Eine Bemerkung zum Zinsfussproblem

Von *E. Rufener*, Zürich

In seiner «Kleinen Bemerkung zum Zinsfussproblem» [1] hat Hadwiger die Universallösung des Zinsfussproblems für den Leibrentenbarwert gegeben. Ausgehend von der Differentialgleichung des Rentenbarwertes hat er eine zinsinvariante Differentialform konstruiert, die zur Integraldarstellung der Lösung führt. Bemerkenswerte Folgerungen hat Spring in seinen «Analytischen Betrachtungen zur Änderung des Rechnungszinsfusses und der Sterbetafel bei Versicherungswerten» [2] gezogen. Beide Arbeiten setzen die kontinuierliche Betrachtungsweise voraus.

In der vorliegenden Note wollen wir zeigen, dass eine formal analoge Darstellung der Universallösung für das Zinsfussproblem richtig ist, wenn die Versicherungswerte auf diskontinuierliche Art erklärt werden. An Stelle der Differentialgleichung tritt die Differenzengleichung, deren Lösungstheorie herangezogen wird.

1. Die Rekursionsformel für den allgemeinen Rentenbarwert

In der Darstellungsformel für die allgemeine Barwertfunktion

$$y(x,v) = \sum_{t=0}^{\infty} R(x+t) \frac{\Phi(x+t)}{\Phi(x)} v^t \tag{1}$$

bezeichne $\Phi(x)$ die Ausscheideordnung der versicherten Gesamtheit,

$$\Phi(x) \geqslant 0, \quad x \geqslant 0;$$

v den Abzinsungsfaktor und $R(x+t)$ eine die Leistungen des Versicherers charakterisierende Grösse.

Für $y(x+1,v)$ finden wir aus

$$y(x+1,v) = \sum_{t=0}^{\infty} R(x+t+1) \frac{\Phi(x+t+1)}{\Phi(x+1)} v^t = \frac{1}{v} \frac{\Phi(x)}{\Phi(x+1)} \sum_{t=1}^{\infty} R(x+t) \frac{\Phi(x+t)}{\Phi(x)} v^t$$

zunächst die Rekursion

$$y(x+1,v) = \frac{1}{v} \frac{\Phi(x)}{\Phi(x+1)} \left\{ y(x,v) - R(x) \right\}, \tag{2}$$

und aus ihr eine in v invariante Differenzenform

$$\frac{y(x,v) - R(x)}{v\, y(x+1,v)} = \frac{\Phi(x+1)}{\Phi(x)} = p(x). \tag{3}$$

Formel (3) stellt gewissermassen die Inversion des Leibrentenproblems dar; als lineare homogene Differenzengleichung erster Ordnung ermöglicht sie in ihrer Lösung die Darstellung der Ausscheideordnung $\Phi(x)$ durch die Barwertfunktion.

2. Eine Lösung des Zinsfussproblems

Eine Lösung wird erhalten, wenn in

$$y(x,v) = \sum_{\nu=0}^{\infty} R(x+\nu) \frac{\Phi(x+\nu)}{\Phi(x)} v^\nu$$

$\dfrac{\Phi(x+\nu)}{\Phi(x)}$ mit Hilfe der zinsinvarianten Form (3) durch die Barwertfunktion $y(x,v_0) = y_0(x)$ ausgedrückt wird:

$$\frac{\Phi(x+\nu)}{\Phi(x)} = \prod_{\lambda=0}^{\nu-1} \frac{\Phi(x+\lambda+1)}{\Phi(x+\lambda)} = \prod_{\lambda=0}^{\nu-1} \frac{y_0(x+\lambda) - R(x+\lambda)}{v_0\, y_0(x+\lambda+1)}, \tag{4}$$

mithin

$$y(x,v) = \sum_{\nu=0}^{\infty} R(x+\nu) \left(\frac{v}{v_0}\right)^\nu \prod_{\lambda=0}^{\nu-1} \frac{y_0(x+\lambda) - R(x+\lambda)}{y_0(x+\lambda+1)} \tag{5}$$

wird. In (5) ist $y(x,v)$ unabhängig von der Ausscheideordnung und stellt somit eine Universallösung dar (*Existenz* der Universallösung). Wir zeigen, dass bei geeigneter Anfangsvoraussetzung über $y(x,v)$ es auch die einzige ist (Eindeutigkeit der Lösung).

3. Die Differenzengleichung des Zinsfussproblems

Zu einem Anfangswert v_0 sei die Barwertfunktion

$$y(x,v_0) = y_0(x)$$

bekannt. Wegen der Zinsunabhängigkeit der Form (3) folgt, wenn noch

$$y(x,v) = y(x)$$

gesetzt wird

$$\frac{y(x) - R(x)}{v\, y(x+1)} = \frac{y_0(x) - R(x)}{v_0\, y_0(x+1)}$$

und hieraus ergibt sich

$$y(x+1) - \frac{v_0}{v} \frac{y_0(x+1)}{y_0(x) - R(x)} y(x) = -\frac{v_0}{v} \frac{y_0(x+1)}{y_0(x) - R(x)} R(x) \qquad (6)$$

eine lineare inhomogene Differenzengleichung erster Ordnung für die Funktion $y(x)$. Stellen wir an die Lösungsfunktion die für eine Barwertfunktion vernünftige Forderung, dass sie im Unendlichen verschwinde, so wird $y(x)$ eindeutig durch die Koeffizientenfunktionen bestimmt; $y(x)$ wird mithin unabhängig von $\Phi(x)$ und ist somit Universallösung.

