

Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker
= Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of
Swiss Actuaries

Band: 55 (1955)

Artikel: Zur mathematischen Darstellung des Nutzens in der Versicherung

Autor: Nolfi, P.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-551415>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 06.10.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Zur mathematischen Darstellung des Nutzens in der Versicherung

Von *P. Nolfi*, Zürich

In ihrem berühmten Werk «Theorie of Games and Economic Behavior» haben Neumann und Morgenstern mit besonderem Nachdruck darauf hingewiesen, dass der Begriff des Nutzens von zentraler Bedeutung ist. Tatsächlich spielt diese Grösse in allen ökonomischen Betrachtungen und Vorgängen eine grundlegende Rolle, weil das wirtschaftliche Gebot der grössten Nutzbarkeit eine neue methodische Behandlung erheischt. Leider ist es aber so, dass der Nutzen numerisch nur sehr schwer erfasst werden kann. Hierin liegt wohl der Grund, weshalb seine Auswirkung wenig bekannt ist, oft übersehen wird und jedenfalls noch wenig ins Bewusstsein des Denkens gerückt werden konnte. Das ist zu bedauern, weil als Folge davon die Wirksamkeit und die Bedeutung des Nutzens viel zu wenig beachtet werden, was, wie wir nachstehend darlegen, verursacht, dass manche Handlung ihr Ziel ganz oder teilweise verfehlt und jedenfalls nicht als «Rational Behavior» bezeichnet werden darf, zum Nachteil nicht nur des Einzelnen, sondern insbesondere auch der Gemeinschaft.

Zweifellos ist es ein verhängnisvoller Irrtum, dass der Nutzen vielfach dem Geldwert eines Gutes oder allgemein gesprochen einer Kommodität gleichgestellt wird, was keineswegs zutrifft. Man sollte zwar meinen, dass dank des hohen Entwicklungsgrades des Tauschverkehrs es immer wieder möglich wird, ein Gut gegen ein anderes einzutauschen, so dass mit dem gleichen Wert auch der gleiche Nutzen erzielt werden kann. Dieser Idealzustand ist aber in Wirklichkeit nicht erfüllt. Wer z. B. eine unzweckdienliche Versicherung abgeschlossen hat, kann diese meistens nicht wieder auflösen ohne einen empfindlichen Verlust zu erleiden. Ähnlich sind die Verhältnisse bei jedem Kauf und bei jeder

Dienstleistung. Ist der Nutzen einer gekauften Ware oder aus einem Dienstvertrag nicht so gross wie erwartet, so kann der Kauf oder Vertrag in der Regel nur mit erheblichen Verlusten rückgängig gemacht werden.

Über die Messbarkeit des Nutzens machen die eingangs genannten Autoren sehr interessante Angaben, die wir hier nur, soweit sie zum Verständnis des folgenden dienen, wiedergeben. Die Tatsache, dass ähnliche quantitative Erscheinungen wie der Nutzen, z. B. die Wärme, sich schlussendlich doch als messbar herausgestellt haben, berechtigt zur Hoffnung, dass der Nutzen eines Tages numerisch besser erfasst werden kann, als das heute der Fall ist. Ähnlich wie im Fall der Wärme ist es durchaus möglich, dass gerade durch die mathematische Behandlung des Problems sich neue Wege und Zusammenhänge zeigen und zu bessern Messmethoden führen als diejenigen, die uns heute zur Verfügung stehen. Immerhin gestatten bereits die gegenwärtigen Kenntnisse Resultate herzuleiten und Tatbestände zu eruieren, die als dienlich und wertvoll bezeichnet werden müssen. Neumann zeigt in seinem Buche, dass eine numerische Bewertung des Nutzens bereits auf Grund von zwei plausiblen und allgemeingehaltenen, adäquaten Voraussetzungen möglich ist, womit die Massbestimmung bis zu einer linearen Transformation gegeben wird. Diese Voraussetzungen werden durch zwei Postulate, welche die Möglichkeit der Anordnung und der Abwägbarkeit voraussetzen, festgelegt. — Um eine *Anordnung* treffen zu können, muss verlangt werden, dass der homo oeconomicus über ein vollständiges Beurteilungsvermögen verfügt, d. h., dass er jederzeit in der Lage ist zu entscheiden, welchem von zwei Objekten er den Vorzug gibt. Genauer gesagt: es wird vorausgesetzt, dass dieser homo befähigt ist von zwei Möglichkeiten, die ihm zur Wahl vorgelegt werden, zu entscheiden, welche von beiden er vorzieht. Diese Fähigkeit heisst *Präferenzvermögen*.

