Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 60 (1960)

Artikel: Le calcul, par ajournement, des primes pour rentes différées

Autor: Chuard, Philippe

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-966777

Le calcul, par ajournement, des primes pour rentes différées

Par Philippe Chuard, Pully (VD)

Résumé

Par l'emploi successif et répété de rentes immédiates, il est possible d'obtenir les primes, uniques ou périodiques, de rentes différées. L'auteur indique les formules de ces primes, qui diffèrent en général de celles auxquelles conduit la méthode habituelle. Il donne également les formules permettant de comparer les primes calculées selon les deux méthodes et fournit les règles d'un calcul approximatif.

I.

Introduction

On peut, avec un tarif de rentes viagères immédiates, obtenir les effets procurés par la conclusion d'une rente différée. Pour cela il suffit «d'ajourner» la date d'entrée en jouissance de la rente en achetant une nouvelle rente immédiate avec les premiers arrérages échus, et de renouveler cet *ajournement* d'année en année jusqu'au moment où l'on désire que commence effectivement le paiement des arrérages.

Si, au moment de chaque ajournement, le rentier renouvelle son versement initial, il obtient une rente différée à primes périodiques. Sinon sa rente différée est à prime unique.

Etablir les formules donnant la prime unique et la prime périodique de la rente différée, en tenant compte des divers chargements et de la sélection dans la mortalité, tel est le premier but d'une étude de l'ajournement. Le second est de modifier ces formules de manière à permettre une comparaison avec les formules habituelles, au besoin, en utilisant des approximations.

II.

Cas général

En versant à l'âge x le montant 1 on s'assure une rente payable annuellement à terme échu par

$$\frac{1}{{}^{\varepsilon}a_x},$$

l'indice ε mentionnant la présence possible de chargements sans préciser leur nombre ni la manière d'en tenir compte. Si les arrérages échus à la fin de la première année ne sont pas touchés, mais utilisés à l'achat d'une nouvelle rente, il y a ajournement d'un an et les arrérages annuels augmentent de

$$\frac{1}{{}^{\varepsilon}a_x}\,\frac{1}{{}^{\varepsilon}a_{x+1}} \text{ pour s'élever à } \frac{1}{{}^{\varepsilon}a_x}\left(1+\frac{1}{{}^{\varepsilon}a_{x+1}}\right).$$

Après deux ajournements, la rente est payable annuellement par

$$\frac{1}{{}^{\varepsilon}a_x}\left(1+\frac{1}{{}^{\varepsilon}a_{x+1}}\right)\left(1+\frac{1}{{}^{\varepsilon}a_{x+2}}\right).$$

Désignons par $\frac{1}{{}_{n|}{}^{\varepsilon}\ddot{a}_x}$ les arrérages annuels de la rente différée, payable la première fois à l'âge $x+n$, acquise par le versement de 1 à l'âge x pour l'achat d'une rente immédiate dont la valeur actuelle est ${}^{\varepsilon}a_x$, et qui a été ajournée $n-1$ fois d'une année, les chargements ε restant fixes. On a la formule

$$\frac{1}{{}_{n|}{}^{\varepsilon}\ddot{a}_x} = \frac{1}{{}^{\varepsilon}a_x}\prod_{\nu=1}^{n-1}\left(1+\frac{1}{{}^{\varepsilon}a_{x+\nu}}\right). \tag{1}$$

Si, lors de chaque ajournement, le versement initial de 1 est répété, la rente différée est à primes annuelles; dans ce cas les arrérages annuels sont définis par la formule suivante

$$\frac{1}{P\left({}_{n|}{}^{\varepsilon}\ddot{a}_x\right)} = \sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{1}{{}_{n-\nu|}{}^{\varepsilon}\ddot{a}_{x+\nu}}. \tag{2}$$

Pour les calculs numériques, il est avantageux d'utiliser des nombres de commutation ${}^{\varepsilon}F_x$ définis par

$${}^{\varepsilon}F_x = \prod_{\nu=0}^{\chi-x}\left(1+\frac{1}{{}^{\varepsilon}a_{x+\nu}}\right), \quad {}^{\varepsilon}F_{\chi+1} = 1, \tag{3}$$

χ étant le dernier âge auquel on admet que l'ajournement peut pratiquement encore avoir lieu.

