Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 49 (1949)

Artikel: Über die Anwendung von Mittelwerten zur Reserveberechnung

Autor: Leepin, Peter

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-555163

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 16.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Über die Anwendung von Mittelwerten zur Reserveberechnung

Von *Peter Leepin*, Basel

Einleitung

Die Verwendung von Mittelwerten stellt ein wichtiges Hilfsmittel in der Praxis der Lebensversicherung dar. Auch bei der Berechnung der Deckungskapitalien für ganze Versicherungsbestände erweisen sich Mittelwerte als zweckmässig. Zwei bekannte Verfahren sind die Z-Methode von Lidstone und die t-Methode. Bei der Z-Methode wird für eine Gruppe gleichaltriger Versicherungen ein durchschnittliches Ablaufsalter ermittelt, während bei der t-Methode ein mittleres Eintrittsalter zu bestimmen ist. Ein besonderer Vorteil der beiden erwähnten Verfahren besteht darin, dass die Berechnung der durchschnittlichen Alter — abgesehen von den Bestandesänderungen — unabhängig von der abgelaufenen Versicherungsdauer erfolgt. Es ist deshalb möglich, das mittlere Alter mit einer festen Hilfszahl zu bestimmen, was für die praktische Durchführung von entscheidender Bedeutung ist.

Das Ziel dieser Arbeit besteht in der grundsätzlichen Prüfung der Voraussetzungen, welche bestehen müssen, damit eine derartige Reserveberechnung möglich ist, sowie in der Abklärung der Frage, wie gegebenenfalls das mittlere Alter am zweckmässigsten ermittelt werden kann.

I. Zwei Sätze über Mittelwerte

Satz 1: Die einzige Funktion $f(x)$, welche bei festem n für alle x_i und h_i, wobei

$$\sum_{i=1}^{n} h_i = 1, \quad \text{und} \quad 0 \leqslant h_i \leqslant 1,$$

der Gleichung genügt

$$\sum_{i=1}^{n} h_i f(x_i) = f\left(\sum_{i=1}^{n} h_i x_i\right), \tag{1}$$

ist die ganze lineare Funktion $f(x) = ax + b$.

Beweis: Wir setzen $h_1 = h$, $h_2 = 1 - h$, $h_3 = h_4 = \ldots = h_n = 0$ und betrachten h als veränderlich, hingegen x_1 und x_2 als fest. Substituieren wir y für $hx_1 + (1-h)x_2$ in (1), so ergibt sich für $f(y)$ eine lineare Funktion von y im Intervall von x_1 bis x_2. Dass die lineare Funktion die Bedingung (1) für jede Wahl der x_i und h_i erfüllt, folgt durch Einsetzen sehr leicht.

Satz 2: Notwendig und hinreichend dafür, dass zwei umkehrbare Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ bei festem n für alle x_i und h_i, wobei

$$\sum_{i=1}^{n} h_i = 1 \quad \text{und} \quad 0 \leqslant h_i \leqslant 1,$$

die Bedingung

$$\sum_{i=1}^{n} h_i f(x_i) = f(\xi) \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{n} h_i g(x_i) = g(\xi)$$

erfüllen, ist das Bestehen einer Beziehung von der Form $f(x) = a + bg(x)$.

Beweis: Nach Satz 1 ist notwendig und hinreichend dafür, dass $\sum_{i=1}^{n} h_i F(y_i) = F(y_m)$ und gleichzeitig $\sum_{i=1}^{n} h_i y_i = y_m$ für alle y_i und h_i, das Bestehen einer Beziehung von der Form $F(y) = a + by$.

Bezeichnen wir mit $\bar{g}$ die Umkehrfunktion von g und setzen $F = f\bar{g}$, $y = g(x)$ und $y_m = g(\xi)$, so folgt die Behauptung.

Die angeführten Sätze sind im wesentlichen bekannt. Man vergleiche dazu etwa die Arbeiten von *H. Jecklin:* Die einjährige Sterbewahrscheinlichkeit als Hilfsgrösse zur Bestimmung des technischen Durchschnittsalters von Personengruppen in der Lebensversicherung (Blätter für Versicherungsmathematik, Band 4, Heft 6, 1937/39, Bemerkung auf S. 255), *H. Ruch:* Eine Variation der t-Methode (Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, Band 48, 1948) und von *R. Picard:* Bemerkungen zu der Lidstoneschen Z-Methode (Blätter für Versicherungsmathematik, Band 2, Heft 7, 1931/33) für die kontinuierliche Betrachtungsweise.