Das Präferenzvermögen erlaubt, den Nutzen bis zu einer monotonen Transformation zu bestimmen. Es wird damit jener Entwicklungszustand erreicht, wie er ehemals für die Temperaturmessung vorlag; man konnte lange Zeit nur mit dem Begriff «Wärmer» als Vergleichszustand operieren, was auf Grund unseres Postulates durch die Unterscheidung Grösser und Kleiner grundsätzlich auf dasselbe hinauskommt. Erst durch die Entwicklung der Thermodynamik — insbesondere auf Grund der Eigenschaften idealer Gase — konnte das System der

Transformationen auf ein lineares reduziert werden. Durch die weitere Entwicklung der Thermodynamik gelang es schliesslich auch, den absoluten Nullpunkt festzulegen, so dass nur noch die Multiplikation mit einer Konstanten als Transformationsmöglichkeit offen blieb. So sehr es als gewagt erscheinen mag, hieraus irgendwelche Analogieschlüsse mit den vorliegenden wirtschaftlichen Problemen zu ziehen, wäre es doch voreilig, eine entsprechende – wenn auch anders geartete – Entwicklung in der Wirtschaftslehre als ausgeschlossen zu betrachten. Die Forschung hat immer wieder überraschende Resultate zu Tage gefördert, so dass eine gewisse Hoffnung in dieser Hinsicht berechtigt erscheint. Indessen kann ein solcher Fortschritt ohne eine mathematische Bearbeitung des Stoffes, insbesondere auch ohne eine Analysierung der Verhältnisse, nicht erwartet werden. Auch in der Thermodynamik wurden erst nach grosser Denkarbeit Erfolge verzeichnet.

Beschränkt man sich auf das Gebiet der Versicherung, d. h. auf die Probleme, deren Erforschung sich diese Arbeit zum Ziel setzt, so ergeben sich gewisse weitergehende Möglichkeiten, die eine konkrete Formulierung erlauben, womit man zu Resultaten geführt wird, die einen tiefen Einblick in die inneren Zusammenhänge vermitteln. Diese Möglichkeiten werden hauptsächlich durch die Beschränkung auf ein bestimmtes Gut, bei der eine gewisse Bewertung nach Geldeinheiten bereits vorliegt, gegeben. Zwar entspricht die Bewertung in Geldeinheiten, wie sie durch die Angabe der Versicherungssumme erfolgt, noch nicht dem eigentlichen Nutzen, den eine Versicherung für den Versicherten beinhaltet. Dagegen vermag die Höhe der Versicherungssumme einen Anhaltspunkt über die Effektivität des Nutzens zu vermitteln. Es darf angenommen werden, dass der Nutzen mit der Höhe der Versicherungsleistungen, wenn nicht proportional, so doch *monoton ansteigt*. Hinzu kommt noch ein weiteres wirtschaftliches wie soziales Faktum, das mit dem Begriff des Nutzens in engem Zusammenhang steht und durch den *Bedarf* in Erscheinung tritt. Jede Versicherung sollte sich nach dem individuellen Bedarf richten, sofern sie einen möglichst grossen Nutzen ermöglichen soll. Nun ist der Bedarf eine Grösse, die sich quantitativ leichter ermitteln lässt als der Nutzen und zu dessen Erfassung sich gewisse allgemeine Richtlinien und Grundsätze bereits herausgebildet haben; man denke z. B. an die gut durchdachten Methoden zur Ermittlung des Versorgerschadens, wie sie in der Unfallversicherung bestehen.

Auf Grund der angeführten, in der Versicherung bereits vorliegenden, konkreten Unterlagen besteht die Möglichkeit, eine numerische Bewertung des Nutzens einzuführen, die zumindest als zweckdienlich bezeichnet werden darf.