La formule (1) devient alors

$$\frac{1}{{}_{n|}{}^{\varepsilon}\ddot{a}_x} = \frac{{}^{\varepsilon}F_x - {}^{\varepsilon}F_{x+1}}{{}^{\varepsilon}F_{x+n}}. \tag{4}$$

En introduisant dans (2) la valeur de ${}_{n|}{}^{\varepsilon}\ddot{a}_x$ donnée par (4) et en tenant compte de la définition (3) de ${}^{\varepsilon}F_x$, on obtient

$$\frac{1}{P({}_{n|}{}^{\varepsilon}\ddot{a}_x)} = \frac{{}^{\varepsilon}F_x - {}^{\varepsilon}F_{x+n}}{{}^{\varepsilon}F_{x+n}}. \tag{5}$$

Les trois formules (3), (4) et (5) permettent de lier les trois primes par la relation

$$\frac{1}{P({}_{n|}{}^{\varepsilon}\ddot{a}_x)} = ({}^{\varepsilon}a_x + 1)\frac{1}{{}_{n|}{}^{\varepsilon}\ddot{a}_x} - 1. \tag{6}$$

III.

Primes pures

Lorsque l'on envisage le cas des primes pures, la valeur actuelle ${}^{\varepsilon}a_x$ doit être remplacée par a_x; la formule (3) donne alors

$$F_x = \frac{N_x}{N_{\chi+1}}$$

et les formules (1), (2), (4), (5) et (6) conduisent à des identités. Dans le cas des primes pures l'ajournement conduit donc aux formules habituelles des primes pour rentes différées.

IV.

Primes d'inventaire

1. Frais de gestion payés praenummerando

Si l'on envisage le cas des primes d'inventaire dans lesquelles le chargement α pour frais de gestion est payé *praenummerando*, on peut remplacer par $\ddot{\alpha}$ l'indice ε figurant dans les formules (1) à (6).

La valeur actuelle de la rente immédiate prend la forme

$${}^{\varepsilon}a_x = {}^{\ddot{\alpha}}a_x = a_x + \alpha\,\ddot{a}_x. \tag{7}$$

Les primes ${}_{n|}{}^{\alpha}\ddot{a}_x$ et $P({}_{n|}{}^{\alpha}\ddot{a}_x)$ se calculent avec les formules (4) et (5) au moyen des nombres de commutation ${}^{\alpha}\ddot{F}_x$ établis selon (3), en tenant compte de (7).

Pour pouvoir comparer ces primes à celles que donnent les formules habituelles, on procède à la transformation suivante. De (7) on tire

$$\frac{1}{{}^{\alpha}\ddot{a}_x} = \frac{1}{(1+\alpha)\,a_x}\;\frac{1}{1+\dfrac{\alpha}{(1+\alpha)\,a_x}},$$

$$1+\frac{1}{{}^{\alpha}\ddot{a}_{x+\nu}} = \frac{\ddot{a}_{x+\nu}}{a_{x+\nu}}\;\frac{1}{1+\dfrac{\alpha}{(1+\alpha)\,a_{x+\nu}}},$$

que l'on introduit dans (1), d'où l'on obtient

$${}_{n|}{}^{\alpha}\ddot{a}_x = (1+\alpha)\,{}_{n|}\ddot{a}_x\left(1+\frac{\alpha}{(1+\alpha)\,a_x}\right)\cdots\left(1+\frac{\alpha}{(1+\alpha)\,a_{x+n-1}}\right).$$

Cette expression peut être remplacée par

$${}_{n|}{}^{\alpha}\ddot{a}_x = (1+\alpha)\,{}_{n|}\ddot{a}_x\left(1+\frac{\alpha}{(1+\alpha)\,a_{x+m}}\right)^n,$$

dans laquelle on peut admettre que $0 < m < n-1$.

En ne conservant que les deux premiers termes dans le développement du binome de puissance n, on obtient

$${}_{n|}{}^{\alpha}\ddot{a}_x = (1+\alpha)\,{}_{n|}\ddot{a}_x + \alpha\,{}_{n|}{}^{\alpha}\ddot{\varphi}_x\,\ddot{a}_{x:\overline{n|}} \tag{8}$$

où

$${}_{n|}{}^{\alpha}\ddot{\varphi}_x = \frac{n\,{}_{n|}\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}\;\frac{1}{a_{x+{}_{n|}{}^{\alpha}f_x\cdot(n-1)}}. \tag{9}$$

