Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 51 (1951)

Artikel: Eine neue Funktion der Versicherungsmathematik und ihre Anwendung

Autor: Lah, Ivo

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-555069

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Siehe Rechtliche Hinweise.

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. Voir Informations légales.

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. See Legal notice.

Download PDF: 30.01.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Eine neue Funktion der Versicherungsmathematik und ihre Anwendung

Von *Ivo Lah*, Ljubljana

1. Definition der neuen Funktion

In der Mathematik spielen eine wichtige Rolle die Funktionen $f_n(x)$, welche die Eigenschaft haben

$$\frac{d^\nu f_n(x)}{d x^\nu} = f_{n \pm \nu}(x),$$

d. h. die Ableitungen und die Integrale von $f_n(x)$ werden einfach durch Änderung von n gebildet. Eine bekannte derartige Funktion ist $\frac{x^n}{n!}$, weil

$$\frac{d^\nu \left(\frac{x^n}{n!}\right)}{d x^\nu} = \frac{x^{n-\nu}}{(n-\nu)!}.$$

Im folgenden wollen wir eine neue Funktion $M_n v^n$ konstruieren, deren ν-te Abteilung

$$\frac{d^\nu (M_n v^n)}{d i^\nu} = M_{n+\nu} v^{n+\nu}$$

und nachher werden wir zeigen, wie diese Funktion in der Versicherungsmathematik mit Vorteil angewendet werden kann.

Die neue Funktion wollen wir mittels der Summen der diskontierten Zahlen definieren. Unter der n-ten Summe der diskontierten Zahlen verstehen wir

$$S_x^{(n)} = \sum_{t=0}^{\omega-x} \binom{n+t}{n} D_{x+t}. \tag{1}$$

In der Versicherungspraxis ist $n = -1, 0, 1, 2$. Also

$$S_x^{(-1)} = \sum_{t=0}^{\omega-x} \binom{-1+t}{-1} D_{x+t} = D_x$$

$$S_x^{(0)} = \sum_{t=0}^{\omega-x} \binom{t}{0} D_{x+t} = N_x$$

$$S_x^{(1)} = \sum_{t=0}^{\omega-x} \binom{1+t}{1} D_{x+t} = S_x$$

. . . .

Theoretisch dagegen kann n eine beliebige positive, negative, rationale, irrationale, transzedente, sogar imaginäre oder komplexe Zahl sein. Vom theoretischen Standpunkt ist also $S_x^{(n)}$ eine kontinuierliche Funktion des Argumentes n und als solche wollen wir sie bei unseren Ausführungen betrachten. So z. B. haben wir

$$S_x^{(-2)} = \sum_{t=0}^{\omega-x} \binom{-2+t}{-2} D_{x+t} = D_x - D_{x+1}$$

$$S_x^{(-3)} = \sum_{t=0}^{\omega-x} \binom{-3+t}{-3} D_{x+t} = D_x - 2D_{x+1} + D_{x+2}$$

. . . .,

und weiter

$$S_x^{(0\cdot5)} = \sum_{t=0}^{\omega-x} \binom{0\cdot5+t}{0\cdot5} D_{x+t} = \sum_{t=0}^{\omega-x} \frac{\Gamma(1\cdot5+t)}{t!\,\Gamma(1\cdot5)} D_{x+t}$$

$$S_x^{(-0\cdot5)} = \sum_{t=0}^{\omega-x} \binom{-0\cdot5+t}{-0\cdot5} D_{x+t} = \sum_{t=0}^{\omega-x} \frac{\Gamma(0\cdot5+t)}{t!\,\Gamma(0\cdot5)} D_{x+t}$$

. . . .

Wenn $n < -1$, kann die Summe der diskontierten Zahlen negativ ausfallen, und zwar auch dann, wenn alle D_{x+t} positiv sind. Dagegen ist die Summe der diskontierten Zahlen stets positiv, wenn $n \geqslant -1$ und wenn zugleich alle

$$D_{x+t} > 0\,.$$

Unter der diskontierten Zahl D_{x+t} verstehen wir im folgenden das Produkt irgendeiner positiven Zahl l_{x+t} mit der $(x+t)$-en Potenz des Diskontfaktors v.

$$D_{x+t} = l_{x+t} v^{x+t} = l_{x+t}(1+i)^{-(x+t)}.$$

Die Folge der positiven Zahlen l_{x+t} nennen wir die Ausscheideordnung. Bei Absterbeordnungen ist $l_{x+t} > l_{x+t+1}$. In der Versicherungspraxis kommt es aber auch $l_{x+t} \leqslant l_{x+t+1}$ vor. Unsere Ausführungen gelten für alle Fälle $l_{x+t} \gtreqless l_{x+t+1}$. Um die Ausdrucksweise zu vereinfachen, führen wir folgende Bezeichnungen ein: Die Ausscheideordnung ist «abnehmend», wenn durchweg $D_{x+t} > D_{x+t+1}$ — «zunehmend», wenn durchweg $D_{x+t} < D_{x+t+1}$ — «konstant», wenn durchweg $D_{x+t} = D_{x+t+1}$ — «gemischt», wenn $D_{x+t} \gtreqless D_{x+t+1}$. Wir bemerken noch, dass unsere Ausführungen keine Geltung haben, wenn l_{x+t} eine Funktion des Zinsfusses i ist, was z. B. bei der Berechnung der Anwartschaften auf Invaliden-, Witwen- und Waisenrenten in der Pensionsversicherung der Fall ist.

Nach diesen Erklärungen definieren wir

$$M_n = (-1)^n n! \frac{S_{x+1}^{(n)}}{D_x}. \tag{2}$$

Speziell ist

$$M_{-1} = \infty, \tag{3}$$

$$M_0 = \frac{N_{x+1}}{D_x} = a_x, \tag{4}$$

$$M_1 = -\frac{S_{x+1}}{D_x} = -(Ia)_x, \tag{5}$$

$$M_2 = \frac{2S_{x+1}^{(2)}}{D_x}, \tag{6}$$

. . . .