II. Über Sterbetafeln zur Reserveberechnung

Sowohl die t-Methode als das Vorgehen von Lidstone ergeben bekanntlich nur Näherungswerte für die Deckungskapitalien. Die theoretische Begründung für beide Verfahren fusst auf dem Sterbegesetz von Makeham. Es stellt sich die Frage, ob es nicht Sterbegesetze gibt, bei welchen ein entsprechendes Vorgehen zu den genauen Reserven führt.

A. Prospektive Reserveberechnung mit einem mittleren Ablaufsalter entsprechend der Z-Methode

Für die Z-Methode von Lidstone wird der Bestand von gemischten Versicherungen nach der restlichen Laufzeit gegliedert und dann für jede Gruppe ein mittleres Ablaufsalter errechnet. Unter Verwendung der Bezeichnungen

$$\begin{aligned} S_i &= \text{Summe der Versicherung } i \\ SP_i &= \text{zugehörige Nettoprämie} \\ x_i &= \text{zugehöriges Eintrittsalter} \\ n_i &= \text{zugehörige gesamte Versicherungsdauer} \\ t_i &= \text{zugehörige abgelaufene Versicherungsdauer} \\ s_i = x_i + n_i &= \text{zugehöriges Ablaufsalter,} \end{aligned}$$

ist der Ausdruck für die gesamte Reserve eines Bestandes von gemischten Versicherungen mit festen $n_i - t_i$

$$\sum \{S_i - (SP_i + dS_i)\, \mathsf{a}_{x_i+t_i:\overline{n_i-t_i}|}\}$$

zu ersetzen durch

$$\sum S_i - \mathsf{a}_{\sigma-(n_i-t_i):\overline{n_i-t_i}|} \sum (SP_i + dS_i)\,,$$

wobei σ das mittlere Ablaufsalter ist, das von der restlichen Dauer unabhängig sein soll.

Es muss also gelten

$$a_{\sigma-(n_i-t_i):\overline{n_i-t_i-1}|} = \frac{\sum (SP_i + dS_i)\, a_{x_i+t_i:\overline{n_i-t_i-1}|}}{\sum (SP_i + dS_i)}\,.$$

Diese Beziehung soll unabhängig von der Bestandeszusammensetzung bestehen. Für eine bestimmte Wahl der h_i muss somit σ sich aus der Gleichung

$$a_{\sigma-m:\overline{m}|} = \sum h_i \, a_{s_i-m:\overline{m}|} \tag{2}$$

als von m unabhängig ergeben. Dabei ist $\sum h_i = 1$ und $0 \leqslant h_i \leqslant 1$. Speziell gilt

$$a_{\sigma-1:\overline{1}|} = \sum h_i \, a_{s_i-1:\overline{1}|}. \tag{3}$$

Aus (2) und (3) folgt nach Satz 2, dass eine Beziehung von der Form

$$a_{s-m:\overline{m}|} = \alpha_m + \beta_m \, a_{s-1:\overline{1}|} \tag{4}$$

für alle m und natürlich auch für alle s bestehen muss. Das sind für die den Barwerten zugrunde liegenden Sterbewahrscheinlichkeiten sehr viele Beziehungen, welche sich nicht leicht überblicken lassen. Wir gehen deshalb stufenweise vor und betrachten vorerst die Gleichung (4) für $m = 2$:

$$a_{s-2:\overline{2}|} = vp_{s-2} + vp_{s-2}\, vp_{s-1} = \alpha_2 + \beta_2 \, vp_{s-1}.$$

Daraus ergibt sich

$$vp_{s-2} = \frac{\alpha_2 + \beta_2 \, vp_{s-1}}{1 + vp_{s-1}}. \tag{5}$$

Damit sind die Ausdrücke vp_x bis auf die Konstanten α_2, β_2 und den Ausgangswert festgelegt. Diese Grössen sind so zu wählen, dass die weiteren Bedingungen (4) erfüllt sind. Für $m = 3$ erhalten wir unter doppelter Verwendung von (5)

$$a_{s-3:\overline{3}|} = \alpha_3 + \beta_3 vp_{s-1} = vp_{s-3}\,(1 + \alpha_2 + \beta_2 \, vp_{s-1}) = \frac{\alpha_2 + \beta_2 \dfrac{\alpha_2 + \beta_2 \, vp_{s-1}}{1 + vp_{s-1}}}{1 + \dfrac{\alpha_2 + \beta_2 \, vp_{s-1}}{1 + vp_{s-1}}} (1 + \alpha_2 + \beta_2 \, vp_{s-1}). \tag{6}$$

Durch Wegschaffen der Nenner ergibt sich eine quadratische Gleichung für vp_{s-1}. Hätte diese nur zwei Wurzeln, so würde vp_x nur zwei Werte annehmen. Es lässt sich zeigen, dass dann die Bedingungen (4) nicht für alle m und s erfüllt werden können. Wir lassen diesen weniger wichtigen Fall auf der Seite und nehmen an, dass die aus (6) entstehende quadratische Gleichung mehr als zwei Lösungen besitzt.