En partant des formules (6), (7) et (8) on peut écrire

$$P({}_{n|}{}^{\alpha}\ddot{a}_x) = \frac{{}_{n|}\ddot{a}_x + \alpha\,{}_{n|}{}^{\alpha}\ddot{\psi}_x\,\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}} \tag{10}$$

où

$${}_{n|}{}^{\alpha}\ddot{\psi}_x = \frac{{}_{n|}{}^{\alpha}\ddot{\varphi}_x}{1+\alpha\,(1-{}_{n|}{}^{\alpha}\ddot{\varphi}_x)}. \tag{11}$$

Remarques

a) Connaissant les valeurs des primes ${}_{n|}{}^{\alpha}\ddot{a}_x$ et $P({}_{n|}{}^{\alpha}\ddot{a}_x)$ calculées avec les nombres de commutation ${}^{\alpha}\ddot{F}_x$, on peut obtenir, par les formules (8) et (10) les valeurs des fonctions ${}_{n|}{}^{\alpha}\ddot{\varphi}_x$ et ${}_{n|}{}^{\alpha}\ddot{\psi}_x$. Les exemples numériques, calculés avec MR 1950 2,5%, et indiqués dans les *tableaux I et III* montrent que les deux fonctions, prenant la valeur 1 pour $n = 1$, décroissent à peu près linéairement lorsque n augmente; la décroissance est d'autant plus rapide que l'âge x est élevé. Comme les deux fonctions sont peu sensibles à une modification du chargement α, que leurs valeurs correspondantes sont voisines et que les différences provenant d'un changement d'âge sont assez faibles, on peut, en première approximation, admettre que

$$\varphi \cong \psi \cong 1{,}02 - 0{,}02\,n\,.$$

b) Le chargement α étant, en pratique, petit, la formule (11) montre que les valeurs de ${}_{n|}{}^{\alpha}\ddot{\psi}_x$ sont voisines des valeurs correspondantes de ${}_{n|}{}^{\alpha}\ddot{\varphi}_x$. La différence ${}_{n|}{}^{\alpha}\ddot{\varphi}_x - {}_{n|}{}^{\alpha}\ddot{\psi}_x$, qui est nulle si $n = 1$, passe par le maximum

$$1 - \frac{2}{\alpha}\left(\sqrt{1+\alpha} - 1\right) \quad \text{pour } {}_{n|}{}^{\alpha}\ddot{\varphi}_x = \frac{1+\alpha-\sqrt{1+\alpha}}{\alpha} \quad [1]).$$

c) Les valeurs de ${}_{n|}{}^{\alpha}\ddot{\varphi}_x$, calculées avec (8), étant connues, on peut déterminer celles du facteur ${}_{n|}{}^{\alpha}\ddot{f}_x$ au moyen de la formule (9). Le *tableau II* montre que les valeurs du facteur varient peu. Si l'on pose

$$f \cong 0{,}6$$

on peut calculer, avec une bonne approximation, pour $\alpha = 0{,}025$, les valeurs des fonctions ${}_{n|}{}^{\alpha}\ddot{\varphi}_x$ et ${}_{n|}{}^{\alpha}\ddot{\psi}_x$ ainsi que celles des primes ${}_{n|}{}^{\alpha}\ddot{a}_x$ et $P({}_{n|}{}^{\alpha}\ddot{a}_x)$ au moyen des formules (9), (11), (8) et (10).

d) Contrairement aux règles adoptées dans la méthode habituelle, la prime unique et la prime annuelle tiennent compte différemment des chargements pour frais de gestion. Pour ${}_{n|}{}^{\alpha}\ddot{a}_x$, formule (8), le chargement est $\alpha\,{}_{n|}{}^{\alpha}\ddot{\varphi}_x$ pendant le différé, et α pendant le paiement de la rente. Pour $P({}_{n|}{}^{\alpha}\ddot{a}_x)$, formule (10), le chargement est $\alpha\,{}_{n|}{}^{\alpha}\ddot{\psi}_x$ pendant toute la durée.

---

[1]) Si $\alpha = 0{,}025$, le maximum est de 0,006 pour $\varphi = 0{,}503$;
si $\alpha = 0{,}1$, le maximum est de 0,024 pour $\varphi = 0{,}512$.

Il en résulte que la prime annuelle

$$P({}_{n|}{}^{\alpha}\ddot{a}_x) \text{ n'est pas égale à } \frac{{}_{n|}{}^{\alpha}\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}.$$

Par contre, grâce à la relation (2), il y a équivalence entre prime annuelle et application répétée de primes uniques, ce qui n'est pas le cas avec la méthode habituelle.

Pour comparer les primes de rentes différées obtenues par ajournement avec celles que l'on établit par la méthode habituelle, il suffit donc de comparer les chargements pour frais de gestion. Pour cela il faut calculer les fonctions φ et ψ en utilisant, au besoin, l'un des deux procédés approximatifs indiqués.

