Eine Variation der t-Methode

Eine Variation der *t*-Methode

Von *H. Ruch*, Basel

[Fortsetzung und Schluss [1])]

VI

In Abschnitt IV wurde bereits das Problem der Abschätzung des Fehlers gestreift. Es wurde auch ein Weg zur Lösung des Problems angedeutet. Danach würde es sich darum handeln, einen oder auch mehrere Ausdrücke zu finden, die einen Maßstab für die Variabilität des Ausdrucks

$$\frac{g_{x\overline{t}|} - g_{x_1\overline{t}|}}{g_{x_2\overline{t}|} - g_{x_1\overline{t}|}} \quad \text{gegenüber dem Argument } t \text{ darstellen.}$$

Sodann müsste eine Beziehung zwischen diesem Maßstab und dem Fehler des nach der t-Methode berechneten Deckungskapitals hergeleitet werden. Beginnen wir mit der Aufstellung dieser letztern Beziehung. Es sei also $D = D_n - D_m$ der Fehler des Deckungskapitals, wobei D_n der Anteil ist, der auf den Endwert der Prämienleistung, D_m der Anteil, der auf den Endwert der Versicherungsleistung entfällt. Es ist also, wenn wir noch für $g_{x\overline{t}|}$ die resp. Versicherungswerte $n_{x\overline{t}|}$ und $m_{x\overline{t}|}$ einsetzen:

$$D_n = n_{\varrho_k\overline{t}|} \sum_i P_i - \sum_i n_{x_i\overline{t}|} P_i \,, \tag{20}$$

$$D_m = m_{\varrho_l\overline{t}|} \sum_i S_i - \sum_i m_{x_i\overline{t}|} S_i \,. \tag{21}$$

---

[1]) S. gleichnamigen Aufsatz in den «Mitteilungen Schweizerischer Versicherungsmathematiker», Band 48, Heft 2.

Dabei sind ϱ_k und ϱ_l die auf Grund der Formeln (17) bis (19) berechneten mittleren Eintrittsalter ϱ_1, ϱ_2 oder ϱ_3. Für die drei verschiedenen Varianten des Abschnitts V ist:

Variante I: $k = 1,\quad l = 1$

Variante II: $k = 2,\quad l = 2$

Variante III: $k = 3,\quad l = 2$.

In Anwendung von Gleichung (9) denken wir uns die Endwerte $n_{x\overline{t}|}$ und $m_{x\overline{t}|}$ in Potenzreihen von $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ entwickelt. Da sowohl $n_{x\overline{t}|}$ als auch $m_{x\overline{t}|}$ nur durch eine endliche Anzahl von Funktionswerten gegeben sind, kann über $n_{x\overline{t}|}$ und $m_{x\overline{t}|}$ so verfügt werden, dass sie rationale Funktionen der Argumente $\varphi(x)$ resp. $\psi(x)$ sind. Das heisst aber, dass die Potenzreihen nach einer endlichen Zahl von Gliedern abbrechen. Es ist also

$$n_{x\overline{t}|} = \sum_{h=0}^{r} a_h(t)\, \varphi^h(x), \tag{22}$$

$$m_{x\overline{t}|} = \sum_{h=0}^{s} b_h(t)\, \psi^h(x). \tag{23}$$

Setzt man diese Ausdrücke in die Gleichungen (20) und (21) ein, so erhält man:

$$D_n = \sum_{h=0}^{r} a_h(t) \left[\varphi^h(\varrho_k) \sum_i P_i - \sum_i \varphi^h(x_i)\, P_i\right] \tag{24}$$

oder nach Abspaltung der Glieder für $h = 0$ und 1 und unter Berücksichtigung der Gleichung (19)

$$D_n = a_1(t)\,[\varphi(\varrho_k) - \varphi(\varrho_3)] \sum_i P_i + \sum_{h=2}^{r} a_h(t) \left[\varphi^h(\varrho_k) \sum_i P_i - \sum_i \varphi^h(x_i)\, P_i\right]. \tag{25}$$

In analoger Weise finden wir:

$$D_m = b_1(t)\,[\psi(\varrho_l) - \psi(\varrho_2)] \sum_i S_i + \sum_{h=2}^{s} b_h(t) \left[\psi^h(\varrho_l) \sum_i S_i - \sum_i \psi^h(x_i)\, S_i\right]. \tag{26}$$

Bei der Variante I

ist sowohl $\varphi(\varrho_k) - \varphi(\varrho_3)$ als auch $\psi(\varrho_l) - \psi(\varrho_2)$ von null verschieden.