Bevor wir an die Besprechung unseres Vorschlages herantreten erscheint es unerlässlich, auf folgende wesentliche Momente hinzuweisen. Zunächst muss betont werden, dass es sich nicht darum handeln kann, ein absolutes Mass für die Bewertung des Nutzens aufzustellen. Das ist auch auf andern Gebieten, wo die Verhältnisse wesentlich konkreter liegen, z.B. in der Längenmessung, Gewichtsbestimmung usw. nicht möglich. Es kann deshalb, wenigstens vorläufig, nur angestrebt werden, eine möglichst zuverlässige Massfunktion zu gewinnen, welche gestattet, relative Unterschiede anzugeben und festzustellen. Die Erfüllung dieser Forderung ist für die allgemeinen Belange durchaus hinreichend, weil dem Grundproblem – Aufstellung der Grundprinzipien für ein rationelles Verhalten – damit Genüge getan wird. Es zeigt sich, dass der Versicherte eigentlich nicht die absolute Grösse des Nutzens kennen muss; für ihn genügt bereits das Vorhandensein einer Vergleichsbasis, weil eine solche ausreicht, um die «beste Strategie» aufzufinden.

Eine weitere charakteristische Eigenschaft des Nutzens, die immer wieder übersehen worden ist und wird, liegt im Umstand, dass der Nutzen eines Gutes von Individuum zu Individuum je nach seinen persönlichen Interessen erhebliche Unterschiede aufweisen kann. Es folgt hieraus, dass der *Nutzen eine individuelle Grösse* ist. – Es ist unerlässlich, sich für das Verständnis der Theorie sowie für die nachfolgenden Darlegungen, diese Tatsache vor Augen zu halten und zwar auch deshalb, weil die Versuchung nach Vereinheitlichung und nach Vereinfachung besonders gross ist. Wohl hat auf andern Wissensgebieten, insbesondere in der Physik, diese Tendenz zu beachtenswerten und erstaunlichen Erfolgen geführt, was zur Annahme verleitet, in jeder Vereinheitlichung einen Fortschritt zu erblicken. Dies braucht aber keineswegs immer und überall zuzutreffen. Jedenfalls würde eine Vereinheitlichung der Bewertung des Nutzens, unabhängig von der individuellen Präferenz, zu einer Verwischung von wesentlichen Merkmalen in der Ökonomie führen. – So kann der Warenaustausch seine Entstehung und Inlusshaltung gerade durch die Tatsache, dass der Nutzen und seine Bewertung von Individuum zu Individuum verschieden ist,

erklärt werden. Weil für den Verkäufer der Nutzen einer bestimmten Ware kleiner ist als für den Käufer, wandert diese vom Verkäufer zum Käufer. Wir haben hier wieder ein ähnliches Phänomen wie in der Wärmelehre im Falle des Überganges eines thermodynamischen Zustandes in einen anderen, zu dessen Erklärung man auf das Vorhandensein einer weiteren Grösse – ausser der Energie – nämlich der Entropie schliesst.

Die dargelegte Auffassung über das Bestehen eines individuellen Wertmasses für den Nutzen bildet eine Grundvoraussetzung für die Anwendung der von Neumann gegründeten Theorie der Spiele auf ökonomische Probleme. Man vergleiche hiezu die Darstellung des Tauschverkehrs p. 555 ff. seines Buches.

Die Festhaltung an der individuellen Bewertung des Nutzens erheischt aber für das Verständnis der folgenden Ausführungen eine gewisse Präzisierung. In Wirklichkeit ist es durchaus denkbar, dass ein Individuum von zwei Gütern oder allgemein gesprochen von zwei Vorteilen (Kommoditäten), die ihm vorgelegt werden, den für ihn minderwertigen wählt. Das tritt hauptsächlich dann ein, wenn es nicht über die nötige Urteilskraft verfügt, um entscheiden zu können, welche von den beiden Kommoditäten ihm den grösseren Nutzen einbringt. Diese Schwäche im menschlichen Urteilsvermögen kann nun im Wirtschaftsleben durch Irreführung und dergleichen ausgenützt werden. In der Theorie der strategischen Spiele kann der Einfluss des Bluffens «in vitro» studiert werden und man ist überrascht festzustellen, wie leicht es zu katastrophalen Auswirkungen für den Unwissenden führen kann. Wir verweisen als Beispiel auf das Poker-Spiel, das gerade wegen seiner Verfänglichkeit den gutgläubigen Spieler zu Entscheidungen veranlasst, die sich für ihn sehr nachteilig erweisen.

