Noch einige praktische Interpolationsformeln des Zinsfussproblemes von hoher Präzision

Noch einige praktische Interpolationsformeln des Zinsfussproblemes von hoher Präzision[1]

Von *Ivo Lah*, Ljubljana

Gegeben sind zwei Barwerte der konstanten nachschüssigen lebenslänglichen Leibrente zu Zinsfüssen $i_0 < i_1$, d. i.

$$a_x(i_0) = {}^0a \quad \text{und} \quad a_x(i_1) = {}^1a .$$

Aus diesen Barwerten kann man jeden anderen, dem Zinsfusse i entsprechenden Leibrentenbarwert

$$a_x(i) = a$$

mittels Interpolation bzw. Extrapolation näherungsweise bestimmen. Zwei Forderungen sind an diese Interpolations- bzw. Extrapolationsaufgabe gestellt:

1. Der Näherungswert muss möglichst genau sein.
2. Die Rechenarbeit soll minimal sein.

Wir wollen nun zeigen, dass man durch passende Kombinationen der üblichsten und der einfachsten Interpolationsformeln neue, ebenfalls sehr einfache Formeln herleiten kann, welche den gestellten Forderungen voll entsprechen. Wenn wir zur Vereinfachung der Schreibart

$$\frac{i - i_0}{i_1 - i_0} = \alpha \tag{1}$$

$$\frac{i_1 - i}{i_1 - i_0} = 1 - \alpha \tag{2}$$

setzen, dann können die üblichsten Interpolationsformeln geschrieben werden, wie folgt:

---

[1]) Diese Abhandlung ist eine Ergänzung bzw. Verallgemeinerung des Aufsatzes «Eine praktische Interpolationsformel des Zinsfussproblemes von hoher Präzision», Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, 51. Band, Heft 1, 30. April 1951, Seiten 91–100.

Das *arithmetische Mittel,* d. i. die lineare Interpolation der Rentenbarwerte

$$A = {}^0a(1-\alpha) + {}^1a\alpha. \tag{3}$$

Das *harmonische Mittel,* d. i. die lineare Interpolation der reziproken Rentenbarwerte

$$H = \frac{{}^0a\,{}^1a}{{}^0a\alpha + {}^1a(1-\alpha)}. \tag{4}$$

Das *geometrische Mittel,* d. i. die lineare Interpolation der Logarithmen der Rentenbarwerte

$$G = {}^0a^{1-\alpha}\,{}^1a^{\alpha}. \tag{5}$$

Das *antiharmonische Mittel,* d. i. die lineare Interpolation der Quadrate der Rentenbarwerte, dividiert durch das arithmetische Mittel

$$A' = \frac{{}^0a^2(1-\alpha) + {}^1a^2\alpha}{{}^0a(1-\alpha) + {}^1a\alpha}. \tag{6}$$

Es gibt selbstverständlich unendlich viele andere Interpolationsformeln, mit welchen wir uns jedoch in dieser Abhandlung nicht befassen werden. Mutatis mutandis können unsere Ausführungen auch auf dieselben angewendet werden.

Zunächst wollen wir ${}^0a$ und ${}^1a$ als Funktionen von a darstellen. Zu diesem Zwecke greifen wir zur Taylorschen Reihe des Rentenbarwertes ${}^0a$ in bezug auf a, welche bekanntlich lautet

$${}^0a = \frac{1}{D_x}\left[N_{x+1} + v(i-i_0)\,S_{x+1} + v^2(i-i_0)^2 S^{(2)}_{x+1} + v^3(i-i_0)^3 S^{(3)}_{x+1} + \ldots\right] \tag{7}$$

oder

$${}^0a = a\left[1 + v(i-i_0)\frac{S_{x+1}}{N_{x+1}} + v^2(i-i_0)^2\frac{S^{(2)}_{x+1}}{N_{x+1}} + v^3(i-i_0)^3\frac{S^{(3)}_{x+1}}{N_{x+1}} + \ldots\right]. \tag{8}$$