Bei Variante II

ist $\varphi(\varrho_k) - \varphi(\varrho_3)$ von null verschieden, dagegen ist $\psi(\varrho_l) - \psi(\varrho_2) = 0$.

Bei Variante III

endlich ist $\varphi(\varrho_k) - \varphi(\varrho_3) = \psi(\varrho_l) - \psi(\varrho_2) = 0$.

Bei den Varianten I und II wurde offenbar unter den Formeln (17) und (18) die ungeeignete zur Berechnung der ϱ_k und ϱ_l gewählt. Dadurch entstand bei Variante I ein Fehler in der Grösse von

$$G_{\mathrm{I}} = a_1(t)\,[\varphi(\varrho_1) - \varphi(\varrho_3)] \sum_i P_i - b_1(t)\,[\psi(\varrho_1) - \psi(\varrho_2)] \sum_i S_i \,. \tag{27}$$

Bei der Variante II betrug der analoge Fehler:

$$G_{\mathrm{II}} = a_1(t)\,[\varphi(\varrho_2) - \varphi(\varrho_3)] \sum_i P_i \,. \tag{28}$$

Wir wollen diese Fehler, die jeweilen durch das erste Glied der Gleichungen (25) und (26) gegeben sind, mit «Fehler der Gewichtsverteilung» bezeichnen; sie lassen sich relativ leicht berechnen. Der eigentliche Fehler der t-Methode, der in der Variabilität der bereits erwähnten Ausdrücke begründet ist, wird durch das zweite Glied der Gleichungen (25) und (26) dargestellt. Er hängt einerseits von der gewählten Absterbeordnung und anderseits von der Bestandeszusammensetzung ab. Würden die $n_{\overline{xt}|}$ und $m_{\overline{xt}|}$ der Invarianzbedingung von Abschnitt III genügen, so wären sämtliche Koeffizienten $a_h(t)$ und $b_h(t)$ für $h \geqslant 2$ gleich null und damit würde auch der eigentliche Fehler verschwinden. Der Fehler der Gewichtsverteilung kann vermieden werden (Variante III). Dagegen ist es nicht möglich, den eigentlichen Fehler zu vermeiden. Aber auch seine Abschätzung auf Grund der Formeln (24) und (25) führt, wie die Formeln zeigen, praktisch auf unüberwindliche rechnerische Schwierigkeiten. Die in Abschnitt IV ausgedrückte Vermutung, dass der direkte Weg über die Berechnung des Fehlers an der Stichprobe der einfachere und sicherere sei, erweist sich damit als richtig. Es kommt noch hinzu, dass man auf Grund der Formeln (24) und (25) nicht auf eine Stichprobe verzichten kann. Die Auswertung der Formeln (24) und (25) setzt einmal voraus, dass man für den Stichprobenbestand noch unzählige weitere Hilfszahlen $\varphi^h(x_i)\,P_i$ resp. $\psi^h(x_i)\,S_i$ einführt und dass man die Koeffizienten $a_h(t)$ resp. $b_h(t)$ berechnen kann. Das letztere wird am besten mit Hilfe der Lagrangeschen Interpolationsformel erreicht. Aber schon bei der Beschränkung von h auf 2 und 3 wird die Berechnung der $a_h(t)$ resp. $b_h(t)$ und der $\varphi^2(x_i)\,P_i$, $\varphi^3(x_i)\,P_i$, $\psi^2(x_i)\,S_i$ und $\psi^3(x_i)\,S_i$ recht mühsam, wobei sich erst noch zeigt, dass diese Beschränkung auf die beiden ersten Glieder ungenügend ist. Bricht man nämlich die Reihe der $a_h(t)$ resp. $b_h(t)$ zu früh ab, so erweisen sich die Koeffizienten einmal als nicht unabhängig von x und zum andern die Reihe als zu wenig konvergent.

VII

Trotzdem sollen wenigstens für die $n_{\overline{xt}|}$ und für den Fall $r = 3$, also $h = 2$ und 3 die Formeln für die Lagrangesche Interpolation hergeleitet werden. Es seien also (Y_1, φ_1), (Y_2, φ_2), (y_3, φ_3) und (y_4, φ_4) vier Paare homologer Funktionswerte der Funktion $y = n_{\overline{xt}|}$ und $\varphi = \varphi(x)$ bei festgehaltenem t. Dann ist bekanntlich