Dann müssen ihre Koeffizienten identisch verschwinden. Eliminieren wir aus den drei entstehenden Gleichungen α_3 und β_3, so ergeben sich die Lösungen $\alpha_2 = -1$ und $\alpha_2 = \beta_2$. Die letztere kommt jedoch für uns nicht in Betracht, da dann gemäss Beziehung (5) vp_{s-2} konstant würde. Sobald wir nun $\alpha_2 = -1$ setzen, sind die Beziehungen (4) auch für die übrigen m erfüllt. Wir führen die Funktion $f(t)$ ein, welche der Rekursionsformel

$$f(t+1) = f(t)\sqrt{1+\beta_2} - f(t-1)$$

genügt. Für die Ausgangswerte $t = -4$ und $t = -3$ wählen wir dabei zweckmässig $f(t)$ als $-(1+\beta_2)^{\frac{1}{4}}$ und $-(1+\beta_2)^{-\frac{1}{4}}$. Für $t = -2$ wird dann $f(t) = 0$. Die Werte von $f(t)$ für grössere t lassen sich folgendermassen explizit darstellen:

$$f(t) = (1+\beta_2)^{\frac{2t+1}{4}} - \binom{t}{1}(1+\beta_2)^{\frac{2t-3}{4}} + \binom{t-1}{2}(1+\beta_2)^{\frac{2t-7}{4}} - + \dots \tag{7}$$

die Reihe fortgesetzt, solange in den Binomialkoeffizienten keine negativen Zahlen vorkommen.

Damit erhalten wir

$$vp(x) = \frac{f(\omega - x - 2) - f(\omega - x)\, vp(\omega)}{f(\omega - x - 4) - f(\omega - x - 2)\, vp(\omega)}, \tag{8}$$

wobei mit $p(\omega)$ der Ausgangswert bezeichnet ist. Für den Rentenbarwert ergibt sich die der Gleichung (4) entsprechende Darstellung

$$a_{s-m:\overline{m}|} = -f(m-2)\, f(m-3) + f(m-1)\, f(m-2)\, vp_{s-1}. \tag{9}$$

Die Beziehungen (7), (8) und (9) lassen sich mit Hilfe der vollständigen Induktion beweisen.

Da wir die Funktion vp_x durch Rekursion erhalten haben, können ihre Werte für ein Ausgangsintervall von der Länge «1» beliebig gewählt werden, wobei vp_x überall umkehrbar sein muss. Die Grösse β_2 allerdings ergibt sich auf Grund von Beziehung (4) als eine Konstante.

Es bleibt zu prüfen, ob eine Ausgleichung der p_x mit unseren Formeln Aussicht auf Erfolg hat. Wenn eine Beziehung von der Form (5) mit $\alpha_2 = -1$ unabhängig vom Zinsfuss bestehen soll, so muss für zwei Zinsfüsse mit den Abzinsungsfaktoren v und v' für alle p_x gelten

$$p_{x-1} = \frac{-1 + \beta_2\, vp_x}{v + v^2 p_x} = \frac{-1 + \beta_2'\, v' p_x}{v' + v'^2 p_x}.$$

Diese Beziehung kann nur dann für mehr als zwei verschiedene p_x erfüllt werden, wenn $v' = v$. Es gibt also keine für die Praxis in Frage kommende Sterbetafel, bei welcher sich ein von der Versicherungsdauer unabhängiges Zentralalter für die prospektive Reserveberechnung bei jeder Bestandeszusammensetzung unabhängig vom Zinsfuss finden lässt. Aber sogar dann, wenn wir bei der Ausgleichung der p_x auf den Zinsfuss für die Reserveberechnung bereits Rücksicht nehmen, also vp_x anstatt p_x ausgleichen, ergibt die Formel (8) keine Reihe der p_x, welche verwendbar ist, da vp_x in den für die Reserveberechnung wichtigen Altern erfahrungsgemäss konvex nach oben verläuft, während sich aus der Beziehung (8) Konvexität nach unten ergibt. Es wird nämlich

$$\Delta^{(2)} vp_x = vp_{x+2} - 2vp_{x+1} + \frac{-1 + (\beta_2 - 1)\, vp_{x+2}}{vp_{x+2}} = \frac{(1 - vp_{x+2})\,(vp_{x+1} - vp_{x+2})}{vp_{x+2}}$$

unter mehrfacher Verwendung der Gleichung (5) mit $\alpha_2 = -1$. Da $0 \leqslant vp_{x+2} < 1$ und $vp_{x+1} > vp_{x+2}$, fällt der Wert des Bruches somit immer positiv aus.