Aus der generalisierten Poukkaschen Formel

$$\frac{S^{(n+1)}_{x+1}\,S^{(n-1)}_{x+1}}{(S^{(n)}_{x+1})^2} = k_n(x+1, i) = k_n \tag{9}$$

folgt

$$\left.\begin{aligned}\frac{S^{(2)}_{x+1}}{N_{x+1}} &= k_1\left(\frac{S_{x+1}}{N_{x+1}}\right)^2\\ \frac{S^{(3)}_{x+1}}{N_{x+1}} &= k_1^2 k_2\left(\frac{S_{x+1}}{N_{x+1}}\right)^3\\ \frac{S^{(4)}_{x+1}}{N_{x+1}} &= k_1^3 k_2^2 k_3\left(\frac{S_{x+1}}{N_{x+1}}\right)^4\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Bei Ausscheideordnungen, bei welchen durchweg $l_x > l_{x+1}$, sind die Grenzwerte der Funktion k_n durch die Ungleichung

$$\frac{n+1}{n+2} < k_n \leqslant 1 \tag{11}$$

bestimmt. Nur bei sehr starkem Gefälle der diskontierten Zahlen D_x kann $k_n > 1$. Solche Fälle kommen jedoch recht selten vor, so dass wir von ihnen absehen können.

Wenn wir (10) in (8) einsetzen und der Kürze halber

$$v(i_1 - i_0)\frac{S_{x+1}}{N_{x+1}} = S \tag{12}$$

schreiben, bekommen wir

$${}^0a = a\left[1 + \alpha S + k_1\alpha^2 S^2 + k_1^2 k_2 \alpha^3 S^3 + \ldots\right]. \tag{13}$$

Auf dieselbe Art und Weise finden wir

$${}^1a = a\left[1 - (1-\alpha)S + k_1(1-\alpha)^2 S^2 - k_1^2 k_2 (1-\alpha)^3 S^3 + \ldots\right]. \tag{14}$$

Die Werte von ${}^0a$ (13) und ${}^1a$ (14) wollen wir nun in die Gleichungen (3) bis (6) einsetzen und der Kürze halber schreiben

$$\varphi = \alpha(1-\alpha) = \frac{(i-i_0)(i_1-i)}{(i_1-i_0)^2} \tag{15}$$

$$\psi = \alpha(1-\alpha)(2\alpha-1) = \frac{(i-i_0)(i_1-i)(2i-i_0-i_1)}{(i_1-i_0)^3}. \tag{16}$$

So bekommen wir:

$$\left.\begin{aligned} A &= a\left[1 + k_1 \varphi S^2 + k_1^2 k_2 \psi S^3 + \ldots\right] \\ H &= a\left[1 - (1 - k_1)\varphi S^2 + (1 - 2k_1 + k_1^2 k_2)\psi S^3 + \ldots\right] \\ G &= a\left[1 + (k_1 - \tfrac{1}{2})\varphi S^2 + (\tfrac{1}{3} - k_1 + k_1^2 k_2)\psi S^3 + \ldots\right] \\ A' &= a\left[1 + (1 + k_1)\varphi S^2 + (2k_1 + k_1^2 k_2)\psi S^3 + \ldots\right] \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

In den Näherungsformeln (17) fehlen die Glieder von S. Die Interpolationsfehler sind also durchweg der zweiten Ordnung der Kleinheit. Im Intervalle (i_0, i_1) ist φ positiv, ausserhalb dieses Intervalls ist es negativ, wie aus (15) ersichtlich ist. Gemäss (11) ist $\frac{2}{3} < k_1 \leqslant 1$. Meistens wird $k_1 = 0{\cdot}84$ genommen. Daraus folgt, dass im Intervalle (i_0, i_1) der Näherungswert von H zu klein, die Näherungswerte A, G, A' dagegen zu gross sind. Ausserhalb des Intervalls (i_0, i_1) ist gerade umgekehrt der Fall. Dem absoluten Betrage nach ist der Fehler von H am kleinsten, etwas grösser ist der absolute Fehler von G und am grössten ist er bei A'. Bei der Interpolation haben wir also

$$H < a < G < A < A' \quad (18)$$

bei der Extrapolation dagegen

$$H > a > G > A > A'. \quad (19)$$

Als zahlenmässiges Beispiel geben wir einige Resultate anhand der slowenischen Volkssterbetafel 1931–1933, männliches Geschlecht, und zwar für $x = 20$, $i_0 = 3\,\%$, $i = 4\,\%$, $i_1 = 5\,\%$, daher $\alpha = \frac{1}{2}$. Es ist

$$\left.\begin{aligned} {}^0a &= a_{20}(3\,\%)\ 22{\cdot}775 \\ a &= a_{20}(4\,\%)\ 19{\cdot}183 \\ {}^1a &= a_{20}(5\,\%)\ 16{\cdot}454 \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

Der Fehler bedeutet im folgenden die Differenz zwischen dem Näherungswerte und dem exakten Werte.