2. Frais de gestion payés postnummerando

L'indice ε figurant dans les formules (1) à (6) doit être remplacé par α et la rente immédiate est définie par

$$ {}^{\varepsilon}a_x = {}^{\alpha}a_x = (1+\alpha)\,a_x. \tag{12}$$

Les nombres de commutation ${}^{\alpha}F_x$ permettent de calculer les primes ${}_{n|}{}^{\alpha}\ddot{a}_x$ et $P({}_{n|}{}^{\alpha}\ddot{a}_x)$. Pour permettre une comparaison avec les formules habituelles, on transforme l'expression de ces primes en tirant de (12)

$$\frac{1}{{}^{\alpha}a_x} = \frac{1}{(1+\alpha)\,a_x},$$

$$1 + \frac{1}{{}^{\alpha}a_{x+\nu}} = \frac{\ddot{a}_{x+\nu}}{a_{x+\nu}}\left(1 - \frac{\alpha}{(1+\alpha)\,\ddot{a}_{x+\nu}}\right),$$

que l'on introduit dans (1), ce qui donne

$${}_{n|}{}^{\alpha}a_x = (1+\alpha)\,{}_{n|}\ddot{a}_x \frac{1}{1 - \dfrac{\alpha}{(1+\alpha)\,\ddot{a}_{x+1}}} \cdots \frac{1}{1 - \dfrac{\alpha}{(1+\alpha)\,\ddot{a}_{x+n-1}}}.$$

En faisant usage du développement en série

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + \ldots \quad \text{pour } |u| < 1,$$

arrêté à ses deux premiers termes, et en appliquant un procédé identique à celui qui a conduit aux formules (8) et (9), on obtient

$$ {}_{n|}{}^{\alpha}\ddot{a}_x = (1+\alpha)\, {}_{n|}\ddot{a}_x + \alpha\, {}_{n|}{}^{\alpha}\varphi_x\, a_{x:\overline{n-1|}} \tag{13} $$

où

$$ {}_{n|}{}^{\alpha}\varphi_x = \frac{(n-1)\, {}_{n|}\ddot{a}_x}{a_{x:\overline{n-1|}}} \; \frac{1}{\ddot{a}_{x+{}_{n|}{}^{\alpha}f_x \cdot n}}. \tag{14} $$

En tenant compte, dans la formule (6), des expressions (12) et (13), on est conduit à

$$ P({}_{n|}{}^{\alpha}\ddot{a}_x) = \frac{{}_{n|}\ddot{a}_x + \alpha\, {}_{n|}{}^{\alpha}\psi_x\, a_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}} \tag{15} $$

où ${}_{n|}{}^{\alpha}\psi_x$ est lié à ${}_{n|}{}^{\alpha}\varphi_x$ par une relation qui n'est pas aussi simple que (11) mais qui a la forme

$$ \left. \begin{array}{l} {}^{\varepsilon}\psi = \dfrac{{}^{\varepsilon}\varphi + a}{1+b} \\ \text{où } a \text{ et } b \text{ sont petits, de sorte que } {}^{\varepsilon}\psi \simeq {}^{\varepsilon}\varphi. \end{array} \right\} \tag{16} $$

Des remarques semblables à celles du paragraphe précédent peuvent être faites ici, sauf en ce qui concerne la différence ${}^{\alpha}\varphi - {}^{\alpha}\psi$. Les *tableaux I à III* indiquent les valeurs obtenues pour ${}_{n|}{}^{\alpha}\varphi_x$, ${}_{n|}{}^{\alpha}f_x$ et ${}_{n|}{}^{\alpha}\psi_x$; elles sont voisines de celles qui ont été indiquées précédemment.

V.

Primes brutes

Le chargement β peut être considéré comme servant à couvrir non seulement des frais d'acquisition, mais également des frais d'encaissement. Il arrive que l'on ne tienne compte de frais d'encaissement que dans les primes périodiques; cette méthode, qui rend l'assurance à primes périodiques plus chère que celle à prime unique et rompt la symétrie entre les formules, n'est pas prise en considération dans cette étude.

Il y a lieu de distinguer, à propos des primes brutes, deux cas, selon que l'on tient compte, dans les versements faits par l'assuré, uniquement des commissions d'acquisition qu'ils occasionnent, ou que l'on base l'ajournement sur les primes brutes de la rente immédiate.