Die neue Funktion lautet somit

$$\left.\begin{aligned} M_n v^n &= (-1)^n n!\, v^n \frac{S_{x+1}^{(n)}}{D_x} \\ &= (-1)^n n!\, v^n \frac{1}{D_x} \sum_{t=1}^{\omega-x} \binom{n-1+t}{n} D_{x+t} \\ &= \frac{(-1)^n}{l_x} \sum_{t=1}^{\omega-x} (n-1+t)_n\, l_{x+t} (1+i)^{-(n+t)}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Die erste Ableitung von (7) nach dem Zinsfusse i ist

$$\frac{d(M_n v^n)}{di} = \frac{(-1)^{n+1}}{l_x} \sum_{t=1}^{\omega-x} (n+t)_{n+1}\, l_{x+t} (1+i)^{-(n+1+t)} = M_{n+1} v^{n+1}.$$

Daher allgemein

$$\frac{d^\nu (M_n v^n)}{di^\nu} = M_{n+\nu} v^{n+\nu}. \tag{8}$$

$M_n v^n$ ist eine Funktion von n, i, x, l_{x+t}. Nachdem unsere Ausführungen für alle Alter x und für alle Ausscheideordnungen l_{x+t} gelten — insofern l_{x+t} nicht eine Funktion von i ist — wollen wir im folgenden $M_n v^n$ als eine kontinuierliche Funktion nur von n und i betrachten.

2. Ableitungen der Versicherungswerte

Mittels der neuen Funktion können leicht und einfach die Versicherungswerte nach dem Zinsfusse differenziert werden. Dazu braucht man nur den Versicherungswert durch die Funktion $M_n v^n$ auszudrücken. So lautet z. B. die Ableitung von a_x (4):

$$\frac{da_x}{di} = \frac{dM_0}{di} = M_1 v = -v \frac{S_{x+1}}{D_x} = -v (I a)\, x. \tag{9}$$

Desgleichen findet man die Ableitung von $(I a)_x$ (5):

$$\frac{d(I a)_x}{di} = -\frac{d[M_1 v (1+i)]}{di} = -v(M_1 + M_2) = \frac{v}{D_x}(S_{x+1} - 2 S_{x+1}^{(2)}). \tag{10}$$

Die Jahresprämie der lebenslänglichen Ablebensversicherung ist bekanntlich

$$P_x = \frac{A_x}{\mathrm{a}_x} = \frac{1}{1+a_x} - \frac{i}{1+i} = \frac{1}{1+M_0} - \frac{i}{1+i}. \tag{11}$$

Daraus folgt

$$\frac{dP_x}{di} = -\frac{M_1 v}{(1+M_0)^2} - \frac{1}{(1+i)^2} = \frac{v(I a)_x}{\mathrm{a}_x^2} - v^2. \tag{12}$$

Die Prämienreserve der lebenslänglichen Ablebensversicherung mit gleichbleibenden Jahresprämien nach Ablauf von t Versicherungsjahren ist bekanntlich

$$V_{x,t} = 1 - \frac{\mathfrak{a}_{x+t}}{\mathfrak{a}_x} = \frac{a_x - a_{x+t}}{1 + a_x} = \frac{M_0 - \mathfrak{M}_0}{1 + M_0}. \tag{13}$$

Daher

$$\frac{d V_{x,t}}{di} = \frac{v}{\mathfrak{a}_x^2} \left[\mathfrak{a}_x (I a)_{x+t} - \mathfrak{a}_{x+t} (I a)_x\right] \tag{14}$$

. . . .

In der Versicherungsmathematik werden ausser dem Zinsfusse i noch folgende Zinsmasse verwendet: der Aufzinsungsfaktor r, der Diskontfaktor v und die Zinsintensität δ. Zwischen diesen Grössen bestehen folgende Beziehungen:

$$1 + i = r = \frac{1}{v} = e^{\delta}.$$

Daher

$$di = dr = -\frac{dv}{v^2} = e^{\delta}\, d\delta .$$

Die neue Funktion kann also auch dann mit Vorteil angewendet werden, wenn die Versicherungswerte nach r oder nach v oder nach δ zu differenzieren sind.

Die neue Funktion ist sozusagen ein «Logarithmus» der Versicherungsmathematik in bezug auf die Infinitesimalrechnung. Der Versicherungswert V wird in eine Funktion von $M_n v^n$, d. i.

$$V = F(M_n v^n)$$

umgewandelt, an welcher die notwendigen Differentiationen und Integrationen nach dem Zinsmasse vorgenommen werden. Nach Beendigung dieser Operationen kehrt man von den $M_n v^n$-Werten zu den Versicherungswerten wieder zurück.

3. Die Taylorschen Reihen der Veısicherungswerte

Mittels der neuen Funktion können die Versicherungswerte leicht und rasch in die Taylorsche Reihe

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(x - x_0)^{\nu}}{\nu!} f^{(\nu)}(x_0) \tag{15}$$

entwickelt werden.

Wenn wir in (15)

$$x = i$$
$$x_0 = i_0$$
$$f(x) = a_x(i) = M_0$$
$$f(x_0) = a_x(i_0) = {}^0M_0$$

setzen, so bekommen wir die Taylorsche Reihe des Barwertes der konstanten lebenslänglichen nachschüssigen Leibrente a_x (4)

$$M_0 = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(i-i_0)^\nu}{\nu!} {}^0M_\nu v_0^\nu \tag{16}$$

oder wenn wir mittels (2) zu den Summen der diskontierten Zahlen zurückkehren

$$a_x(i) = \frac{1}{{}^0D_x} \sum_{\nu=0}^{\infty} [-(i-i_0)\, v_0]^\nu \, {}^0S_{x+1}^{(\nu)}. \tag{17}$$

Wenn wir (16) nach i differenzieren, bekommen wir die Taylorsche Reihe des Barwertes der steigenden Rente $(I\,a)_x$ (5)

$$M_1 v = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(i-i_0)^{\nu-1}}{(\nu-1)!} {}^0M_\nu v_0^\nu \tag{18}$$

bzw.