Angesichts der guten Erfahrungen, welche in der Praxis mit der Genauigkeit der Z-Methode gemacht werden, ist es überraschend, dass es keine für die Anwendung in Frage kommende Sterbetafel gibt, bei welcher sich ein von der restlichen Dauer unabhängiges Zentralalter finden lässt. Immerhin ist darauf hinzuweisen, dass der gesamte Ansatz etwas anspruchsvoll war. Anspruchsvoll in dem Sinne, dass alle durch Iteration des Ausdrucks (5) gewonnenen Sterbewahrscheinlichkeiten die notwendigen Bedingungen erfüllen sollten. Für die Praxis genügt das näherungsweise Bestehen der Beziehungen (4) für vp_x aus einem verhältnismässig kleinen Intervall. Infolge der unter diesen Umständen weniger starken Abhängigkeit der temporären Barwerte vom Alter, kommt es auf eine Abweichung im mittleren Alter weniger an.

Betrachten wir etwa vp_x im Intervall $vp_0 \pm \Delta$, so sollen die Beziehungen (4) für dieses Intervall mit grosser Näherung gelten. Wir nehmen an, Δ sei hinreichend klein, so dass die gebrochene rationale Gleichung (5) mit genügender Genauigkeit durch die ganze rationale Beziehung

$$vp_{s-2} = A + B\, vp_{s-1} \tag{10}$$

ersetzt werden kann. Bei geeignet kleiner Wahl von Δ lassen sich auch die weitern, der Gleichung (5) entsprechenden Beziehungen für $m = 3, 4$, usw. durch ganze lineare Funktionen von vp_{s-1} darstellen und damit alle näherungsweise erfüllen.

Aus (10) ergibt sich ein Ausdruck

$$p_x = \alpha + \beta\gamma^x,$$

dessen Verwandtschaft mit dem Sterbegesetz von Makeham augenscheinlich ist. Damit ergibt sich der Satz:

Ein Sterbegesetz, das in einem hinreichend kleinen Gebiet die zur prospektiven Reserveberechnung mit einem Zentralalter notwendigen Bedingungen näherungsweise erfüllen soll, muss sich in diesem Gebiet angenähert in der Form $p_x = \alpha + \beta\gamma^x$ darstellen lassen.

Dass das hinreichend kleine Intervall $(vp_0 \pm \Delta)$ für praktische Zwecke gross genug ist, erachten wir durch die bisherigen Untersuchungen und Erfahrungen über die Genauigkeit der Z-Methode für genügend erwiesen.

B. Retrospektive Reserveberechnung mit einem mittleren Eintrittsalter entsprechend der t-Methode

Für die t-Methode ist der Versicherungsbestand nach abgelaufener Dauer zu gliedern und in jeder Gruppe ein mittleres Eintrittsalter zu bestimmen. Unter weiterer Verwendung der im Abschnitt A eingeführten Bezeichnungen muss somit gelten

$$\sum SP_i \frac{N_{x_i} - N_{x_i+t}}{D_{x_i+t}} - \sum S_i \frac{M_{x_i} - M_{x_i+t}}{D_{x_i+t}} = \frac{N_\xi - N_{\xi+t}}{D_{\xi+t}} \sum SP_i - \frac{M_\xi - M_{\xi+t}}{D_{\xi+t}} \sum S_i. \tag{11}$$

Dabei bedeutet ξ das von t unabhängig zu wählende mittlere Eintrittsalter. Die Prüfung der Frage, ob es überhaupt möglich ist, für alle Kombinationen die Beziehung (11) zu erfüllen, gestaltet sich etwas umständlich.