Tabelle 1

Näherungswert von $a_{20}(4\,\%)$	Der Fehler
$A = 19{\cdot}615$	$+\,0{\cdot}432$
$H = 19{\cdot}105$	$-\,0{\cdot}078$
$G = 19{\cdot}358$	$+\,0{\cdot}175$
$A' = 20{\cdot}124$	$+\,0{\cdot}941$

Die Formeln (17) ermöglichen die Abschätzung der Grösse des Interpolationsfehlers. Dazu sind jedoch die Werte von k_1 notwendig. So z. B. ist der Fehler von A

$$F_A \sim a k_1 \varphi S^2$$

oder

$${}^0a k_1 \varphi^0 S^2 > F_A > {}^1a k_1 \varphi^1 S^2$$

wo ${}^0S$ und ${}^1S$ aus (12) durch Umtausch von i mit i_0 bzw. mit i_1 berechnet werden. In unserem Beispiele haben wir

$$0{\cdot}633 > F_A > 0{\cdot}293\,.$$

Das ungewogene arithmetische Mittel beider Grenzwerte von F_A ist 0·463, wogegen der exakte Fehler nach der Tabelle 1 etwas weniger, nämlich 0·432 ausmacht. Der Fehler von H ist

$$F_H \sim -\frac{1-k_1}{k_1} F_A\,.$$

In unserem Falle haben wir

$$F_H \sim -\frac{0{\cdot}156}{0{\cdot}844}\, 0{\cdot}463 = -0{\cdot}086, \text{ anstatt exakt } -0{\cdot}078.$$

wie aus der Tabelle 1 ersichtlich ist. Usw. usw.

* * *

Je zwei Näherungsformeln in (17) können wir so kombinieren, dass in der Kombination das Glied von S^2 verschwindet. Wir bekommen so $\binom{4}{2} = 6$ neue genauere Interpolationsformeln. Zu diesem Zwecke schreiben wir:

$$\left.\begin{aligned}
(AH) &= A(1-k_1) + Hk_1 \\
(AG) &= A(1-2k_1) + 2Gk_1 \\
(AA') &= A(1+k_1) - A'k_1 \\
(HG) &= H(2k_1-1) + 2G(1-k_1) \\
(HA') &= H\frac{1+k_1}{2} + A'\frac{1-k_1}{2} \\
(GA') &= G\frac{2+2k_1}{3} + A'\frac{1-2k_1}{3}
\end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

So finden wir:

$$\left.\begin{aligned}
(AH) &= a\left[1 + (k_1 - 2k_1^2 + k_1^2 k_2)\,\psi S^3 + \ldots\right] \\
(AG) &= a\left[1 + \left(\frac{2k_1}{3} - 2k_1^2 + k_1^2 k_2\right)\psi S^3 + \ldots\right] \\
(AA') &= a\left[1 + (0 - 2k_1^2 + k_1^2 k_2)\,\psi S^3 + \ldots\right] \\
(HG) &= a\left[1 + \left(\frac{4k_1 - 1}{3} - 2k_1^2 + k_1^2 k_2\right)\psi S^3 + \ldots\right] \\
(HA') &= a\left[1 + \left(\frac{1 + k_1}{2} - 2k_1^2 + k_1^2 k_2\right)\psi S^3 + \ldots\right] \\
(GA') &= a\left[1 + \left(\frac{2 + 2k_1}{9} - 2k_1^2 + k_1^2 k_2\right)\psi S^3 + \ldots\right]
\end{aligned}\right\} \quad (22)$$

In den Näherungsformeln (22) fehlen die Glieder von S und S^2. Die Interpolationsfehler sind also durchweg der dritten Ordnung der Kleinheit.