4. Die Formel der Universallösung

Erklären wir das Symbol $\mathop{S}\limits_a^x f(\xi)\, \Delta\xi$ durch

$$\mathop{S}\limits_a^x f(\xi)\, \Delta\xi = \int_a^\infty f(\xi)\, d\xi - \sum_{\nu=0}^{\infty} f(x+\nu) \qquad (7)$$

wobei Integral und Summe nach demselben Summationsverfahren zu ermitteln sind, so führt die Lagrangesche Methode für die Auflösung der allgemeinen linearen inhomogenen Differenzengleichung erster Ordnung

$$y(x+1) + P(x)\, y(x) = Q(x)$$

auf die Lösung

$$y(x) = e^{\mathop{S}\limits_a^x \log[-P(\xi)]\, \Delta\xi} \left\{ \omega(x) + \mathop{S}\limits_a^x Q(\zeta)\, e^{-\mathop{S}\limits_a^{\zeta+1} \log[-P(\xi)]\, \Delta\xi}\, \Delta\zeta \right\}; \qquad (8)$$

$\omega(x) = \omega(x+1)$ ist eine beliebige periodische Funktion. Wir setzen $a = \infty$ und wählen in der Lösungsgesamtheit die einzige im Unendlichen verschwindende Lösung; für sie ist $\omega(x) \equiv 0$:

$$y(x) = e^{\overset{x}{\underset{\infty}{S}} \log[-P(\xi)]\, \Delta\xi} \overset{x}{\underset{\infty}{S}} Q(\zeta)\, e^{-\overset{\zeta+1}{\underset{\infty}{S}} \log[-P(\xi)]\, \Delta\xi}\, \Delta\zeta \tag{9}$$

und nach Auflösung der Symbole

$$y(x) = -\sum_{\nu=0}^{\infty} Q(x+\nu)\, e^{-\sum\limits_{\lambda=0}^{\nu} \log[-P(x+\lambda)]} = -\sum_{\nu=x}^{\infty} Q(\nu)\, e^{-\sum\limits_{\lambda=x}^{\nu} \log[-P(\lambda)]}, \tag{10}$$

oder

$$y(x) = -\sum_{\nu=0}^{\infty} Q(x+\nu) \prod_{\lambda=0}^{\nu} \frac{1}{-P(x+\lambda)} = -\sum_{\nu=x}^{\infty} Q(\nu) \prod_{\lambda=x}^{\nu} \frac{1}{-P(\lambda)}. \tag{11}$$

Mit den durch Gleichung (6) bestimmten Funktionen $P(x)$ und $Q(x)$ folgt nach (10) als Formel für die Universallösung

$$y(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} R(x+\nu) \frac{v_0}{v} \frac{y_0(x+\nu+1)}{y(x+\nu) - R(x+\nu)}\, e^{-\sum\limits_{\lambda=0}^{\nu} \log \frac{v_0}{v} \frac{y_0(x+\lambda+1)}{y_0(x+\lambda)-R(x+\lambda)}} \;{}^{*)} \tag{11'}$$

und nach (11)

$$y(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} R(x+\nu) \left(\frac{v}{v_0}\right)^{\nu} \prod_{\lambda=0}^{\nu-1} \frac{y_0(x+\lambda) - R(x+\lambda)}{y_0(x+\lambda+1)}. \tag{5}$$

Damit ist aber gezeigt, dass (5) einzige Universallösung des Zinsfussproblems ist. Existenz-, Eindeutigkeits- und Darstellungsfrage für das Zinsfussproblem der diskontinuierlich dargestellten Leibrente sind damit behandelt. Das Ergebnis lässt sich in folgendem Satz zusammenfassen:

---

*) Man vergleiche die von Hadwiger mitgeteilte Lösungsformel für das Zinsfussproblem in kontinuierlicher Darstellung

$$y(x) = \int_0^{\infty} R(x+\zeta) \frac{y_0(x)}{y_0(x+\zeta)}\, e^{-\int\limits_0^{\zeta} \left\{(\delta-\delta_0) + \frac{R(x+\xi)}{y_0(x+\xi)}\right\} d\xi}\, d\zeta.$$

Das Zinsfussproblem für die diskontinuierlich dargestellte Leibrente $R(x+t)$ hat genau *eine* universelle Lösung, d. h. es gibt eine einzige Lösungsfunktion, die den Leibrentenbarwert $y(x,v)$ als Funktion des gegebenen Anfangsverlaufes $y(x,v_0)$ unabhängig von der Absterbeordnung $\Phi(x)$ darstellt. (5) ist die Lösungsformel.

Literatur

[1] *H. Hadwiger:* Kleine Bemerkung zum Zinsfussproblem, M. V. S. V., Band 45, S. 31–35 (1945).

[2] *Osc. W. Spring:* Analytische Betrachtungen zur Änderung des Rechnungszinsfusses und der Sterbetafel bei Versicherungswerten, M. V. S. V., Band 50, S. 111–132 (1950).