Im Versicherungswesen, das infolge seines stochastischen Charakters mit den Glücksspielen grosse Ähnlichkeit hat, tritt die Unsicherheit und ungenügendes Urteilsvermögen im Einschätzen des Nutzens besonders stark zu Tage. Selbst der Fachmann hat mitunter Mühe zu entscheiden, welche Versicherungskombination für den Versicherungsnehmer unter Berücksichtigung seiner persönlichen Verhältnisse die zweckmässigste ist. Nicht selten muss man sich z. B. ernsthaft fragen, ob bei Personalversicherungskassen die verfügbaren Mittel zweckentsprechend eingesetzt wurden und ob diese nicht eine wesentlich bessere Verwendung durch eine andere Zuteilung der Leistungen erfahren

würden. So kann man beispielsweise durchaus die Ansicht vertreten, dass eine gut ausgebaute Invalidenversicherung einer kostenmässig äquivalenten Herabsetzung des Rücktrittsalters vorzuziehen ist, und zwar nicht nur im Interesse des Arbeitnehmers, sondern auch des Arbeitgebers. In der Einzelversicherung sind Fälle von unrationellen Versicherungsabschlüssen oft mit Recht angeprangert worden, so z. B. der Abschluss einer Versicherung, die keinem eigentlichen Bedürfnis entspricht, wie die Todesfallversicherung eines Ledigen, der für keine Angehörigen zu sorgen hat und dergleichen. Eine grosse Rolle spielt auch die Form der Versicherung, wie sie z. B. durch die Wahlmöglichkeit zwischen Kapital- und Rentenversicherung in Erscheinung tritt. Allgemein ist es sicher so, dass die Renten- der Kapitalversicherung vorzuziehen ist, obwohl letztere vom Versicherungsnehmer infolge der augenfälligen Wirkung einer grossen Kapitalauszahlung vorgezogen wird. Das Eidgenössische Versicherungsamt hat in seinen Berichten auf diesen unerfreulichen Umstand immer wieder und mit Recht hingewiesen. Was hier vorliegt ist nichts anderes als eine falsche Einschätzung des Nutzens durch den Versicherungsnehmer. Leider ist es so, dass diese falsche Einschätzung sich auch volkswirtschaftlich schädlich auswirkt, weshalb ihre Nachteile viel grösser sind als das gemeinhin angenommen wird. Um ihr zu begegnen und zu einer zuverlässigen Beurteilung zu gelangen, ist eine numerische Darstellung unerlässlich. Erst die zahlenmässige Bewertung erlaubt eine richtige objektive Würdigung der Verhältnisse.

Die ganze Situation, wie sie sich uns nach den obigen Ausführungen vorstellt, zeigt, dass im Versicherungswesen Probleme auftauchen, mit denen sich die Theorie der Spiele eingehend befasst und die mit Hilfe der dazu entwickelten Methoden erfolgreich einer Klärung entgegengeführt werden können. Es leuchtet insbesondere ein, dass der Abschluss einer Versicherung eine strategische Aufgabe darstellt und damit die Aufstellung eines «Standards of Behavior» erfordert.

Auf Grund der neuesten Entwicklung ist anzunehmen, dass die Theorie der strategischen Spiele auch in der Versicherung Bedeutung erlangen wird. Bereits liegen Vorstösse in dieser Richtung vor. Allgemein betrachtet, kann man diesen Wirtschaftszweig als ein Vierer-Spiel auffassen, bestehend aus den Beteiligten: Versicherungsnehmer, Versicherer, Rückversicherer und Zufall. Ob eine allgemeine «Lösung» im Sinne der Theorie gefunden werden kann ist heute nicht abzusehen.

Bis anhin wurden wohl ausschliesslich nur die Belange irgendeines «Einzelspielers» gegenüber allen übrigen ins Auge gefasst, womit auch unerlässliche Vorarbeiten im Sinne der allgemeinen Theorie geleistet wurden.