A. Chargements exacts pour commission d'acquisition

La commission d'acquisition β est comptée sur la prime unique ou sur la valeur actuelle des primes périodiques. Les primes brutes dépendent des primes d'inventaire définies précédemment et se calculent au moyen des formules

$$\left.\begin{aligned} {}_{n|}^{\ddot{\alpha},\beta}\ddot{a}_x &= \frac{{}_{n|}^{\ddot{\alpha}}\ddot{a}_x}{1-\beta}, & P({}_{n|}^{\ddot{\alpha},\beta}\ddot{a}_x) &= \frac{P({}_{n|}^{\ddot{\alpha}}\ddot{a}_x)}{1-\beta}, \\ {}_{n|}^{\alpha,\beta}\ddot{a}_x &= \frac{{}_{n|}^{\alpha}\ddot{a}_x}{1-\beta}, & P({}_{n|}^{\alpha,\beta}\ddot{a}_x) &= \frac{P({}_{n|}^{\alpha}\ddot{a}_x)}{1-\beta}. \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

Les développements et remarques faits au sujet des primes d'inventaire s'appliquent également à ces primes brutes.

B. Ajournement basé sur les primes brutes de la rente immédiate

Tout en admettant que les commissions d'acquisition ne sont payées que sur la valeur actuelle des versements de l'assuré, on peut développer l'ajournement en utilisant les primes brutes de la rente immédiate. Il en résulte un renchérissement de la rente qui se marque par une augmentation des chargements inclus dans la prime pour frais de gestion.

1. Frais de gestion payés praenummerando

Dans les formules (1) à (6), l'indice ε doit être remplacé par

$$\ddot{\alpha},\beta \quad \text{s'il affecte} \quad {}^{\varepsilon}a_x \text{ et } {}^{\varepsilon}F_x,$$

$$\ddot{\alpha},\beta\Sigma \quad \text{s'il affecte} \quad {}_{n|}^{\varepsilon}\ddot{a}_x \text{ et } P({}_{n|}^{\varepsilon}\ddot{a}_x),$$

Σ indiquant le cumul des chargements β par ajournement. La rente immédiate s'exprime par

$$^{\varepsilon}a_x = {}^{\ddot{\alpha},\beta}a_x = \frac{a_x + \alpha\,\ddot{a}_x}{1-\beta} \qquad (18)$$

et l'on peut calculer les primes ${}_{n|}^{\ddot{\alpha},\beta\Sigma}\ddot{a}_x$ et $P({}_{n|}^{\ddot{\alpha},\beta\Sigma}\ddot{a}_x)$ avec les nombres de commutation ${}^{\ddot{\alpha},\beta}F_x$. Pour les mêmes raisons que précédemment on opère une transformation en tirant de (18)

$$\frac{1}{{}^{\ddot{\alpha},\beta}a_x} = \frac{1-\beta}{(1+\alpha)\,a_x}\,\frac{1}{1+\dfrac{\alpha}{(1+\alpha)\,a_x}},$$

$$1+\frac{1}{{}^{\ddot{\alpha},\beta}a_{x+\nu}} = \frac{\ddot{a}_{x+\nu}}{a_{x+\nu}}\,\frac{1-\dfrac{\beta}{(1+\alpha)\,\ddot{a}_{x+\nu}}}{1+\dfrac{\alpha}{(1+\alpha)\,a_{x+\nu}}},$$

que l'on introduit dans (1). Par des procédés analogues à ceux qui ont été utilisés pour les primes d'inventaire, on arrive à

$${}_{n|}{}^{\ddot{\alpha},\beta\Sigma}\ddot{a}_x = \frac{1+\alpha}{1-\beta}\,{}_{n|}\ddot{a}_x\left(1+\frac{\alpha n}{(1+\alpha)\,a_{x+m}}\right)\left(1+\frac{\beta(n-1)}{(1+\alpha)\,\ddot{a}_{x+m'}}\right)$$

où $0 < m < n-1$ et $1 < m' < n-1$.