$$(I\,a)_x = \frac{1}{{}^0D_x} \frac{v_0}{v} \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu\, [-(i-i_0)\, v_0]^{\nu-1} \, {}^0S_{x+1}^{(\nu)}. \tag{19}$$

Im folgenden geben wir noch die Anfangsglieder der Taylorschen Reihe der Jahresprämie der lebenslänglichen Ablebensversicherung P_x (11) und der Prämienreserve $V_{x,t}$ (13) dieser Versicherung

$$P_x = {}^0P_x - (i-i_0)\, v_0 \left(\frac{{}^0M_1}{{}^0\mathrm{a}_x^2} + v_0 \right) + \frac{(i-i_0)^2 v_0^2}{2} \left(\frac{2\, {}^0M_1^2}{{}^0\mathrm{a}_x^3} - \frac{{}^0M_2}{{}^0\mathrm{a}_x^2} + 2 v_0 \right) + \ldots \tag{20}$$

$$V_{x,t} = {}^0V_{x,t} + \frac{(i-i_0)\, v_0}{{}^0\mathrm{a}_x^2} ({}^0M_1\, {}^0\mathrm{a}_{x+t} - {}^0\mathfrak{M}_1\, {}^0\mathrm{a}_x) + \frac{(i-i_0)^2\, v_0^2}{2\, {}^0\mathrm{a}_x^3} \cdot$$
$$\cdot \left[{}^0\mathrm{a}_x ({}^0M_2\, {}^0\mathrm{a}_{x+t} - {}^0\mathfrak{M}_2\, {}^0\mathrm{a}_x) - 2\, {}^0M_1 ({}^0M_1\, {}^0\mathrm{a}_{x+t} - {}^0\mathfrak{M}_1\, {}^0\mathrm{a}_x) \right] + \ldots \tag{21}$$

Dabei bedeutet

$${}^0M_1 = -\frac{{}^0S_{x+1}}{{}^0D_x}, \qquad {}^0M_2 = \frac{2\, {}^0S_{x+1}^{(2)}}{{}^0D_x},$$
$${}^0\mathfrak{M}_1 = -\frac{{}^0S_{x+t+1}}{{}^0D_{x+t}}, \qquad {}^0\mathfrak{M}_2 = \frac{2\, {}^0S_{x+t+1}^{(2)}}{{}^0D_{x+t}}.$$

4. Integration der Versicherungswerte

Wenn $n \geqslant 1$, kann die neue Funktion leicht integriert werden. Es ist nämlich

$$\int M_n v^n \, di = M_{n-1} v^{n-1} + C ,$$

wo C die Integrationskonstante bedeutet. So z. B. ist

$$\int (Ia)_x \, di = -\int (M_1 v)(1+i)\, di = -M_0(1+i) + \int M_0 \, di + C$$
$$= -r a_x + \int a_x \, di + C .$$

Dagegen M_0 können wir nicht auf diese Art integrieren, weil $M_{-1} v^{-1}$ unendlich ist (3). Die Versicherungswerte sind aber meistens Funktionen eben von M_0. In solchen Fällen greift man zur Taylorschen Reihe des Versicherungswertes. Aus (16) findet man leicht

$$\int a_x \, di = \int M_0 \, di = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(i-i_0)^{\nu+1}}{(\nu+1)\,!} \, {}^0M_\nu \, v_0^\nu + C$$

Ähnlich findet man aus (20)

$$\int P_x \, di = {}^0P_x (i-i_0) - \frac{(i-i_0)^2 v_0}{2} \left(\frac{{}^0M_1}{{}^0\mathrm{a}_x^2} + v_0 \right) + \ldots + C ,$$

und aus (21)

$$\int V_{x,t} \, di = {}^0V_{x,t}(i-i_0) + \frac{(i-i_0)^2 v_0}{2\,{}^0\mathrm{a}_x^2} \left({}^0M_1 \, {}^0\mathrm{a}_{x+t} - {}^0\mathfrak{M}_1 \, {}^0\mathrm{a}_x \right) + \ldots + C .$$

In der Versicherungsmathematik kommen aber auch Grössen vor, welche Funktionen von i, M_0, $M_1 v$, $M_2 v^2 \ldots M_n v^n$ sind. In solchem Falle heisst es die Differentialgleichung

$$F(i, M_0, M_1 v, M_2 v^2, \ldots M_n v^n) = 0$$

integrieren. Die Lösung einer solchen Aufgabe, nämlich die Integration der generalisierten Poukkaschen Funktion (23), wollen wir später zeigen.

5. Grenzwerte der generalisierten Poukkaschen Funktion

Poukka hat gefunden, dass sich der Wert des folgenden Doppelverhältnisses der Summen der diskontierten Zahlen

$$\frac{S_x^{(2)} N_x}{(S_x)^2} = k_1(x,i) \tag{22}$$

mit dem Alter x, mit dem Zinsfusse i und mit der Ausscheideordnung l_{x+t} nur wenig ändert und deshalb $k_1(x,i)$ als Konstante betrachtet werden kann. Der Wert dieser Konstante wird von verschiedenen Autoren meistens mit 0.84 angenommen. Die Poukkasche Formel wollen wir generalisieren, wie folgt

$$\frac{S_x^{(n+1)} S_x^{(n-1)}}{(S_x^{(n)})^2} = k_n(x,i)\,. \tag{23}$$

Mit der neuen Funktion $M_n v^n$ können leicht die Grenzwerte von $k_n(x,i)$ bestimmt werden. Dabei betrachten wir $k_n(x,i)$ als eine kontinuierliche Funktion von n, jedoch nur im Bereiche $0 \leqslant n \leqslant \infty$, denn im Falle $n < 0$ kann der Wert einer oder mehrerer Summen der diskontierten Zahlen in (23) negativ ausfallen, wie wir eingangs erwähnt haben, obwohl alle D_{x+t} in der Versicherungspraxis nur positiv sein können. Unter dieser Voraussetzung ist stets $k_n(x,i) > 0$.