In der Versicherungspraxis werden Versicherungen fast ausschliesslich mit einer ganzen Zahl von Jahren als Dauer abgeschlossen. Das Verhältnis $\frac{SP_i}{S_i}$ kann deshalb nur diejenigen Werte $\frac{1}{a_{x:\overline{n}|}} - d$

für ganzzahlige n annehmen, welche durch die Sterbetafel und den Zinsfuss festgelegt sind. Durch geeignete Zusammenfassung von zwei Versicherungen mit verschiedener Dauer und gleichem Eintrittsalter ist es aber möglich, dem Verhältnis $\frac{SP + SP'}{S + S'}$ jeden Wert zwischen dem Maximum und dem Minimum von $\frac{1}{a_{x:\overline{n}|}} - d$ bei festem x zu erteilen. Wenn wir demnach die beiden Versicherungen mit der Summe S und S' und den Nettoprämien SP und SP' als Einheit betrachten, so können wir den Ausdruck $\frac{SP_i}{S_i}$ innerhalb seiner Grenzen als beliebig veränderlich ansehen.

Wir wählen nun zwei solche «Versicherungen» mit den Eintrittsaltern x_1 und x_2, den Nettoprämien SP_1 und SP_2 und den Summen S_1 und S_2, wobei $\frac{SP_1}{S_1} = \frac{SP_2}{S_2} = P$.

Dann ergibt sich nach Gleichung (11)

$$\frac{SP_1(N_{x_1} - N_{x_1+t}) - S_1(M_{x_1} - M_{x_1+t})}{D_{x_1+t}} + \frac{SP_2(N_{x_2} - N_{x_2+t}) - S_2(M_{x_2} - M_{x_2+t})}{D_{x_2+t}} =$$

$$= \frac{(SP_1 + SP_2)(N_\xi - N_{\xi+t}) - (S_1 + S_2)(M_\xi - M_{\xi+t})}{D_{\xi+t}},$$

wo ξ unabhängig ist von t.

Setzen wir

$$F(x, t, P) = \frac{P(N_x - N_{x+t}) - (M_x - M_{x+t})}{D_{x+t}},$$

so erhalten wir

$$S_1 F(x_1, t, P) + S_2 F(x_2, t, P) = (S_1 + S_2) F(\xi, t, P)$$

unabhängig von t. Daraus folgt, da S_1 und S_2 beliebig gewählt werden können, entsprechend dem Vorgehen im Abschnitt A auf Grund von Satz 2 eine Beziehung von der Form

$$F(x, t, P) = a(t, P) + b(t, P)\, g(x, P).$$

Aus dem Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned}
\frac{P_1(N_x-N_{x+t})}{D_{x+t}} - \frac{M_x-M_{x+t}}{D_{x+t}} &= a(t,P_1)+b(t,P_1)\,g(x,P_1)\\
\frac{P_2(N_x-N_{x+t})}{D_{x+t}} - \frac{M_x-M_{x+t}}{D_{x+t}} &= a(t,P_2)+b(t,P_2)\,g(x,P_2)\\
\frac{P_3(N_x-N_{x+t})}{D_{x+t}} - \frac{M_x-M_{x+t}}{D_{x+t}} &= a(t,P_3)+b(t,P_3)\,g(x,P_3)
\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

ergibt sich durch Elimination der Barwerte auf der linken Seite

$$\begin{aligned}
&(P_3-P_2)\,b(t,P_1)\,g(x,P_1)+(P_1-P_3)\,b(t,P_2)\,g(x,P_2)+\\
&\qquad\qquad +(P_2-P_1)\,b(t,P_3)\,g(x,P_3) = H(t,P_1,P_2,P_3)\,, \qquad (15)
\end{aligned}$$

unter Verwendung einer abkürzenden Bezeichnung für die von x unabhängigen Glieder. Wir betrachten die Beziehung (15) für zwei voneinander verschiedene feste Werte t_1 und t_2. Im allgemeinen lassen sich aus den beiden Gleichungen $g(x,P_2)$ und $g(x,P_3)$ linear durch $g(x,P_1)$ ausdrücken. Dann erhalten wir aber aus den Gleichungen (14) für die Barwerte Darstellungen von der Form

$$\left.\begin{aligned}
\frac{N_x-N_{x+t}}{D_{x+t}} &= A(t)+B(t)\,G(x)\\
\text{und}\qquad \frac{M_x-M_{x+t}}{D_{x+t}} &= A'(t)+B'(t)\,G(x)\,.
\end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Die aus der Gleichung (15) abgeleiteten Bedingungen für zwei verschiedene t lassen sich dann nicht nach $g(x,P_2)$ und $g(x,P_3)$ auflösen, wenn für jede Wahl von t_1 und t_2

$$\frac{b(t_1,P_2)}{b(t_1,P_3)} = \frac{b(t_2,P_2)}{b(t_2,P_3)}\,.$$

Wir bezeichnen dieses von t unabhängige Verhältnis mit $h(P_2,P_3)$. Aus den beiden letzten Gleichungen von (14) erhalten wir durch Einsetzen von $h(P_2,P_3)$ wieder eine Darstellung in der Gestalt der Beziehung (16).