En effectuant le produit des expressions entre parenthèses et en négligeant ensuite le terme le plus petit, on obtient

$${}_{n|}{}^{\ddot{\alpha},\beta\Sigma}\ddot{a}_x = \frac{(1+\alpha)\,{}_{n|}\ddot{a}_x + \left(\alpha+\beta\,\dfrac{n-1}{n}\right){}_{n|}{}^{\ddot{\alpha},\beta\Sigma}\varphi_x\,\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}{1-\beta} \tag{19}$$

où

$${}_{n|}{}^{\ddot{\alpha},\beta\Sigma}\varphi_x = \frac{n\,{}_{n|}\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}\,\frac{\dfrac{\alpha}{a_{x+n|}{}^{\ddot{\alpha},\beta\Sigma}f_{x\cdot(n-1)}} + \dfrac{\beta\,\dfrac{n-1}{n}}{\ddot{a}_{x+n|}{}^{\ddot{\alpha},\beta\Sigma}f_{x\cdot n}}}{\alpha+\beta\,\dfrac{n-1}{n}}. \tag{20}$$

Les formules (6), (18) et (19) conduisent à

$$P({}_{n|}{}^{\ddot{\alpha},\beta\Sigma}\ddot{a}_x) = \frac{{}_{n|}\ddot{a}_x + \left[\left(\alpha+\beta\,\dfrac{n-1}{n}\right){}_{n|}{}^{\ddot{\alpha},\beta\Sigma}\psi_x - \beta\,\dfrac{n-1}{n}\,\dfrac{{}_{n|}\ddot{a}_x}{\ddot{a}_x}\right]\ddot{a}_x}{(1-\beta)\,\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}. \tag{21}$$

Les fonctions ${}_{n|}{}^{\ddot{\alpha},\beta\Sigma}\psi_x$ et ${}_{n|}{}^{\ddot{\alpha},\beta\Sigma}\varphi_x$ sont liées par une relation de la forme (16). Les *tableaux I et III* montrent que leurs valeurs diffèrent peu de celles que prennent les fonctions de même genre se rapportant à des primes d'inventaire.

Pour que les résultats de l'ajournement, exprimés par les formules (19) et (21) puissent être comparés à ceux que fournissent les formules habituelles des rentes différées, il faut calculer les rapports.

$$ {}_{n|}^{\alpha,\beta\Sigma}\Phi_x = \frac{\alpha+\beta\dfrac{n-1}{n}}{\alpha}\;{}_{n|}^{\ddot{\alpha},\beta\Sigma}\varphi_x \quad \text{et} \quad {}_{n|}^{\ddot{\alpha},\beta\Sigma}\Psi_x = \frac{\left(\alpha+\beta\dfrac{n-1}{n}\right){}_{n|}^{\ddot{\alpha},\beta\Sigma}\psi_x-\beta\dfrac{n-1}{n}\dfrac{{}_{n|}\ddot{a}_x}{\ddot{a}_x}}{\alpha}. $$

Les valeurs obtenues pour les exemples choisis sont indiquées dans le *tableau IV*.

2. *Frais de gestion payés postnummerando*

La rente immédiate étant définie par

$$ {}^{\varepsilon}a_x = {}^{\alpha,\beta}a_x = \frac{1+\alpha}{1-\beta}\,a_x, \tag{22} $$

on peut poser $\dfrac{1+\alpha}{1-\beta} = 1+\alpha_\beta$ d'où $\alpha_\beta = \dfrac{\alpha+\beta}{1-\beta}$; il en résulte que ${}_{n|}^{\alpha,\beta\Sigma}\ddot{a}_x = {}_{n|}^{\alpha\beta}\ddot{a}_x$ et $P({}_{n|}^{\alpha,\beta\Sigma}\ddot{a}_x) = P({}_{n|}^{\alpha\beta}\ddot{a}_x)$ et l'on obtient directement, à partir des formules (13) à (15)

$$ {}_{n|}^{\alpha,\beta\Sigma}\ddot{a}_x = \frac{(1+\alpha)\,{}_{n|}\ddot{a}_x + (\alpha+\beta)\,{}_{n|}^{\alpha,\beta\Sigma}\varphi_x\,a_{x:\overline{n-1}|}}{1-\beta} \tag{23} $$

où

$$ {}_{n|}^{\alpha,\beta\Sigma}\varphi_x = \frac{(n-1)\,{}_{n|}\ddot{a}_x}{a_{x:\overline{n-1}|}}\;\frac{1}{\ddot{a}_{x+n|}{}^{\alpha,\beta\Sigma}f_{x\cdot n}}, \tag{24} $$

$$ P({}_{n|}^{\alpha,\beta\Sigma}\ddot{a}_x) = \frac{{}_{n|}\ddot{a}_x + \left[(\alpha+\beta)\,{}_{n|}^{\alpha,\beta\Sigma}\psi_x - \beta\,\dfrac{{}_{n|}\ddot{a}_x}{a_x}\right]a_x}{(1-\beta)\,\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}. \tag{25} $$