Zunächst erhöhen wir in (23) das Alter x um eine Einheit, damit wir die generalisierte Poukkasche Formel gemäss (2) als Funktion von M_n ausdrücken können.

$$\frac{S_{x+1}^{(n+1)} S_{x+1}^{(n-1)}}{(S_{x+1}^{(n)})^2} = \frac{n}{n+1} \, \frac{M_{n+1} M_{n-1}}{M_n^2} = k_n(x+1,i) = k_n\,.$$

Daraus folgt
$$\frac{M_{n+1} M_{n-1}}{M_n^2} = \frac{n+1}{n} k_n = h_n \tag{24}$$

oder

$$h_n = \frac{M_{n+1} v^{n+1} M_{n-1} v^{n-1}}{(M_n v^n)^2}\,. \tag{25}$$

Die Grenzwerte von h_n in bezug auf n und i ergeben sich aus den Gleichungen

$$\frac{d h_n}{dn} = 0\,, \qquad \frac{d h_n}{di} = 0\,.$$

Da das Argument n in der Funktion $M_n v^n$ unter anderem auch als Faktorielle auftritt (7), können wir nicht h_n nach n differenzieren. Diese Schwierigkeit kann aber leicht umgangen werden. Die erste Ableitung von h_n nach i kann geschrieben werden

$$\frac{dh_n}{di} = (h_{n+1} h_n - 2h_n + 1) \frac{M_{n+1} v^{n+1}}{M_n v^n}.$$

Die Bedingung für das Bestehen eines Grenzwertes von h_n in bezug auf i ist also gegeben durch die Differenzengleichung

$$h_{n+1} h_n - 2h_n + 1 = 0, \tag{26}$$

welche nicht nur vom Alter und der Ausscheideordnung, sondern auch vom Zinsfusse frei ist. Die aus ihr hergeleiteten Grenzwerte gelten also für alle Alter x, für alle Ausscheideordnungen l_{x+t} und für alle Zinsfüsse i. Die Ableitung von h_n nach n, welche rechnerisch undurchführbar ist, wie wir oben bemerkt haben, ist nun überflüssig geworden, da wir die Grenzwerte vom h_n in bezug auf n aus der Differenzengleichung (26) leicht herleiten können. Die vollständige Lösung von (26) lautet

$$h_n = 1 + \frac{1}{n + c}, \tag{27}$$

wo c die Summationskonstante bedeutet, welche wir so bestimmen wollen, dass h_n in bezug auf n die Grenzwerte darstellen wird. Vorweg bemerken wir, dass h_n (27) eine kontinuierliche Funktion von n ist, und zwar eine gleichseitige Hyperbel mit den Asymptoten $h_n - 1 = 0$ und $n + c = 0$.

Die untere Grenze von h_n finden wir offensichtlich so, dass wir in (27) $c = \infty$ setzen, also

$$1 < h_n. \tag{28}$$

$$\frac{n}{n+1} < k_n. \tag{29}$$

Die untere Grenze (28) bzw. (29) gilt für alle Ausscheideordnungen gleichwohl, ob sie abnehmend, zunehmend, konstant oder gemischt sind, jedoch unter der Bedingung, dass $n \geqslant 0$ und zugleich alle $D_{x+t} \geqslant 0$. Nur wenn $n < 0$ oder wenn einzelne $D_{x+t} < 0$, gelten obige Grenzwerte nicht. In diesem Falle gibt es überhaupt kein allgemein gültiges Minimum von k_n und h_n.

Für abnehmende Ausscheideordnungen (Absterbeordnungen) kann eine strengere untere Grenze gezogen werden. Im höchsten Alter ω ist

$$k_n(\omega, i) = \frac{S_\omega^{(n+1)} S_\omega^{(n-1)}}{(S_\omega^{(n)})^2} = \frac{D_\omega D_\omega}{(D_\omega)^2} = 1 .$$

Infolgedessen muss $k_n(x, i) \sim 1$ sein, wenn D_x gross ist, die folgenden D_{x+t} als auch ihre iterierten Summen dagegen im Vergleiche zu D_x verhältnismässig klein sind. Daraus schliessen wir, dass k_n bei starkem Gefälle der diskontierten Zahlen gross, bei schwachem Gefälle dagegen klein sein muss. Die strengere untere Grenze von k_n für abnehmende Ausscheideordnungen findet man also aus der Annahme D_{x+t} = konstant, d. h. es gibt keine Verzinsung und keine Ausscheidung. Für solche konstante Ausscheideordnungen haben wir gemäss (1) und (23)

$$k_n(x, i) = \frac{\sum_{t=0}^{\omega-x} \binom{n+1+t}{n+1} \sum_{t=0}^{\omega-x} \binom{n-1+t}{n-1}}{\left[\sum_{t=0}^{\omega-x} \binom{n+t}{n}\right]^2}$$

$$= \frac{\binom{n+2+\omega-x}{n+2} \binom{n+\omega-x}{n}}{\binom{n+1+\omega-x}{n+1}^2}$$

$$= \frac{n+1}{n+2}\left(1 + \frac{1}{n+1+\omega-x}\right). \tag{30}$$

Die strengere untere Grenze (30) ist eine Funktion nicht nur von n, sondern auch vom Alter x und ω. Sie hat keine Beziehung zur Differenzengleichung (26). Für die in der Lebensversicherung üblichen Alter x ist der Wert des Bruches in (30) rechts von nicht allzugrosser Bedeutung und kann weggelassen werden. Die Formel (30) büsst so ein wenig an der Strenge ein, sie wird aber dadurch viel einfacher. Für abnehmende und konstante Ausscheideordnungen haben wir also folgende nur von n abhängige untere Grenze

$$\frac{n+1}{n+2} < k_n . \tag{31}$$

$$\frac{(n+1)^2}{n(n+2)} < h_n . \tag{32}$$

Eine obere Grenze von k_n bzw. h_n existiert gar nicht. Wenn wir nämlich in (27) die Konstante $c = -n$ setzen, dann ist $h_n = \infty$ und damit auch $k_n = \infty$. Dies ist allerdings eine sonderbare, paradoxe Tatsache, weil Poukka selbst als auch zahlreiche andere Autoren nach ihm k_n, speziell k_1 als eine Grösse betrachteten, die sich nur wenig in bezug auf x, i, l_{x+t} ändert und deshalb praktisch als Konstante angenommen werden kann.