Wenn $i = \frac{1}{2}(i_0 + i_1)$, dann ist $\psi = 0$, wie aus (16) ersichtlich ist. In diesem speziellen Falle, welcher in der Praxis oft vorkommt, verschwinden in den Formeln (22) auch die Glieder von S^3. Die Interpolationsfehler werden dann nur noch der vierten Ordnung der Kleinheit. Die Funktion ψ ist im Intervalle $[i_0, \frac{1}{2}(i_0 + i_1)]$ negativ, im Intervalle $[\frac{1}{2}(i_0 + i_1), i_1]$ positiv. Die Interpolationskurven (22) sind also nicht nur an beiden Grenzen des Intervalls (i_0, i_1), sondern auch innerhalb dieses, meistens sehr schmalen Intervalls und zwar in der, nächsten Umgebung von $\frac{1}{2}(i_0 + i_1)$ exakt. Daraus schliessen wir, dass die Fehler der Näherungswerte (21) bei der Interpolation im allgemeinen nicht gross sein können. Dies gilt selbstverständlich nicht für die Extrapolation.

Bei den Näherungsformeln (AH), (HG), (HA') in (22) kann es auch vorkommen, dass die Polynome von k_1 und k_2 in den runden Klammern ( ) gleich Null werden. Auch in solchen, seltenen Fällen reduzieren sich die Fehler auf die vierte Ordnung der Kleinheit, oder sogar auf Null, so z. B. wenn $k_1 = k_2 = 1$.

Die Näherungsformeln (22) unterscheiden sich untereinander merkwürdigerweise nur im ersten Summand der Polynome in den runden Klammern (), wenn man natürlich von den Gliedern S^4, S^5, S^6, ... absieht. Der zweite und der dritte Summand sind bei allen sechs Formeln gleich, nämlich $(-2k_1^2 + k_1^2 k_2)$. Infolge (11) kann die Differenz zweier Näherungswerte (22) bzw. (21) nicht grösser sein als

$$a\psi S^3. \tag{23}$$

Die Funktion (16)

$$\psi = -2\alpha^3 + 3\alpha^2 - \alpha \tag{24}$$

hat im Intervalle (i_0, i_1) zwei Extrema, und zwar

$$\left.\begin{aligned} \psi_{\text{Minimum}} &= -\frac{\sqrt{3}}{18} \\ \psi_{\text{Maximum}} &= +\frac{\sqrt{3}}{18} \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Die absolute Differenz zweier Näherungswerte (21) kann also bei der Interpolation nicht grösser sein als

$$\left| \frac{\sqrt{3}}{18} aS^3 \right| \tag{26}$$

Praktisch können wir die Näherungswerte (21) bei der Interpolation als gleich genau betrachten, wenigstens wenn die Rentenbarwerte auf drei Dezimalen abgerundet sind. Für die Extrapolation gilt dies natürlich nicht, weil ausserhalb des Intervalles (i_0, i_1) die Funktion ψ, welche eine kubische Parabel darstellt, auch sehr grosse Werte annehmen kann. Auch die Rechenarbeit ist bei allen Näherungsformeln (21) beinahe dieselbe, nur bei (AG), (HG), (GA') sind Logarithmentafeln notwendig, was allerdings zeitraubend ist. Jedoch im Falle $\alpha = m \pm 2^n$, wo m und n ganze positive oder negative Zahlen oder Null bedeuten, erübrigt sich das Logarithmieren, weil man Quadratwurzeln bekanntlich auch mit Rechenmaschinen rasch und leicht ziehen kann.

Die Kombination der Näherungswerte A, H, G, A' in der Tabelle 1 gemäss (21), wobei wir $k_1 = 0{\cdot}844$ genommen haben, führt zu folgenden verbesserten Näherungswerten:

Tabelle 2

Näherungswert von a_{20} (4 %)	Der Fehler
$(AH) = 19{\cdot}185$	$+\ 0{\cdot}002$
$(AG) = 19{\cdot}182$	$-\ 0{\cdot}001$
$(AA') = 19{\cdot}185$	$+\ 0{\cdot}002$
$(HG) = 19{\cdot}184$	$+\ 0{\cdot}001$
$(HA') = 19{\cdot}185$	$+\ 0{\cdot}002$
$(GA') = 19{\cdot}183$	$0{\cdot}000$

Die geringen Differenzen in der letzten Dezimale stammen wenigstens zum Teil auch von den vernachlässigten Dezimalen der Grundwerte ${}^0a$, ${}^1a$, k_1.