${}_{n|}^{\alpha,\beta\Sigma}\psi_x$ et ${}_{n|}^{\alpha,\beta\Sigma}\varphi_x$ sont liés par la relation (16). Les *tableaux I à III* donnent les valeurs de ces fonctions et celles du facteur ${}_{n|}^{\alpha,\beta\Sigma}f_x$ pour les exemples considérés précédemment. Les valeurs correspondantes des rapports

$$ {}_{n|}^{\alpha,\beta\Sigma}\Phi_x = \frac{\alpha+\beta}{\alpha}\,{}_{n|}^{\alpha,\beta\Sigma}\varphi_x \quad \text{et} \quad {}_{n|}^{\alpha,\beta\Sigma}\Psi_x = \frac{(\alpha+\beta)\,{}_{n|}^{\alpha,\beta\Sigma}\psi_x - \beta\,\dfrac{{}_{n|}\ddot{a}_x}{a_x}}{\alpha} $$

permettant de comparer les résultats de l'ajournement à ceux des formules habituelles pour primes de rentes différées, sont indiquées dans le *tableau IV*.

VI.

Mortalité avec sélection

La sélection envisagée dans ce chapitre n'affecte que la première année d'assurance, comme c'est le cas pour les tables MR 1950/FR 1946 [1]), de telle sorte que

$$q_{[x]} < q_x \text{ et } q_{[x]+\nu} = q_{x+\nu} \text{ si } \nu \geqq 1 .$$

Lorsque l'on fait intervenir le processus de l'ajournement, on peut soit limiter l'effet de la sélection à la première année d'assurance, soit l'étendre à chaque ajournement.

A. Sélection à partir du début de l'assurance

Les formules générales (1) et (2) doivent être modifiées et deviennent

$$\frac{1}{{}_{n|}{}^{\varepsilon}\ddot{a}_{[x]}} = \frac{1}{{}^{\varepsilon}a_{[x]}} \prod_{\nu=1}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{{}^{\varepsilon}a_{x+\nu}}\right), \tag{26}$$

$$\frac{1}{P({}_{n|}{}^{\varepsilon}\ddot{a}_{[x]})} = \frac{1}{{}_{n|}{}^{\varepsilon}\ddot{a}_{[x]}} + \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{1}{{}_{n-\nu|}{}^{\varepsilon}\ddot{a}_{x+\nu}} . \tag{27}$$

Les nombres de commutation ${}^{\varepsilon}F_x$ restant définis, comme précédemment, par (3), les formules (4) et (5) sont remplacées par

$$\frac{1}{{}_{n|}{}^{\varepsilon}\ddot{a}_{[x]}} = \frac{1}{{}^{\varepsilon}a_{[x]}} \frac{{}^{\varepsilon}F_{x+1}}{{}^{\varepsilon}F_{x+n}}, \tag{28}$$

$$\frac{1}{P({}_{n|}{}^{\varepsilon}\ddot{a}_{[x]})} = \left(1 + \frac{1}{{}^{\varepsilon}a_{[x]}}\right) \frac{{}^{\varepsilon}F_{x+1}}{{}^{\varepsilon}F_{x+n}} - 1 . \tag{29}$$

Par contre toutes les autres formules établies précédemment, la (6) y compris, ne nécessitent pas d'autre changement, pour être valables dans le cas envisagé ici, que de remplacer x par $[x]$.

En comparant les formules des primes pour rentes différées, établies par ajournement sans et avec sélection à partir du début de l'assurance, on démontre que les différences

$$\begin{gathered} {}_{n|}{}^{\varepsilon}\varphi_{[x]} - {}_{n|}{}^{\varepsilon}\varphi_x , \\ {}_{n|}{}^{\varepsilon}f_{[x]} - {}_{n|}{}^{\varepsilon}f_x , \\ {}_{n|}{}^{\varepsilon}\psi_{[x]} - {}_{n|}{}^{\varepsilon}\psi_x , \end{gathered}$$

[1]) Technischer Aufbau der gemeinsamen Rententarife, 10. Mai 1950.

sont si petites qu'elles sont négligeables; elles sont même nulles pour φ et f lorsque les frais de gestion sont payés *postnummerando*. Il est utile de faire intervenir, dans cette démonstration, la relation

$$\frac{{}_{n|}{}^{\varepsilon}\ddot{a}_x}{{}_{n|}{}^{\varepsilon}\ddot{a}_{[x]}} = \frac{{}^{\varepsilon}a_x}{{}^{\varepsilon}a_{[x]}}$$

obtenue au moyen de (3), (4) et (28), et de tenir compte de la formule (33) qui sera établie plus loin.