$$\begin{aligned} y = {} & A_1(\varphi-\varphi_2)(\varphi-\varphi_3)(\varphi-\varphi_4) + A_2(\varphi-\varphi_1)(\varphi-\varphi_3)(\varphi-\varphi_4) + \\ & + A_3(\varphi-\varphi_1)(\varphi-\varphi_2)(\varphi-\varphi_4) + A_4(\varphi-\varphi_1)(\varphi-\varphi_2)(\varphi-\varphi_3), \end{aligned} \tag{26}$$

wobei die Koeffizienten A_1, A_2, A_3 und A_4 durch die Formel

$$A_k = \frac{y_k}{\prod\limits_{k \neq i} (\varphi_k - \varphi_i)} \tag{27}$$

gegeben sind. Entwickelt man die Gleichung (26) nach Potenzen von φ, so erhält man durch Koeffizientenvergleichung mit der Gleichung (22) der Reihe nach die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} a_0(t) = {} & -\varphi_2\varphi_3\varphi_4 A_1 - \varphi_1\varphi_3\varphi_4 A_2 - \\ & - \varphi_1\varphi_2\varphi_4 A_3 - \varphi_1\varphi_2\varphi_3 A_4, \end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned} a_1(t) = {} & (\varphi_2\varphi_3 + \varphi_2\varphi_4 + \varphi_3\varphi_4) A_1 + (\varphi_1\varphi_3 + \varphi_1\varphi_4 + \varphi_3\varphi_4) A_2 + \\ & + (\varphi_1\varphi_2 + \varphi_1\varphi_4 + \varphi_2\varphi_4) A_3 + (\varphi_1\varphi_2 + \varphi_1\varphi_3 + \varphi_2\varphi_3) A_4, \end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned} a_2(t) = {} & -(\varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4) A_1 - (\varphi_1 + \varphi_3 + \varphi_4) A_2 - \\ & - (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_4) A_3 - (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) A_4, \end{aligned} \tag{30}$$

$$a_3(t) = A_1 + A_2 + A_3 + A_4. \tag{31}$$

Diese Koeffizienten sind von der Wahl der vier Wertpaare (y_k, φ_k) abhängig. Sie wären nur dann von diesen Wertpaaren unabhängig, wenn die durch die Funktion $y = n_{\overline{xt}|}$ dargestellte Kurve eine Parabel dritter Ordnung wäre. Die Durchführung der Rechnung an der Tafel SM 1933/37 2,75% ergab folgende Werte:

x_1, x_2, x_3, x_4 \ t	5	10	15	20	25	30
			$a_0(t)$			
20 25 30 35	5.568	11.940	19.106	26.997	35.273	41.850
25 30 35 40	5.461	11.756	18.942	27.000	35.353	44.080
30 35 40 45	5.473	11.774	19.003	26.999	36.060	46.212
35 40 45 50	5.456	11.740	18.841	27.001	36.413	46.115
40 45 50 55	5.451	11.660	18.795	27.001	35.942	50.886
			$a_1(t)$			
20 25 30 35	-0.133 1	-0.168 4	0.103 6	1.009	3.284	10.413
25 30 35 40	+0.016 0	+0.084 6	0.330 7	1.000	3.159	7.412
30 35 40 45	0.004 9	0.069 7	0.273 0	1.001	2.484	5.377
35 40 45 50	0.015 3	0.088 0	0.373 7	0.999	2.263	5.437
40 45 50 55	0.017 4	0.121 2	0.391 8	1.000	2.451	3.572
			$a_2(t)$			
20 25 30 35	0.066 56	0.116 4	0.105 2	0.000 7	-0.256 2	-1.840
25 30 35 40	-0.001 05	0.001 3	0.000 4	-0.000 1	-0.204 2	-0.506
30 35 40 45	0.002 31	0.005 8	0.017 7	0.000 0	-0.001 5	0.104
35 40 45 50	0.000 29	0.002 3	-0.001 8	0.000 1	0.040 8	0.093
40 45 50 55	0.000 03	-0.001 8	-0.004 0	-0.000 0	0.018 4	0.318
			$a_3(t)$			
20 25 30 35	-0.009 58	-0.016 26	-0.014 47	0.000 12	0.029 2	0.256 0
25 30 35 40	0.000 18	0.000 08	0.000 42	0.000 01	0.021 5	0.067 1
30 35 40 45	-0.000 14	-0.000 35	-0.001 21	0.000 01	0.002 4	0.009 6
35 40 45 50	-0.000 02	-0.000 13	0.000 04	0.000 00	0.000 2	0.010 3
40 45 50 55	-0.000 01	0.000 02	0.000 04	0.000 00	0.000 7	0.001 9