Wir haben damit erst notwendige Bedingungen dafür, dass das gesuchte Sterbegesetz ein mittleres Eintrittsalter für die Reserveberechnung nach der t-Methode unabhängig von der abgelaufenen Dauer bei allen denkbaren Bestandeszusammensetzungen ergibt. Wir werden zeigen, dass diese notwendigen Bedingungen nur mit einer konstanten Sterbewahrscheinlichkeit zu erfüllen sind.

In Abschnitt A fanden wir als notwendig und hinreichend für das Bestehen einer Beziehung von der Form

$$\frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x} = \alpha_n + \beta_n g(x+n)$$

die Gültigkeit der Rekursionsformel

$$vp_{x-1} = \frac{-1 + \beta_2 vp_x}{1 + vp_x}.$$

Da aber

$$\frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x} = \sum_{\nu=1}^{n+1} v^\nu \prod_{\tau=0}^{\nu-1} p_{x+\tau}$$

und

$$\frac{N_x - N_{x+t}}{D_{x+t}} = \sum_{\nu=1}^{t+1} \left(\frac{1}{v}\right)^\nu \prod_{\tau=0}^{\nu-1} \frac{1}{p_{x+t-1-\tau}}$$

folgt als notwendig und hinreichend für das Bestehen der Gleichung

$$\frac{N_x - N_{x+t}}{D_{x+t}} = A(t) + B(t)\,G(x)$$

die Rekursionsformel

$$\frac{1}{vp_x} = \frac{-1 + \beta_2 \dfrac{1}{vp_{x-1}}}{1 + \dfrac{1}{vp_{x-1}}}.$$

Daraus erhalten wir aber wieder

$$vp_{x-1} = \frac{-1 + \beta_2 vp_x}{1 + vp_x}.$$

Damit ergibt sich die gleiche Formel für die Sterbewahrscheinlichkeit wie unter Abschnitt A. Nun muss aber zusätzlich auch noch gelten

$$\frac{M_x - M_{x+t}}{D_{x+t}} = A'(t) + B'(t)\,G(x).$$

Da

$$\frac{M_x - M_{x+t}}{D_{x+t}} = \frac{D_x - D_{x+t}}{D_{x+t}} - d\,\frac{N_x - N_{x+t}}{D_{x+t}},$$

folgt

$$\frac{D_x}{D_{x+t}} = A''(t) + B''(t)\,G(x).$$

Wir setzen $t = 1$ und 2 und erhalten

$$\frac{D_x}{D_{x+1}} = A''(1) + B''(1)\,G(x) = \frac{1}{v p_x},$$

$$\frac{D_x}{D_{x+2}} = A''(2) + B''(2)\,G(x) = \frac{1}{v p_x}\,\frac{\beta_2 - v p_x}{1 + v p_x}.$$

Durch Elimination von $G(x)$ erhalten wir eine quadratische Gleichung in $v p_x$ mit mehr als zwei verschiedenen Lösungen. Ihre Koeffizienten müssen deshalb verschwinden. Die entstehenden Gleichungen führen auf Werte für die Konstanten, welche unveränderliche Sterbewahrscheinlichkeiten bedingen. Es gibt somit keine nicht konstante Sterbetafel, welche eine genaue Reserveberechnung mit dem bei der t-Methode verwendeten Prinzip für alle denkbaren Kombinationen von Versicherungen gestattet.

Eine Sterbetafel, welche die für die Reserveberechnung nach der t-Methode notwendigen Bedingungen in einem genügend kleinen Bereich für die Sterbewahrscheinlichkeiten näherungsweise erfüllt, muss sich in diesem Bereich näherungsweise in der Form $q_x = a + b c^x$ darstellen lassen. Der Beweis für diese Behauptung lehnt sich an die in Abschnitt A gezeigte Schlussweise an. Wir verzichten deshalb auf die nähere Durchführung.

Die t-Methode ergibt in der meist angewandten Form bekanntlich im allgemeinen weniger gute Ergebnisse als die Z-Methode. Der Hauptgrund dafür dürfte wohl darin liegen, dass sich in den für die Versicherungspraxis wichtigsten Altern die für die retrospektive Reserve-

berechnung zur Verwendung kommenden Sterbewahrscheinlichkeiten weniger gut durch eine Makehamfunktion annähern lassen, als die für die prospektive Reserveberechnung in Betracht fallenden.