Aus zwei Rentenbarwerten ${}^0a$, ${}^1a$ und aus k_1 können wir also mit Hilfe der Formeln (21) vorzügliche Werte von a interpolieren. Wir können aber auch umgekehrt aus drei Rentenbarwerten ${}^0a$, a, ${}^1a$ den Wert von k_1 näherungsweise berechnen. Dazu braucht man nur in (21) die Näherungswerte von (AH) bis (GA') mit a zu vertauschen. Die Rechnung wird am einfachsten und die Präzision am grössten, wenn $\alpha = \frac{1}{2}$. Die einzelnen Formeln (21) führen in diesem Falle zu folgenden Resultaten:

$$(AH), (HA'), (AA') \ldots k_1 \sim \frac{({}^0a - a + {}^1a)^2 - a^2}{({}^0a - {}^1a)^2}, \tag{27}$$

$$(AG) \ldots k_1 \sim \frac{{}^0a - 2a + {}^1a}{2(\sqrt{{}^0a} - \sqrt{{}^1a})^2}, \tag{28}$$

$$(HG) \ldots k_1 \sim \frac{({}^0a + {}^1a)(2\sqrt{{}^0a\,{}^1a} - a) - 2\,{}^0a\,{}^1a}{2({}^0a + {}^1a)\sqrt{{}^0a\,{}^1a} - 4\,{}^0a\,{}^1a}, \tag{29}$$

$$(GA') \ldots k_1 \sim \frac{{}^0a^2 + {}^1a^2 - ({}^0a + {}^1a)(3a - 2\sqrt{{}^0a\,{}^1a})}{2({}^0a^2 + {}^1a^2) - 2({}^0a + {}^1a)\sqrt{{}^0a\,{}^1a}}. \tag{30}$$

Nach Einsetzung der numerischen Werte von ${}^0a$, a, ${}^1a$ aus (20) in (27) bis (30) bekommen wir folgende Näherungswerte von k_1:

Tabelle 3

Formel	Der Näherungswert von k_1(21,4 %)	Der Fehler
(27)	0·847	+ 0·003
(28)	0·841	— 0·003
(29)	0·846	+ 0·002
(30)	0·843	— 0·001

Der exakte Wert, auf drei Dezimalen abgerundet, ist $k_1 = 0{\cdot}844$, wie wir bereits oben bemerkt haben. Obwohl die Spannung der Zinsfüsse i_0, i, i_1 in unserem Falle verhältnismässig gross ist, dennoch haben wir aus drei Rentenbarwerten ${}^0a$, a, ${}^1a$ ohne Summen der diskontierten Zahlen N_{x+1}, S_{x+1}, $S^{(2)}_{x+1}$, den Wert von k_1 für den Bedarf der Praxis ausreichend genau berechnet. Je kleiner die Spannung der Zinsfüsse, desto grösser ist die Präzision des Näherungswertes von k_1.

Im Grenzfalle $i_0 = i = i_1$ bekommen wir aus (27) bis (30) den exakten Wert

$$k_1 = k_1(x+1, i) = \frac{S^{(2)}_{x+1} N_{x+1}}{(S_{x+1})^2} \tag{31}$$

wie man sich durch Einsetzung von

$$\left.\begin{aligned} {}^0a &= a - ha' + \tfrac{1}{2}h^2 a'' - + \dots \\ {}^1a &= a + ha' + \tfrac{1}{2}h^2 a'' + \dots \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

in (27) bis (30) und nachherigen Grenzübergang limes $h = 0$ überzeugen kann. Dabei bedeutet a' bzw. a'' die erste bzw. die zweite Ableitung von a nach i.

Wir müssen noch bemerken, dass man bei der praktischen Anwendung der Formeln (27) bis (30) auf Schwierigkeiten stösst, insofern i_0 und i_1 nicht viel von i verschieden sind. In solchen Fällen werden nämlich die Zähler als auch die Nenner in (27) bis (30) gleich oder beinahe gleich Null. Nur wenn die Rentenbarwerte ${}^0a$, a, ${}^1a$ mit vielen Dezimalen vorliegen, können derartige Berechnungen bei kleinen Zinsspannungen einen praktischen Erfolg haben.

