Punkte (0; 1) ist die Tangente parallel zur x-Achse und im Punkte (1; 0) hat die Tangente die Richtungszahl $-\frac{1}{2}$.

Hingegen ist die *Normalfunktion* der Koeffizienten

$$N(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 2\frac{1}{2}x^2 - 4x + 2$$

in dem entsprechenden Intervall $x = 1$ bis 2 stets *negativ.* Sie fällt von 0 bis zu dem Minimum $N(1\frac{1}{3}) = -0{,}074$ und wächst dann bis zu dem Maximum $N(2) = 0$.

Die beiden kubischen Parabeln $y = P(x)$ und $y = N(x)$ berühren sich im Punkte $(1; 0)$ und sind durch die beiden Punkte $(0; 1)$ und $(1; 0)$ bzw. $(1; 0)$ und $(2; 0)$ und die erwähnten zugehörigen Tangenten bestimmt.

Charakteristisch für die Ausgleichungsformel ist das Überwiegen der *positiven* Koeffizienten oder *Gewichte.* Bezeichnen $S_1(d)$ und $S_2(d)$ die Summen der positiven und negativen Gewichte der Formel (1), so findet man

$$S_1(d) = \frac{1}{d} + 2\sum_{1}^{d-1}{}_{\tau} \frac{1}{d} P\left(\frac{\tau}{d}\right) = 1\frac{1}{12} - \frac{1}{12d^2},$$

$$S_2(d) = 2\sum_{d+1}^{2d-1}{}_{\tau} \frac{1}{d} N\left(\frac{\tau}{d}\right) = -\frac{1}{12} + \frac{1}{12d^2}.$$

Aus den beiden Ergebnissen gehen die Kontrollbeziehungen hervor:

$$S_1(d) + S_2(d) = 1$$

$$S_1(d) : |S_2(d)| = 13 + \frac{12}{d^2 - 1}.$$

Lässt man die Äquidistanz *d unendlich gross* werden, so erhält man als Grenzwerte

$$S_1(\infty) = 1\frac{1}{12}; \quad S_2(\infty) = -\frac{1}{12}$$

und

$$S_1(\infty) : |S_2(\infty)| = 13.$$

Zu denselben Ergebnissen gelangt man durch die Integrationen

$$S_1(\infty) = 2\int_0^1 P(x)\,dx = \left(\frac{3}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 2x\right)_0^1 = 1\frac{1}{12},$$

$$S_2(\infty) = 2\int_1^2 N(x)\,dx = \left(-\frac{1}{4}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - 4x^2 + 4x\right)_1^2 = -\frac{1}{12}.$$

Bei der Ausgleichung sind ausser $f(n)$ $2d - 2$ Beobachtungswerte mit positiven und ebenso viele mit negativen Gewichten also $4d - 3$ Werte heranzuziehen. Da die Funktionen $P\left(\frac{t}{d}\right)$ und $N\left(\frac{t}{d}\right)$ für $\frac{t}{d} = 1$ verschwinden, fallen die beiden Grundwerte $f(n + d)$ und $f(n - d)$ bei der Summation weg.

Sieht man vom trivialen Fall $d = 1$; $4d - 3 = 1$ Glied also $\bar{f}(n) = f(n)$ ab, so erhalten wir für $d = 2$ bis 6 die folgenden Spezialformeln:

$d = 2$; $4d - 3 = 5$ Glieder; $S_1(d) = 1\frac{1}{16} = 1{,}0625$;

$$S_2(d) = -\frac{1}{16} = -0{,}0625; \quad S_1(d) : |S_2(d)| = 17.$$

$$\begin{aligned}\bar{f}(n) = 0{,}5\,f(n) &+ 0{,}28125\,[f(n+1) + f(n-1)] \\ &- 0{,}03125\,[f(n+3) + f(n-3)].\end{aligned}$$