Dass es tatsächlich keine obere Grenze von k_n und h_n gibt, wollen wir noch auf eine andere Art zeigen. Nehmen wir folgende Ausscheideordnung

$$D_x = 1\,,$$
$$D_{x+1} = D_{x+2} = D_{x+3} = \ldots = D_{x+m} = \varepsilon\,,$$

wo ε eine kleine positive Zahl darstellt. In diesem Falle haben wir

$$N_x = 1 + m\varepsilon\,,$$
$$S_x = 1 + \left[m + \binom{m+1}{2}\right]\varepsilon\,,$$
$$S_x^{(2)} = 1 + \left[m + \binom{m+1}{2} + \binom{m+2}{3}\right]\varepsilon\,.$$

Also

$$k_1 = \frac{S_x^{(2)} N_x}{(S_x)^2} = \frac{1 + \dfrac{17m + 6m^2 + m^3}{6}\,\varepsilon + \dfrac{11m^2 + 6m^3 + m^4}{6}\,\varepsilon^2}{1 + (3m + m^2)\,\varepsilon + \dfrac{9m^2 + 6m^3 + m^4}{4}\,\varepsilon^2}\,. \qquad (33)$$

Wenn wir in (33) setzen

$$m = 6 \cdot 10^{10}, \quad 6 \cdot 10^{20}, \quad \ldots$$
$$\varepsilon = 10^{-20}, \quad 10^{-40}, \quad \ldots,$$

dann bekommen wir $k_1 \sim 10^9, \quad 10^{19}, \quad \ldots .$

Für noch grössere m und noch kleinere positive ε liefert (33) noch grössere Werte von k_1. Bei sehr kleinem ε und entsprechend grossem m sind in (33) die Glieder von ε massgebend. Das Glied von ε im

Zähler (33) ist ein Polynom der dritten, im Nenner dagegen nur der zweiten Potenz von m. Ähnliche Situation haben wir auch bei analogen Formeln für k_2, k_3, k_4 usw. Eine obere Grenze von k_n und h_n existiert theoretisch tatsächlich nicht.

In der Versicherungspraxis kommen solche «anormale» Ausscheideordnungen selbstverständlich gar nicht vor. Für den Bedarf der Versicherungspraxis können auch obere Grenzen von k_n und h_n festgesetzt werden, welche jedoch zum Teil mit gewissen Reserven zu nehmen sind.

Wir haben schon gesagt, dass bei zunehmenden Ausscheideordnungen die Werte von k_n kleiner sind als bei abnehmenden Ausscheideordnungen. Den grössten Wert von k_n bei zunehmenden Ausscheideordnungen haben wir im Schlussalter ω, nämlich

$$k_n(\omega, i) = 1 .$$

Die obere Grenze von k_n und h_n bei zunehmenden Ausscheideordnungen ist in jedem Falle

$$k_n \leqslant 1 . \tag{34}$$

$$h_n \leqslant \frac{n+1}{n} . \tag{35}$$

Den Wert in (35) findet man auch so, dass man in (27) die Konstante $c = 0$ setzt.

Bei abnehmenden Ausscheideordnungen sind die Werte von k_n verhältnismässig gross. Aber auch bei diesen Ausscheideordnungen kommt es in der Praxis nur selten vor, dass $k_n > 1$ wird, so dass man (34) und (35) im allgemeinen auch bei abnehmenden Ausscheideordnungen als obere Grenze betrachten kann, jedoch mit gewissen Ausnahmen, welche nur bei sehr starkem Gefälle der diskontierten Zahlen auftreten können. So z. B. ist die Sterblichkeit in den ersten Altersjahren gross, das Gefälle der diskontierten Zahlen $D_0, D_1, D_2, \ldots$ stark, und so kann es vorkommen, dass $k_0(0, i) > 1$. Ähnlich ist die Sterblichkeit der Invaliden im niedrigsten Produktivalter von 15—25 Jahren gross, das Gefälle der diskontierten Zahlen D_{15}^{ii}, D_{16}^{ii}, $D_{17}^{ii}, \ldots$ stark, und so kann es auch hier vorkommen, dass $k_0 > 1$, $k_1 > 1$ usw.

Unsere Ausführungen wollen wir nun übersichtshalber kurz zusammenfassen.

Bei *zunehmenden* Ausscheideordnungen sind die Grenzwerte von k_n und h_n ohne Ausnahme

$$\frac{n}{n+1} < k_n \leqslant 1. \tag{36}$$

$$1 < h_n \leqslant \frac{n+1}{n}. \tag{37}$$

Bei *abnehmenden* Ausscheideordnungen haben wir folgende ohne Ausnahme gültige untere Grenze, wogegen die obere Grenze bei sehr starkem Gefälle der diskontierten Zahlen problematisch werden kann.

$$\frac{n+1}{n+2} < k_n \leqslant 1\,(?) \tag{38}$$

$$\frac{(n+1)^2}{n(n+2)} < h_n \leqslant \frac{n+1}{n}\,(?) \tag{39}$$

Bei der oberen Grenze (38) bzw. (39) ist also Vorsicht geboten. Deshalb haben wir das Fragezeichen (?) dazugeschrieben.

Wir bemerken noch, dass hohe Zinsfüsse eine stärkere Diskontierung und damit ein stärkeres Gefälle von D_{x+t} zur Folge haben. Infolgedessen wird die obere Grenze bei hohen Zinsfüssen öfter und tiefer überschritten wie bei niedrigen Zinsfüssen.