Unter dem Gesichtspunkt der allgemeinen Theorie liefern auch die vorliegenden Betrachtungen bloss einen Beitrag zum Ganzen. Sie befassen sich mit den Interessen des Versicherungsnehmers gegenüber der Gruppe der übrigen Beteiligten. Damit wird aus dem gesamten Komplex ein Zweier-Spiel gebildet, indem dem Versicherungsnehmer der Versicherer, Rückversicherer und der Zufall als Gruppe gegenüber gestellt werden, deren Benehmen im wesentlichen durch den Zufall bestimmt wird. Unter der weiteren Annahme, dass der Versicherer sowie der Rückversicherer keine geschäftlichen Interessen verfolgen, sich vielmehr damit begnügen, für die adäquate Durchführung der Versicherung besorgt zu sein, verbleibt als einziger Gegenspieler des Versicherungsnehmers nur noch der *Zufall*. – Die Strategie des Versicherungsnehmers reduziert sich damit auf eine möglichst planmässige Ausnützung der Zufallserscheinungen. Dabei ist festzustellen, dass der Zufall als ein Gegenspieler betrachtet werden kann, der eine Art gemischte Strategie betreibt. Sie darf zwar nicht einer gemischten Strategie, wie sie in der Theorie der Spiele definiert wird, gleichgestellt werden; das wäre nur dann zutreffend, wenn die Zufallsereignisse so verteilt wären, wie wenn sie durch Ziehungen aus einer Urne zustande kämen. Dies trifft aber nicht zu, weil eine ständige und unvorhersehbare Veränderung der Grundwahrscheinlichkeiten jede stochastische Gesetzmässigkeit in der Versicherung durchbricht. Trotzdem, oder sogar umsomehr hat es einen Sinn von einer Strategie des Versicherungsnehmers zu sprechen.

Es sei

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

die Zahlungsmatrix. Der Wert a_{ik} gibt den Nutzen an, den der Versicherte erlangen kann, falls er eine Versicherungskombination mit den in der i -ten Reihe angegebenen Werten abschliesst und der Schadenfall im k -ten Jahre eintritt.

Könnten die Zufallsereignisse als das Resultat einer stabilen gemischten Strategie aufgefasst werden und wären sie gegeben durch die Grundwahrscheinlichkeiten $q_1, q_2 \dots q_n$, dann ergäbe sich die beste Strategie des Versicherungsnehmers auf Grund der Formel:

$$K(\tau, q) = \text{Max}_i \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik} q_k.$$

Die Tatsache jedoch, dass die Werte q_k nicht bekannt sind, sondern nur hypothetisch auf Grund der Erfahrung angesetzt werden können, zeigt, dass durch $K(\tau, q)$ nicht unbedingt und notwendig die beste Strategie angegeben werden kann. Immerhin ermöglicht diese Formel, das Problem mathematisch darzustellen und auf Grund dieser Unterlagen durch ein rationales Verhalten das Bestmögliche zu erreichen.

Wir haben vorausgesetzt, jede Reihe der Matrix a_{ik} für $k = 1, \dots, n$ stelle eine Versicherungskombination dar mit gleichem Prämienaufwand; dadurch ist das Interesse des Versicherers an einer speziellen Wahl eliminiert, womit seine Ausschaltung als Interessent nachträglich gerechtfertigt wird. Für den Versicherungsnehmer besteht zwischen den einzelnen Kombinationen nur hinsichtlich des Nutzens ein Unterschied, nicht aber hinsichtlich der Kosten. Diese Unterschiede können nun aber sehr gross sein. Ihre Bewertung bietet, wie ausgeführt, Schwierigkeiten. Indessen lassen sich dank der Möglichkeit plausibler Annahmen verwertbare Grundlagen gewinnen.

Wir gehen hiezu von folgender Überlegung aus: Es soll der Nutzen einer Schadenzahlung umso grösser werden, je grösser der Auszahlungsbetrag ist. Jede Erhöhung des Auszahlungsbetrages soll auch eine Erhöhung des Nutzens bedingen, wobei diese Erhöhung umso grösser werden soll, je kleiner der Auszahlungsbetrag und je grösser der Bedarf ist. Eine Formel, die in adäquater Weise diesen Voraussetzungen genügt, ist folgende:

$$\nu = \ln \left(1 + \bar{e} \frac{S}{B} \right), \quad (1)$$

hierin bedeuten ν der Nutzen, S die Schadenauszahlung und B den Bedarf. \bar{e} ist eine Normierungskonstante. Es kann in zweckmässiger Weise $\bar{e} = e - 1$ gesetzt werden, wobei e die Basis der natürlichen Logarithmen bedeutet.