$d = 3$; $4d - 3 = 9$ Glieder; $S_1(d) = 1\frac{2}{27} = 1{,}07407$;

$$S_2(d) = -\frac{2}{27} = -0{,}07407; \quad S_1(d) : |S_2(d)| = 14{,}5.$$

$$\begin{aligned}\bar{f}(n) = 0{,}33333\,f(n) &+ 0{,}25926\,[f(n+1) + f(n-1)] \\ &+ 0{,}11111\,[f(n+2) + f(n-2)] \\ &- 0{,}024691\,[f(n+4) + f(n-4)] \\ &- 0{,}012346\,[f(n+5) + f(n-5)].\end{aligned}$$

$d = 4$; $4d - 3 = 13$ Glieder; $S_1(d) = 1\frac{5}{64} = 1{,}07813$;

$$S_2(d) = -\frac{5}{64} = -0{,}07813; \quad S_1(d) : |S_2(d)| = 13{,}8.$$

$$\begin{aligned}\bar{f}(n) = 0{,}25\,f(n) &+ 0{,}21680\,[f(n+1) + f(n-1)] \\ &+ 0{,}140625\,[f(n+2) + f(n-2)] \\ &+ 0{,}056606\,[f(n+3) + f(n-3)] \\ &- 0{,}017578\,[f(n+5) + f(n-5)] \\ &- 0{,}015625\,[f(n+6) + f(n-6)] \\ &- 0{,}005859\,[f(n+7) + f(n-7)].\end{aligned}$$

$d = 5$ (Karupsche Formel); $4d - 3 = 17$ Glieder; $S_1(d) = 1\frac{2}{25} = 1{,}08$;

$$S_2(d) = -\tfrac{2}{25} = -0{,}08; \quad S_1(d) : |S_2(d)| = 13{,}5.$$

$$\begin{aligned}
\bar{f}(n) = 0{,}2\,f(n) &+ 0{,}1824\,[f(n+1) + f(n-1)] \\
&+ 0{,}1392\,[f(n+2) + f(n-2)] \\
&+ 0{,}0848\,[f(n+3) + f(n-3)] \\
&+ 0{,}0336\,[f(n+4) + f(n-4)] \\
&- 0{,}0128\,[f(n+6) + f(n-6)] \\
&- 0{,}0144\,[f(n+7) + f(n-7)] \\
&- 0{,}0096\,[f(n+8) + f(n-8)] \\
&- 0{,}0032\,[f(n+9) + f(n-9)].
\end{aligned}$$

$d = 6$; $4d - 3 = 21$ Glieder; $S_1(d) = 1\frac{35}{432} = 1{,}08102$;

$$S_2(d) = -\tfrac{35}{432} = -0{,}08102; \quad S_1(d) : |S_2(d)| = 13{,}34.$$

$$\begin{aligned}
\bar{f}(n) = 0{,}16667\,f(n) &+ 0{,}15625\,[f(n+1) + f(n-1)] \\
&+ 0{,}12963\,[f(n+2) + f(n-2)] \\
&+ 0{,}09375\,[f(n+3) + f(n-3)] \\
&+ 0{,}05556\,[f(n+4) + f(n-4)] \\
&+ 0{,}02199\,[f(n+5) + f(n-5)] \\
&- 0{,}00965\,[f(n+7) + f(n-7)] \\
&- 0{,}01235\,[f(n+8) + f(n-8)] \\
&- 0{,}01042\,[f(n+9) + f(n-9)] \\
&- 0{,}00617\,[f(n+10) + f(n-10)] \\
&- 0{,}00193\,[f(n+11) + f(n-11)].
\end{aligned}$$

Literaturnachweis

[1] *Karup, J.*: Über eine neue mechanische Ausgleichungsmethode. Transactions of the Second international actuarials Congress, London 1898.

[2] *Rosmanith, G.*: Mathematische Statistik der Personenversicherung, Leipzig 1930.

[3] *Simonett, J.*: Beiträge zur Ausgleichung von Massenerscheinungen nach der Methode von King, Mitteilungen, Band 28, 1933.

[4] *Zwinggi, E.*: Versicherungsmathematik, Basel 1945.