6. Integration der generalisierten Poukkaschen Funktion

Die in der generalisierten Poukkaschen Formel (23) erscheinenden Summen der diskontierten Zahlen haben wir mittels (2) durch die neue Funktion $M_n v^n$ ersetzt und so die Gleichung (25) erhalten, welche eine homogene quadratische Differentialgleichung $(n+1)$-ter Ordnung darstellt.

Die Grösse h_n in (25) ist eine Funktion des Zinsfusses i, denn nur an den Grenzen (27) ist h_n unabhängig von i, sonst aber nicht. Bei der Integration von (25) müsste daher, streng genommen, die funktionelle Abhängigkeit der Grösse h_n von i berücksichtigt werden. In diesem Falle stellt das vollständige Integral von (25) den exakten Wert $M_0 = a_x(i)$ dar, d. h. bei Kenntnis der Funktion $h_n = h_n(i)$ ist es möglich, aus der generalisierten Poukkaschen Formel den Barwert der gleichbleibenden lebenslänglichen Leibrente $a_x(i)$ exakt zu berechnen. Wir kennen aber die Funktion $h_n(i)$ nicht, welche übrigens auch vom Alter x als auch von der Ausscheideordnung l_{x+t} abhängt. Wir kennen nur ihre untere und obere Grenze (37) bzw. (39). Mit Rücksicht auf die schmale Spannung zwischen der unteren und der oberen Grenze wollen wir h_n bei der Integration von (25) als Konstante betrachten. Das vollständige Integral von (25) wird deshalb nur einen Näherungswert von $a_x(i)$ darstellen, welchen wir mit $a_{(n)}$ bezeichnen wollen.

Die Gleichung (25) können wir schreiben

$$\frac{M_{n+1} v^{n+1}}{(M_n v^n)^2} M_{n-1} v^{n-1} = h_n .$$

Daraus findet man mittels teilweiser Integration

$$-\frac{M_{n-1} v^{n-1}}{M_n v^n} + i = -A + h_n i ,$$

oder

$$\frac{M_n v^n}{M_{n-1} v^{n-1}} = \frac{1}{A + (1 - h_n) i} .$$

Nach weiteren Integrationen findet man der Reihe nach

$$M_{n-1} v^{n-1} = (A + Bi)^{\frac{1}{1-h_n}} ,$$

$$M_{n-2} v^{n-2} = C + (A + Bi)^{\frac{2-h_n}{1-h_n}} ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{(n)} = \sum_{\nu=0}^{n-2} C_\nu i^\nu + (A + Bi)^{\frac{n-(n-1)h_n}{1-h_n}} . \qquad (40)$$

Die Integrationskonstanten A, B, C_0, C_1, ... C_{n-2} können durch Anfangswerte, welche uns zur Verfügung stehen, bestimmt werden.

Aus (40) kann auch die Grösse des Fehlers abgeschätzt werden, welchen wir begangen haben, indem wir bei der Integration h_n als Konstante betrachtet haben, und zwar so, dass man einmal die untere, das zweitemal die obere Grenze von h_n in (40) einsetzt.

Man kann zeigen, dass in (40) die meisten und darunter die besten bisher bekannten Näherungsformeln von a_x als Spezialfälle enthalten sind [1]). Wenn wir z. B. in (40) $h_n = 0$ setzen, bekommen wir für $a_{(n)}$ einen Polynom n-ten Grades von i, welchen wir schreiben können

$$a_{(n)} = C_0 + C_1 i + C_2 i^2 + \ldots + C_n i^n, \tag{41}$$

das ist aber nichts anderes als die Taylorsche Reihe des Rentenbarwertes $a_x(i)$ (17), welche beim Gliede i^n abgebrochen ist. In (40) ist also auch die Taylorsche Reihe von a_x als Spezialfall enthalten. Die Präzision der gekürzten Taylorschen Reihe (41) lässt übrigens zu wünschen übrig, weil $h_n = 0$ entschieden zu klein genommen ist.

Bei der Integration der Differentialgleichung (25) haben wir stillschweigend n für eine ganze positive Zahl angenommen. Es kann aber n auch eine nicht ganze positive Zahl sein. In diesem Falle ist das Endresultat der Integration der generalisierten Poukkaschen Funktion ein Näherungswert von $M_\varepsilon v^\varepsilon$, wo $0 < \varepsilon < 1$. Es ist also möglich, Näherungsformeln auch für die Berechnung der Summen der diskontierten Zahlen $S_x^{(\varepsilon)}$ aufzustellen.

7. Pensionsversicherung

Unsere Ausführungen gelten selbstverständlich auch für die Ausscheideordnungen der Aktiven und für die Absterbeordnungen der Invaliden, Witwen, Waisen, Aszendenten und Deszendenten in der Pensionsversicherung. Bezüglich der Anwartschaften der Aktiven auf Invalidenrente, weiters bezüglich der Anwartschaften der Aktiven und Invaliden auf Witwen-, Waisen-, Aszendenten- und Deszendentenrenten sind noch einige Erklärungen notwendig.

Zur Vereinfachung der Rechnung suponieren wir, dass die Invalidenrente erst am Ende des Jahres, in welchem die Invalidität eingetreten ist, flüssig wird. Der Wert der Anwartschaft eines x-jährigen Aktiven auf Invalidenrente ist somit

---

[1]) Siehe Autors Abhandlung «Das Zinsfussproblem», Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, 47. Band, Heft 1, 1947, S. 167–247.

$$a_x^{ai} = \frac{1}{D_x^{aa}} \sum_{t=1}^{\omega-x} D_{x+t}^{ai}$$

$$= \frac{1}{l_x^{aa}} \sum_{t=1}^{\omega-x} (l_{x+t-1}^{aa}\, i_{x+t-1}\, \mathrm{a}_{x+t}^{ii})\, v^t$$

$$= \frac{1}{l_x^{aa}} \sum_{t=1}^{\omega-x} \lambda_{x+t}\, (1+i)^{-t}.$$

Dabei bedeutet

l_x^{aa} = die Zahl der Aktiven im Alter x in der Tafel der Ausscheideordnung der Aktiven;

i_x = die einjährige Wahrscheinlichkeit eines x-jährigen Aktiven, invalid zu werden und als Invalide das Alter von $(x+1)$ Jahren zu erreichen;

a_x^{ii} = der Barwert der vorschüssigen lebenslänglichen konstanten Leibrente des Invaliden.