Nach der aufgeführten Formel wird der Nutzen Null, wenn keine Auszahlung erfolgt, dies im Gegensatz zur entsprechenden Formel von

Daniel Bernoulli, nach welcher der Nutzen mit der Abnahme des Einkommens ansteigt und gegen unendlich strebt. Gemäss Formel (1) ist für $S = 0$ auch der Nutzen Null, mit wachsendem S vergrössert sich auch v zunächst stärker, dann schwächer, um den Wert 1 bei $S = B$ zu erreichen. Diese letzte Tatsache ist eine bemerkenswerte Eigenschaft der angeführten Massfunktion. Das Mass des Nutzeffektes wird damit in geeigneter Weise in Verbindung mit der Höhe des Bedarfes gebracht, womit ein intuitiv leicht verständlicher Zusammenhang hergestellt wird. — Für $S = 2$ wird der Nutzen nahezu 1.5, was zeigt, dass ein höheres Kapital als der Bedarf rasch an Nutzeffekt verliert. Für $S = 3$ wird $v = 1.8$. — Diese Zahlenwerte lassen erkennen, dass die Funktion $v = v(S, B)$ Eigenschaften besitzt, die den Forderungen, die an sie gestellt werden müssen, gut entsprechen. Es darf deshalb gefolgert werden, dass die Funktion $v(S, B)$ vernünftige Werte ergibt, die den tatsächlichen Verhältnissen entsprechen. Jedenfalls erlaubt sie, numerische Werte zu berechnen und damit in zuverlässiger Weise jeweils festzustellen, welche Strategie für den Versicherten die vorteilhafteste ist.

Die Tauglichkeit der aufgestellten Massfunktion prüfen wir an einem Beispiel. Wir beschränken uns damit auf die Behandlung eines für praktische Belange besonders aktuellen Problems, nämlich auf den Vergleich des Nutzens einer Kapitalabfindung mit jenem einer Rentenauszahlung. Wie oben dargelegt, ist diese Frage von besonderem Interesse; sie ist oft diskutiert worden und es herrscht über sie bei weitem nicht in allen Teilen Klarheit.

Die eingeführte Massfunktion des Nutzens gestattet tatsächlich eine weitgehende Abklärung dieses Fragenkomplexes. Wir berechnen dazu den Nutzen einer *Altersrente* r beginnend im x -ten Altersjahr und denjenigen einer gleichwertigen einmaligen Kapitalauszahlung in der Höhe von: $S = r a_x$. Bezeichnen wir das jährliche Bedarfseinkommen, das auf etwa 60% des zuletzt bezogenen Erwerbseinkommens zu veranschlagen ist, mit R , dann ist der Gesamtbedarf $B = R a_x$. Für den Nutzen der Rentenzahlung erhält man damit die einfache Formel:

$$v = \ln \left(1 + \bar{e} \frac{r}{R} \right). \quad (2)$$

Der Nutzen einer Kapitalauszahlung lässt sich nicht so einfach darstellen. Seine Höhe ist von der Art abhängig, wie das Kapital aufge-

braucht wird. Die meisten Fälle zeichnen sich durch einen ziemlich raschen Aufbrauch der Kapitalauszahlung aus. Nun ist aber der Bedarf eine zeitlich bedingte Grösse, so dass es nicht gleichgültig ist, in welcher Weise ein verfügbares Kapital auf diesen Zeitraum verteilt wird. Weil der Bedarf zeitlich gebunden ist, muss sich auch der Verbrauch nach der Zeit richten, um möglichst wirksam zu sein. Um diesem Umstand Rechnung zu tragen, muss der allgemeine Ausdruck für ν verfeinert werden. Ist der Bedarf in der Zeiteinheit zur Zeit t gleich $R(t)$ und das verfügbare Kapital zu diesem Zeitpunkt pro Zeiteinheit $r(t)$, dann ist der Gesamtnutzen, sofern sich dieser über die Zeit T erstreckt, gegeben durch:

$$\nu = \frac{1}{T} \int_0^T \ln \left(1 + \bar{e} \frac{r(t)}{R(t)} \right) dt, \quad (3)$$

T bedeutet in unserem Beispiel die Lebensdauer. Setzt man $r(t) = r$ und $R(t) = R$, dann wird der Integrand zeitlich unabhängig und es resultiert der unter (2) angegebene Ausdruck, womit gezeigt wird, dass die dargelegte Erweiterung sinngemäss ist.