III. Über die Ermittlung des durchschnittlichen Alters

Die folgenden Bemerkungen über die Ermittlung des durchschnittlichen Alters sind für die t- und die Z-Methode dermassen analog, dass wir es für zweckmässig erachten, beide Reserveberechnungsverfahren nebeneinander zu behandeln.

Unter der Annahme, dass die in A und B hergeleiteten Bedingungen für die Anwendbarkeit der obigen Verfahren zur Reserveberechnung erfüllt sind, muss sich das mittlere Alter aus den Beziehungen

$$\sum (SP + dS)(1 + vp_{s-2}) = (1 + vp_{\sigma-2}) \sum (SP + dS)$$

für die Z-Methode bzw.

$$\sum SP \frac{r}{p_x} - \sum S \frac{q_x}{p_x} = \frac{r}{p_\xi} \sum SP - \frac{q_\xi}{p_\xi} \sum S$$

für die t-Methode ermitteln lassen, wo σ und ξ die mittleren Alter sind. Es folgt daraus

$$\sum (SP + dS)\, q_{s-2} = q_{\sigma-2} \sum (SP + dS) \tag{17}$$

für die Z-Methode und

$$\sum S - rSP) \frac{1}{p_x} = \frac{1}{p_\xi} \sum (S - rSP) \tag{18}$$

für die t-Methode, deren Verwandtschaft mit den üblichen Ermittlungsweisen

$$\sum S c^{x+n} = c^\sigma \sum S \tag{19}$$

und

$$\sum S q_x = q_\xi \sum S \tag{20}$$

offensichtlich ist. Bei der Z-Methode wird dabei das Gewicht weniger genau berücksichtigt als bei der t-Methode.

Diese üblichen Verfahren zur Ermittlung des Durchschnittsalters lassen für kurze restliche (Z-Methode) bzw. verflossene (t-Methode)

Dauern auf Grund von (17) und (18) eine gute Näherung erwarten. Bei längeren Dauern besteht die Gefahr einer relativ grösseren Abweichung im mittleren Alter. Da jedoch die zur Berechnung Verwendung findenden Barwerte gerade bei längeren Dauern stärker vom Alter abhängen, ist die Verwendung der Beziehungen (19) und (20) nicht das Vorteilhafteste. Das wäre nur dann der Fall, wenn die für die Reserveberechnung mit einem Durchschnittsalter notwendigen Bedingungen genau erfüllt werden könnten. Wie wir gezeigt haben, ist das jedoch nicht möglich. Es ist unter diesen Umständen deshalb viel zweckmässiger, das mittlere Alter derart festzusetzen, dass die Reserve für eine geeignet zu wählende verhältnismässig längere Dauer mit der genau ermittelten übereinstimmt. Wohl wird dann für kürzere Dauern das Durchschnittsalter stärker abweichen; wegen der kleineren Empfindlichkeit der Barwerte ergibt sich trotzdem kein grosser Fehler in der Reserve.

Wir setzen für ein festes m_0 bzw. t_0

$$\sum (P + dS)\, a_{s-m_0:\overline{m_0}|} = a_{\sigma-m_0:\overline{m_0}|} \sum (P + dS) \tag{21}$$

bzw.

$$\sum P \frac{N_x - N_{x+t_0}}{D_{x+t_0}} - \sum S \frac{M_x - M_{x+t_0}}{D_{x+t_0}} = \frac{N_\xi - N_{\xi+t_0}}{D_{\xi+t_0}} \sum P - \frac{M_\xi - M_{\xi+t_0}}{D_{\xi+t_0}} \sum S. \tag{22}$$

Für die t-Methode hat *W. Ruch* in seiner bereits erwähnten Arbeit an einem praktischen Beispiel die starke Verbesserung in der Genauigkeit durch eine derartige Bestimmung des mittleren Alters gezeigt, wobei er allerdings für die vorkommenden Barwerte zwei verschiedene mittlere Alter bestimmte, und zwar eines für den Endwert der Prämien und das andere für den Endwert der Versicherungsleistungen. Dieses Vorgehen weist rechnerische Vorteile auf, hat jedoch den Nachteil für die praktische Verwaltung, dass zwei Hilfszahlen benötigt werden. Es genügt vollständig, als Hilfszahl für die einzelne Versicherung die Reserve bei t_0 vorzumerken und für den Bestand jeweils aus (22) ξ zu bestimmen.