Die Grösse
$$\lambda_{x+t} = l_{x+t-1}^{aa}\, i_{x+t-1}\, \mathrm{a}_{x+t}^{ii}$$
ist eine Funktion des Zinsfusses i, mit welchem der Wert a_{x+t}^{ii} berechnet ist, was bei der Differentiation der Gleichung (7) berücksichtigt werden muss. Die Formel (8) gilt also in diesem Falle nicht. Dieses Hindernis der Anwendung der Funktion $M_n v^n$ im Gebiete der Anwartschaften kann jedoch leicht umgangen werden.

Bezeichnen wir mit I_{x+t} die Zahl der Invaliden, welche sich aus der Gesamtheit der Aktiven l_x^{aa} im Laufe von t Jahren rekrutiert haben und welche das Alter von $(x+t)$ Jahren erreicht haben. Der Wert der Anwartschaft eines x-jährigen Aktiven auf Invalidenrente kann also auch geschrieben werden

$$a_x^{ai} = \frac{1}{l_x^{aa}} \sum_{t=1}^{\omega-x} I_{x+t}\, (1+i)^{-t}.$$

Die Grösse I_{x+t} ist aber keine Funktion des Zinsfusses. Auf dieselbe Art und Weise kann der Wert aller anderen in der Pensionsversicherung vorkommenden Anwartschaften berechnet werden. Dadurch ist die Möglichkeit geschaffen, die neue Funktion $M_n v^n$ auch in der gesamten Pensionsversicherung anwenden zu können. So z. B. ist gemäss (9)

$$\frac{d\, a_x^{ai}}{d i} = -v (I\, a^{ai})_x. \tag{42}$$

Zu beachten ist, dass die Grösse $(Ia^{ai})_x$ in (42) den Wert der Anwartschaft auf steigende Leistungen bedeutet, welche allen Invaliden ohne Rücksicht, wann die Invalidität eingetreten ist, im gleichen Betrage gezahlt werden. So z. B. bekommen die Invaliden aus dem ersten Versicherungsjahre die Rente 1, 2, 3, 4, 5 usw., die aus dem zweiten Versicherungsjahre 2, 3, 4, 5 usw., die aus dem dritten Versicherungsjahre 3, 4, 5 usw. usw. Es ist also

$$(Ia^{ai})_x > \frac{\sum\limits_{t=1}^{\omega-x} \binom{t}{1} D^{ai}_{x+t}}{D^{aa}_x}.$$

Nach den Vorschriften der Pensionsversicherungsgesetze wird aber die Höhe der Invalidenrente mit Rücksicht auf die Dauer der Pensionsversicherung vor dem Eintritte der Invalidität bestimmt, nachher bleibt aber die Invalidenrente konstant, d. h. die Invaliden aus dem ersten Versicherungsjahre bekommen die gleichbleibende Rente im Betrage 1, die aus dem zweiten Versicherungsjahre bekommen die gleichbleibende Rente im Betrage 2, die aus dem dritten Versicherungsjahre bekommen die gleichbleibende Rente im Betrage 3 usw. usw. Ganz dasselbe gilt auch für die Witwen-, Waisen-, Aszendenten- und Deszendentenrenten.

Die Grenzwerte von k_n und h_n, welche übrigens vom Zinsfusse unabhängig sind, wie wir oben gezeigt haben, gelten selbstverständlich auch bei den Anwartschaften, denn jede Anwartschaft kann auch mittels einer vom Zinsfusse unabhängigen Ausscheideordnung l_{x+t} berechnet werden. Nachdem die diskontierten Zahlen, mit welchen die Anwartschaften berechnet werden, in niedrigen Altern rasch zunehmen, in höheren Altern aber langsam abnehmen, sind bei den Anwartschaften die Grenzen von k_n und h_n (36) bzw. (37), d. i.

$$\frac{n}{n+1} < k_x \leqslant 1,$$

$$1 < h_n \leqslant \frac{n+1}{n}.$$

Bis jetzt sind wenigstens unseres Wissens die Poukkaschen Zahlen nur für Absterbeordnungen der Versicherten und der Bevölkerung berechnet bzw. veröffentlicht worden. In der folgenden Tafel geben wir die Werte von k_1 für die Ausscheideordnung der Aktiven k_1^{aa}, für die Absterbeordnung der Invaliden k_1^{ii}, für die Anwartschaften der Aktiven auf Invalidenrente k_1^{ai}, auf Witwenrente k_1^{aw} und auf Waisenrente bis zum erreichten 18. Lebensjahre k_1^{ak}, berechnet mit den Rechnungsgrundlagen der jugoslawischen Pensionsversicherung, und zwar für die Zinsfüsse $i = 0\%$, 1%, 2%, 3%, 4%, 5%, 6% und für die Alter $x = 16, 21, 26, 31, \ldots 76, 81$, um dadurch unsere theoretischen Ausführungen mit konkreten rechnerischen Resultaten zu begründen.