Formel (3) bringt die Tatsache zum Ausdruck, dass der Nutzen auch noch von der Versorgungszeit T abhängt. Diese Zeit ist nun ebenfalls eine individuelle Grösse und darin liegt der Grund, weshalb man nicht allgemein sagen kann, der Bezug einer Leibrente sei fürsorgetechnisch vorteilhafter als der Bezug einer einmaligen Kapitalabfindung. Ist T klein, dann muss das Kapital S bloss für eine verhältnismässig kurze Versorgungszeit ausreichen und es besteht die Möglichkeit – vorausgesetzt, dass dies auch gelingt – die Kapitalsumme auf die Zeit T so zu verteilen, dass $r_s > r$ wird mit $r_s = S : a_{\overline{T}|}$, was zur Folge hat, dass auch der Nutzen $\nu(r_s) > \nu(r)$ wird, wie man leicht erkennt. Nun ist es praktisch nicht ausgeschlossen, dass ein Versicherter, vor die Wahl gestellt, sich mit Recht für eine Kapitalabfindung entscheidet, weil er auf Grund seiner Kenntnisse über seinen Gesundheitszustand nur mit einer kurzen Versorgungszeit rechnen darf. Aus den Erfahrungen über die Sterblichkeit in der Einzelversicherung ist es bekannt, dass die Einschätzung der eigenen Lebensdauer sich im allgemeinen nicht erfolglos gestaltet. Immerhin sind auch schwere Missgriffe zu verzeichnen. Sie treten hauptsächlich ein, wenn der Gesundheitszustand keine ausgeprägten Besonderheiten aufweist. In solchen Fällen bestehen keine Anhaltspunkte, wie eine Kapitalabfindung auf die im Einzelfall un-

bekannte künftige Lebensdauer zu verteilen ist, weil unsere Kenntnisse über die Sterblichkeit sich nur auf Gesamtheiten beziehen. Aus diesem Umstand entstehen Unzulänglichkeiten, die sich nicht nur individuell, sondern auch volkswirtschaftlich nachteilig auswirken. Man denke z. B. an die zahlreichen Sparkassen, die ihren Versicherten ansehnliche Kapitalabfindungen ausrichten, ohne Gewähr zu haben, dass diese einigermassen zweckmässig auf die Versorgungszeit verteilt werden; tatsächlich muss nachträglich auch immer wieder festgestellt werden, dass die ausgerichteten Kapitalbeträge vielfach ihren Zweck nicht in befriedigender Weise erfüllt haben. Damit stellt sich die Frage:

Welches ist die beste Strategie für den Verbrauch eines Kapitals zu Fürsorgezwecken?

in den Vordergrund. Die allgemeine Lösung des Problems stellt sich mathematisch nicht so einfach. Die Suche nach einer solchen würde in diesem Zusammenhang zu weit führen. Wir beschränken uns auf einen für die Praxis wertvollen Spezialfall und nehmen dazu an, der jährliche Bedarf $R(t)$ sei konstant und gleich R , womit es auch gerechtfertigt erscheint, die jährliche Zuteilung $r(t) = r_s =$ konstant anzusetzen. Der Nutzen einer Kapitalauszahlung, bei Verteilung derselben auf n Jahre, wird:

$$v_n = \frac{1}{T} \int_0^n \ln \left(1 + \bar{e} \frac{r_s}{R} \right) dt = \frac{n}{T} \ln \left(1 + \bar{e} \frac{r_s}{R} \right) \quad \text{für } n < T$$

und

$$v_n = v_T = \ln \left(1 + \bar{e} \frac{r_s}{R} \right) \quad \text{für } n \geq T,$$

wobei $r_s a_{\overline{n}|} = S$ ist. Wir beschränken uns hier, der Einfachheit halber, auf den Fall des Bezuges einer jährlich vorschüssigen Verbrauchsquote sowie auf die Betrachtung des persönlichen Nutzens. Ein Restkapital, das im Falle bei $T < n$ verbleibt, kann nicht mehr zum persönlichen Unterhalt des Anspruchsberechtigten beitragen und fällt damit in die Erbmasse, was im allgemeinen nicht mehr dem Fürsorgezweck entspricht.

Setzt man $S = aR$, wobei a die Zeit angibt, für welche die Summe S zur Deckung des Jahresbedarfes R ausreicht, so erhält man folgende Formel:

$$v_n = \frac{n}{T} \ln \left(1 + \bar{e} \frac{a}{a_{\overline{n}|}} \right) \quad \text{für } n < T.$$

Nun ist v_n für $n < T$ monoton wachsend. Der Beweis dieser Behauptung folgt aus der Tatsache, dass bereits die zu v_n Minorante $\left(1 + \bar{e} \frac{a}{n}\right)^n$ monoton wächst.

Für $n \geq T$ gilt $v_T = \frac{1}{T} \ln \left(1 + \bar{e} \frac{a}{a_{|n|}}\right)$.