Für ein Beispiel nach der Z-Methode wählten wir einen Bestand von Versicherungen mit Ablauf im gleichen Kalenderjahr. Da nur Versicherungsdauern bis 22 vorkamen, setzten wir $m_0 = 15$, somit relativ niedrig. Bei Versicherungsbeständen mit Dauern bis zu 35 und 40 Jahren dürfte $m_0 = 20$ oder noch etwas höher angemessen sein.

Bei der Wahl von m_0 ist die Häufigkeit der vorkommenden Versicherungsdauern im Bestand zu berücksichtigen.

Unser Bestand enthält viele Kinderversicherungen. Da üblicherweise die Sterblichkeit in den ersten Lebensjahren durch Leistungsbeschränkungen in ihrer finanziellen Auswirkung verkleinert wird, anderseits nur der Vergleich zwischen der Lidstoneschen Ermittlung des Durchschnittsalters und derjenigen unter der Verwendung der Barwerte $a_{x+t:\overline{m_0}|}$ für uns wichtig ist, stellt das für die folgende Untersuchung keinen Nachteil dar. Als Rechnungsgrundlagen verwendeten wir die Erfahrungen in der schweizerischen Bevölkerung für Männer in den Jahren 1939/44 [1]) mit dem Zinssatz von $2\frac{3}{4}\%$. Bei der Durchführung darf man sich nicht daran stossen, dass auch bei Dauern kleiner als m_0 auf die gleiche Weise zu verfahren ist. Unter Umständen braucht man dabei sogar Rentenbarwerte für fiktive negative Eintrittsalter. Diese können auf Grund der folgenden Überlegung ermittelt werden.

Das vorgeschlagene Verfahren zur Ermittlung der Reserve beruht auf der Voraussetzung, dass Rentenbarwerte gleicher restlicher Dauer näherungsweise unabhängig von dieser Dauer zum gleichen mittleren Ablaufsalter führen. Nach Satz 2 muss sich dann der Rentenbarwert bei einer bestimmten Dauer für alle Ablaufsalter als eine lineare Funktion der entsprechenden Barwerte für eine andere Dauer darstellen lassen. Eine geeignete Wahl der Rentenbarwerte für die fiktiven negativen Eintrittsalter ergibt sich demnach etwa, indem wir den Rentenbarwert mit der Dauer m_0 mittels der Methode der kleinsten Quadrate näherungsweise als lineare Funktion einer geeignet zu wählenden kürzeren Dauer ausdrücken. In unserem Beispiel fand dazu die Dauer von 7 Jahren Anwendung.

Mit dem beschriebenen Vorgehen ergaben sich folgende Abweichungen von der genauen Reserve in Prozenten:

$n-t$	Mittleres Alter nach der Formel (19) Lidstone	(21)
20	— 5,05	+ 0,56
15	— 1,72	0
10	— 0,65	+ 0,12
5	— 0,11	+ 0,02

[1]) Ausgeglichen nach Makeham, vom Eidgenössischen Statistischen Amt, Veröffentlichung in Vorbereitung.

Bei der Wertung dieser Zahlen ist zu beachten, dass gerade bei den absolut grossen Reserven für kleine $n - t$ relativ kleine Abweichungen auftreten, so dass sich für einen ganzen Bestand von verschiedenen Ablaufsjahren im Durchschnitt kleine Abweichungen ergeben müssen.

Angesichts der deutlichen Verbesserung in der Genauigkeit der Reserve durch die Verwendung der Formel (21) ist ernsthaft zu prüfen, ob sich nicht die einmalige Mehrarbeit durch die etwas umständlichere Berechnung der Hilfszahlen $(P + dS)\, a_{s-m_0:\overline{m_0|}}$ an Stelle von Sc^s lohnt. Ein wesentlicher Vorteil des beschriebenen Verfahrens besteht auch darin, dass es sich anwenden lässt, wenn keine nach Makeham ausgeglichene Sterbetafel vorliegt. Bei sehr langen Dauern besteht theoretisch die Gefahr von grösseren Abweichungen. Dem wirkt jedoch die Tatsache entgegen, dass hohe Verfallsalter meist ausgeschlossen werden. Die vorkommenden Verfallsalter weichen deshalb bei langen Versicherungsdauern nicht stark voneinander ab. Entsprechend treten bei der t-Methode für lange Versicherungsdauern nur verhältnismässig wenig Eintrittsalter auf.