* * *

Analog unserem bisherigen Verfahren können wir nun je zwei Näherungsformeln in (22) so kombinieren, dass in der Kombination das Glied von S^3 verschwindet. Wir bekommen so $\binom{6}{2} = 15$ weiter verbesserte Näherungsformeln, bei welchen die Fehler durchweg von der vierten Ordnung der Kleinheit sind. Von diesen 15 Formeln wollen wir einige niederschreiben:

$$\left.\begin{aligned}
(AH, AG) &= (AH)(-2 + 6k_1 - 3k_1k_2) + (AG)(3 - 6k_1 + 3k_1k_2) \\
(AH, AA') &= (AH)(2k_1 - k_1k_2) + (AA')(1 - 2k_1 + k_1k_2) \\
(AH, HG) &= (AH)\frac{1 - 4k_1 + 6k_1^2 - 3k_1^2k_2}{1 - k_1} + (HG)\frac{3k_1 - 6k_1^2 + 3k_1^2k_2}{1 - k_1} \\
(AH, HA') &= (AH)\frac{1 + k_1 - 4k_1^2 + 2k_1^2k_2}{1 - k_1} - (HA')\frac{2k_1 - 4k_1^2 + 2k_1^2k_2}{1 - k_1} \\
(AH, GA') &= (AH)\frac{-2 - 2k_1 + 18k_1^2 - 9k_1^2k_2}{7k_1 - 2} + (GA')\frac{9k_1 - 18k_1^2 + 9k_1^2k_2}{7k_1 - 2} \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Es ist

$$\left.\begin{array}{l}(AH, AG) = a[1 + R_4 S^4 + \ldots] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\} \qquad (34)$$

wo R_4 eine ziemlich komplizierte Funktion von k_1, k_2, k_3 und von α darstellt, welche wir nicht aufschreiben wollen, weil sie zu viel Raum in Anspruch nimmt und ausserdem nichts interessantes aufweist.

Die Formeln (33) kommen praktisch nur für die Extrapolation in Betracht. Bei der Interpolation ist nämlich, wie wir bereits gesagt haben, das Glied von S^3 entweder exakt oder wenigstens annähernd gleich Null, so dass die Formeln (22) durch die Elimination von S^3 entweder gar nicht oder nur unwesentlich verbessert werden. Aus der Tabelle 2 ist ausserdem ersichtlich, dass die interpolierten Näherungswerte nur in der dritten Dezimale geringe Abweichungen aufweisen, was für die Praxis belanglos ist. Wenn auch weitere Dezimalen verlangt werden sollten, dann müssten wir, um unsere Formeln mit Erfolg anwenden zu können, auch genauere mehrziffrige k_1-Werte zur Verfügung haben.

Die zahlenmässigen Beispiele, welche wir bisher gegeben haben, beziehen sich lediglich auf die Interpolation. In der Tabelle 4 geben wir nun einige numerische Resultate für die Extrapolation, und zwar die Näherungswerte von $a_{20}(3\,\%)$, berechnet aus $a_{20}(4\,\%)$, $a_{20}(5\,\%)$, und die Näherungswerte von $a_{20}(5\,\%)$, berechnet aus $a_{20}(3\,\%)$, $a_{20}(4\,\%)$, welche in (20) enthalten sind. In den Formeln (21) bzw. (33) haben wir

$$k_1(3\,\%) = 0{\cdot}8152\,, \qquad k_2(3\,\%) = 0{\cdot}8417$$

und $$k_1(5\,\%) = 0{\cdot}8700\,, \qquad k_2(5\,\%) = 0{\cdot}8758$$ genommen.

Tabelle 4

Näherungswert von $a_{20}(3\,\%)$	Der Fehler	Näherungswert von $a_{20}(5\,\%)$	Der Fehler
$A = 21{\cdot}912$	$-0{\cdot}863$	$A = 15{\cdot}591$	$-0{\cdot}863$
$H = 22{\cdot}997$	$+0{\cdot}222$	$H = 16{\cdot}570$	$+0{\cdot}116$
$G = 22{\cdot}365$	$-0{\cdot}410$	$G = 16{\cdot}158$	$-0{\cdot}296$
$A' = 21{\cdot}232$	$-1{\cdot}543$	$A' = 13{\cdot}936$	$-2{\cdot}518$
$(AH) = 22{\cdot}797$	$+0{\cdot}022$	$(AH) = 16{\cdot}443$	$-0{\cdot}011$
$(AG) = 22{\cdot}650$	$-0{\cdot}125$	$(AG) = 16{\cdot}577$	$+0{\cdot}123$
$(\mathrm{AA}') = 22{\cdot}466$	$-0{\cdot}309$	$(AA') = 17{\cdot}031$	$+0{\cdot}577$
$(HG) = 22{\cdot}763$	$-0{\cdot}012$	$(HG) = 16{\cdot}463$	$+0{\cdot}009$
$(HA') = 22{\cdot}834$	$+0{\cdot}059$	$(HA') = 16{\cdot}399$	$-0{\cdot}055$
$(GA') = 22{\cdot}603$	$-0{\cdot}172$	$(GA') = 16{\cdot}706$	$+0{\cdot}252$
$(AH, AG) = 22{\cdot}772$	$-0{\cdot}003$	$(AH, AG) = 16{\cdot}452$	$-0{\cdot}002$
$(AH, AA') = 22{\cdot}778$	$+0{\cdot}003$	$(AH, AA') = 16{\cdot}456$	$+0{\cdot}002$
$(AH, HG) = 22{\cdot}772$	$-0{\cdot}003$	$(AH, HG) = 16{\cdot}452$	$-0{\cdot}002$
$(AH, HA') = 22{\cdot}779$	$+0{\cdot}004$	$(AH, HA') = 16{\cdot}456$	$+0{\cdot}002$
$(AH, GA') = 22{\cdot}776$	$+0{\cdot}001$	$(AH, GA') = 16{\cdot}454$	$0{\cdot}000$