Wie man ohne weiteres erkennt, ist v_T monoton fallend. Hieraus folgt, dass der Nutzen an der Stelle $n = T$ ein Maximum erreicht. An dieser Stelle bildet der Kurvenverlauf eine Spitze. Es zeigt sich also, dass der grösste Nutzen einer Kapitalabfindung dann verzeichnet werden kann, wenn es gelingt, sie auf die gesamte Lebensdauer zu verteilen. Dieses Resultat ist nicht überraschend. Es zeigt an, dass die Funktion v_n die Verhältnisse auch in dieser Hinsicht richtig wiedergibt und als Grundlage für weitergehende Betrachtungen dienen kann.

Etwas tiefer liegt folgendes Ergebnis: In Anbetracht der Tatsache, dass die künftige Lebenserwartung im Einzelfall nicht zuverlässig abgeschätzt werden kann, stellt sich die Frage, welche die «beste Strategie» für den Verbraucher einer Kapitalabfindung ist, sofern unser Wissen sich auf die Kenntnisse über die Sterblichkeit der Gesamtheit, der ein Verbraucher angehört, beschränkt. Vorausgesetzt, die Sterblichkeit sei durch eine Sterbetafel gegeben, stellt sich die Frage, wie hoch n bzw. $a_{|n|}$ zu wählen sind. Den besten Wert für n bezeichnen wir mit m . Er wird dadurch ausgezeichnet, dass für ihn der Nutzen seinen Maximalwert erreicht.

Nach der oben abgeleiteten Formel stellt sich der Nutzen für einen Kapitalbesitzer, der die Dauer m nicht überlebt $n \leq m$ auf:

$\ln \left(1 + \bar{e} \frac{a}{a_{|m|}}\right)$ und für einen, der länger als m Jahre lebt $n > m$ auf:

$$\frac{m}{n} \ln \left(1 + \bar{e} \frac{a}{a_{|m|}}\right).$$

Der Erwartungswert des Nutzens stellt sich damit auf

$$\text{Max}_m \bar{v}_m = \ln \left(1 + \bar{e} \frac{a}{a_{|m|}}\right) m q_x + \sum_{n=m+1}^{\omega-x} \frac{m}{n} \ln \left(1 + \bar{e} \frac{a}{a_{|m|}}\right) {}_{n-1}q_x. \quad (4)$$

Damit besitzen wir alle Grundlagen, um unser Maximum-Problem zu lösen. Bei kontinuierlicher Betrachtungsweise könnte die Lösung auf analytischem Wege aufgesucht werden. Um unsere Ausführungen nicht

allzusehr anwachsen zu lassen, beschränken wir uns auf obige diskontinuierliche Darstellung. Die Auffindung des Maximalwertes gestaltet sich auf Grund der Tafelwerte verhältnismässig einfach. Wählt man als Grundlagen die Tafeln VZ 1950 mit einem technischen Zinsfuss von $2\frac{1}{2}\%$ und setzt $a = 5$, was einer mittleren Kapitalauszahlung von etwa Fr. 30 000 entspricht, so zeigt es sich, dass ein 65 Jähriger sich dann der besten Verbrauchsstrategie bedient, wenn er die erhaltene Abfindungssumme auf 7 Jahre verteilt, d.h. jährlich rund Fr. 4700 von seinem Kapital bezieht. Der Kapitalverbrauch stellt sich damit auf rund 16% der verfügbaren Kapitalsumme. Er ist zwar grösser als die entsprechende Leibrente, die eine Rendite von 10% ermöglicht. Andererseits muss aber berücksichtigt werden, dass das Kapital für einen Teil der Versicherten vor ihrem Ableben verbraucht ist. Dieses Resultat erscheint bei näherer Überlegung zutreffend und plausibel.

Der Nutzen stellt sich in unserem Beispiel auf

$$v = \text{Max}_m \bar{v}_m = 0.505,$$

er erreicht damit – trotz optimaler Voraussetzung – nur 80% des Nutzens einer gleichwertigen Rentenversicherung. Dies ist auf den Umstand zurückzuführen, dass bei einem Kapitalverbrauch wesentliche Teile der verfügbaren Summe ihren Zweck verfehlen.

Bereits die vorstehenden Ausführungen und Hinweise lassen erkennen, dass es sich hier nicht nur um mathematisch interessante und neuartige Probleme handelt, sondern dass auch sozialpolitische und wirtschaftliche Fragen einer Klärung zugeführt werden können.