Die Tafel

der Poukkaschen Zahlen $k_1(x,i)$, berechnet mit den Rechnungsgrundlagen der jugoslawischen Pensionsversicherung

$$k_1^{aa}(x,i) = \frac{S_x^{aa(2)}\, N_x^{aa}}{(S_x^{aa})^2}$$

x \ i	0%	1%	2%	3%	4%	5%	6%	i / x
16	0.72	0.75	0.77	0.80	0.82	0.84	0.86	16
21	0.73	0.75	0.77	0.79	0.81	0.83	0.85	21
26	0.73	0.75	0.77	0.79	0.81	0.83	0.85	26
31	0.74	0.76	0.78	0.79	0.81	0.82	0.84	31
36	0.75	0.77	0.78	0.80	0.81	0.82	0.84	36
41	0.77	0.78	0.79	0.81	0.82	0.83	0.84	41
46	0.79	0.80	0.81	0.82	0.83	0.84	0.85	46
51	0.82	0.83	0.83	0.84	0.85	0.85	0.86	51
56	0.86	0.86	0.87	0.87	0.88	0.88	0.89	56
61	0.89	0.90	0.90	0.91	0.91	0.92	0.92	61
66	0.91	0.91	0.92	0.92	0.92	0.93	0.93	66
71	0.93	0.93	0.93	0.93	0.94	0.94	0.94	71
76	0.93	0.93	0.93	0.94	0.94	0.94	0.94	76
81	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	81

$$k_1^{ii}(x,i) = \frac{S_x^{ii(2)}\,N_x^{ii}}{(S_x^{ii})^2}$$

x \ i	0%	1%	2%	3%	4%	5%	6%	i / x
16	1.01	1.05	1.09	1.12	1.13	1.14	1.14	16
21	0.90	0.94	0.97	1.00	1.03	1.04	1.05	21
26	0.84	0.88	0.91	0.93	0.95	0.97	0.98	26
31	0.82	0.85	0.87	0.89	0.91	0.93	0.95	31
36	0.81	0.83	0.85	0.87	0.89	0.91	0.92	36
41	0.80	0.82	0.84	0.86	0.88	0.89	0.91	41
46	0.80	0.82	0.83	0.85	0.87	0.88	0.89	46
51	0.80	0.82	0.83	0.85	0.86	0.87	0.88	51
56	0.80	0.82	0.83	0.84	0.85	0.87	0.88	56
61	0.81	0.83	0.84	0.85	0.86	0.87	0.87	61
66	0.83	0.84	0.85	0.86	0.87	0.87	0.88	66
71	0.85	0.86	0.87	0.87	0.88	0.89	0.89	71
76	0.88	0.89	0.89	0.90	0.90	0.91	0.91	76
81	0.89	0.89	0.90	0.90	0.91	0.91	0.91	81

$$k_1^{ai}(x,i) = \frac{S_x^{ai(2)}\,N_x^{ai}}{(S_x^{ai})^2}$$

x \ i	0%	1%	2%	3%	4%	5%	6%	i / x
16	0.57	0.57	0.58	0.59	0.60	0.61	0.62	16
21	0.58	0.59	0.60	0.61	0.62	0.63	0.65	21
26	0.60	0.61	0.62	0.63	0.64	0.65	0.67	26
31	0.62	0.62	0.63	0.64	0.66	0.67	0.68	31
36	0.64	0.64	0.66	0.66	0.67	0.68	0.69	36
41	0.66	0.67	0.68	0.68	0.69	0.70	0.71	41
46	0.70	0.70	0.71	0.72	0.72	0.73	0.74	46
51	0.73	0.74	0.75	0.75	0.76	0.76	0.77	51
56	0.80	0.80	0.81	0.81	0.81	0.82	0.82	56
61	0.88	0.88	0.89	0.89	0.89	0.90	0.90	61
66	0.91	0.91	0.92	0.92	0.92	0.92	0.93	66
71	0.93	0.93	0.93	0.93	0.93	0.94	0.94	71
76	0.93	0.93	0.93	0.93	0.94	0.94	0.94	76
81	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	81

$$k_1^{aw}(x,i) = \frac{S_{x(y)}^{a(2)} N_{x(y)}^a}{(S_{x(y)}^a)^2}$$

x \ i	0%	1%	2%	3%	4%	5 %	6%	i / x
16	0.58	0.58	0.59	0.59	0.60	0.61	0.62	16
21	0.60	0.61	0.61	0.62	0.63	0.65	0.66	21
26	0.62	0.63	0.64	0.65	0.66	0.68	0.69	26
31	0.64	0.65	0.66	0.67	0.68	0.69	0.70	31
36	0.66	0.66	0.67	0.68	0.69	0.70	0.71	36
41	0.68	0.69	0.69	0.70	0.71	0.72	0.73	41
46	0.71	0.72	0.72	0.73	0.74	0.75	0.75	46
51	0.75	0.75	0.76	0.76	0.77	0.77	0.78	51
56	0.80	0.81	0.81	0.82	0.82	0.82	0.83	56
61	0.88	0.88	0.88	0.89	0.89	0.89	0.90	61
66	0.91	0.91	0.92	0.92	0.92	0.92	0.93	66
71	0.92	0.92	0.92	0.92	0.93	0.93	0.93	71
76	0.93	0.94	0.94	0.94	0.94	0.94	0.94	76
81	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	81

$$k_1^{ak}(x,i) = \frac{S_{x(z)}^{a(2)} N_{x(z)}^a}{(S_{x(z)}^a)^2}$$

x \ i	0%	1%	2%	3%	4%	5%	6%	i / x
16	0.59	0.60	0.60	0.61	0.61	0.61	0.62	16
21	0.63	0.63	0.64	0.65	0.66	0.66	0.67	21
26	0.66	0.67	0.68	0.70	0.71	0.72	0.73	26
31	0.69	0.71	0.72	0.73	0.74	0.75	0.77	31
36	0.73	0.73	0.75	0.76	0.77	0.78	0.79	36
41	0.75	0.76	0.77	0.78	0.80	0.81	0.82	41
46	0.78	0.79	0.80	0.81	0.81	0.82	0.83	46
51	0.80	0.81	0.82	0.83	0.84	0.84	0.85	51
56	0.84	0.85	0.86	0.86	0.87	0.87	0.88	56
61	0.89	0.89	0.90	0.90	0.90	0.91	0.91	61
66	0.91	0.92	0.92	0.92	0.93	0.93	0.93	66
71	0.92	0.92	0.92	0.92	0.92	0.92	0.92	71
76	0.96	0.96	0.96	0.96	0.96	0.96	0.96	76
81	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	81