Die Fehler von (AH, HG) bis (AH, GA') in der Tabelle 4 sind etwa von derselben Grösse wie die Fehler in der Tabelle 2. Das kommt davon, weil die Interpolationsformeln (22) im Falle $\psi = 0$ genau so wie die Extrapolationsformeln (33) keine S, S^2, S^3 enthalten und ausserdem, weil die Entfernung des Zinsfusses i von den Grundzinsfüssen i_0 und i_1 bei der Interpolation als auch bei der Extrapolation nicht allzusehr verschieden ist.

Oben haben wir gezeigt, wie man mittels (21) den Näherungswert von k_1 berechnen kann. Auf ähnliche Weise können wir mittels (33) den Näherungswert von k_1 und zugleich von k_2 aus ${}^0a$, a, ${}^1a$ berechnen. Aus (AH, AG) in (33) bekommen wir

$$3 - 6k_1 + k_1 k_2 \sim \frac{a - (AH)}{(AG) - (AH)} \tag{35}$$

oder durch Substitution (21)

$$3k_1 - 6k_1^2 + 3k_1^2 k_2 \sim \frac{a - A + k_1(A - H)}{2G - A - H}. \tag{36}$$

Desgleichen bekommen wir aus (AH, AA') in (33)

$$2k_1 - k_1 k_2 \sim \frac{a - (AA')}{(AH) - (AA')} \tag{37}$$

oder

$$2k_1^2 - k_1^2 k_2 \sim \frac{a - A - k_1(A' - A)}{H + A' - 2A}. \tag{38}$$

Die Grössen A, H, G, A' in (36) und (38) können aus ${}^0a$, ${}^1a$ und α nach (3) bis (6) berechnet werden. Wir bekommen so zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten k_1 und k_2. Einen praktischen Erfolg haben solche Rechnungen jedoch nur dann, wenn die Spannung der Zinsfüsse i_0, i, i_1 hinreichend gross ist, oder wenn die Rentenbarwerte ${}^0a$, a, ${}^1a$ mit vielen Dezimalen vorliegen. Die Differenz $a - (AH)$ im Zähler (35) beträgt bei $i = 5\%$ nach der Tabelle 4 nur 0·011. Aus solchen kleinen Zahlen können selbstverständlich nicht hinreichend genaue Werte von k_1 und k_2 bestimmt werden.

* * *

Die Interpolations- und Extrapolationsformeln (21) und (33), welche an der Einfachheit der numerischen Rechnungen kaum etwas zu wünschen übrig lassen, dürften den Bedürfnissen der Versicherungspraxis voll entsprechen. Theoretisch dagegen können wir aus zwei Rentenbarwerten ${}^0a$, ${}^1a$ und aus den generalisierten Poukkaschen Zahlen $k_1, k_2, k_3 \ldots$ durch sukzessive Elimination von $S^4, S^5, S^6 \ldots$ weitere, unendlich viele, beliebig präzise Näherungsformeln für die Bestimmung eines jeden Rentenbarwertes aufstellen, jedoch mit jeder weiteren Elimination komplizieren sich die Formeln so sehr, dass ihr praktischer Wert schon bei der Elimination des Gliedes von S^4 problematisch erscheint.