B. Sélection à partir de chaque ajournement

Si, pour l'ajournement, on utilise des primes de rentes immédiates calculées avec sélection, on fait agir celle-ci pendant toute la durée d'assurance. Il en résulte une augmentation du prix de la rente.

a) Cas général

Dans les formules (1), (2), (4), (5) et (6) il suffit

de mettre entre crochets [ ] les âges x, $x+\nu$, $x+1$ et $x+n$, de faire suivre les crochets d'un $\sum$ indiquant le cumul de la sélection, dans les primes ${}_{n|}{}^{\varepsilon}\ddot{a}$ et $P({}_{n|}{}^{\varepsilon}\ddot{a})$ de la rente différée. (30)

La formule (3) devient

$$^{\varepsilon}F_{[x]} = \prod_{\nu=0}^{\chi-x}\left(1 + \frac{1}{^{\varepsilon}a_{[x+\nu]}}\right), \quad ^{\varepsilon}F_{[\chi+1]} = 1\,. \tag{31}$$

b) Primes pures

Si on laisse tomber les chargements dans (1) modifié par (30), on trouve

$${}_{n|}\ddot{a}_{[x]\Sigma} = {}_{n|}\ddot{a}_{[x]}\prod_{\nu=1}^{n-1}\frac{N_{x+\nu}}{N_{[x+\nu]}}\,. \tag{32}$$

Dans la table MR 1950/FR 1946, il est admis que

$$q_{[x]} = 0{,}5\, q_x\,,$$

d'où il résulte que

$$D_x = D_{[x]}\frac{1-q_{[x]}}{1-2\,q_{[x]}} \cong D_{[x]}\,(1+q_{[x]})\,,$$

$$\frac{N_x}{N_{[x]}} \cong 1 + \frac{q_{[x]}}{\ddot{a}_{[x]}}\,. \tag{33}$$

En tenant compte de (33) dans (32) on peut écrire, après avoir procédé à des approximations,

$$_{n|}\ddot{a}_{[x]\Sigma} = (1+Q)\, _{n|}\ddot{a}_{[x]} \text{ où } Q = (n-1)\frac{q_{[x+m']}}{\ddot{a}_{[x+m']}}, \quad 1 < m' < n-1. \qquad (34)$$

La formule (6) modifiée par (30) et la relation (34) conduisent à

$$P(_{n|}\ddot{a}_{[x]\Sigma}) = P(_{n|}\ddot{a}_{[x]})\frac{1+Q}{1-Q\,P(_{n|}\ddot{a}_{[x]})}.$$

c) Primes d'inventaire

1. Frais de gestion payés praenummerando

La rente immédiate est définie par

$$^{\varepsilon}a_{[x]} = {}^{\ddot{\alpha}}a_{[x]} = a_{[x]} + \alpha\,\ddot{a}_{[x]}. \qquad (35)$$

Les nombres de commutation $^{\ddot{\alpha}}F_{[x]}$, établis selon (31), permettent de calculer la prime unique $_{n|}{}^{\ddot{\alpha}}\ddot{a}_{[x]\Sigma}$ et la prime annuelle correspondante.

Pour transformer la formule de ces primes, on tire de (35)

$$\frac{1}{^{\ddot{\alpha}}a_{[x]}} = \frac{1}{(1+\alpha)\,a_{[x]}}\,\frac{1}{1+\dfrac{\alpha}{(1+\alpha)\,a_{[x]}}},$$

$$1+\frac{1}{^{\ddot{\alpha}}a_{[x+\nu]}} = \frac{\ddot{a}_{[x+\nu]}}{a_{[x+\nu]}}\,\frac{1}{1+\dfrac{\alpha}{(1+\alpha)\,a_{[x+\nu]}}},$$

que l'on introduit dans (1) modifié par (30), ce qui donne, en tenant compte de (32) et en faisant usage de la méthode utilisée jusqu'ici

$$_{n|}{}^{\ddot{\alpha}}\ddot{a}_{[x]\Sigma} = (1+\alpha)\, _{n|}\ddot{a}_{[x]\Sigma} + \alpha\, _{n|}{}^{\ddot{\alpha}}\varphi_{[x]\Sigma}\, \ddot{a}_{[x]:\overline{n}|} \qquad (36)$$

où

$$_{n|}{}^{\ddot{\alpha}}\varphi_{[x]\Sigma} = \frac{n\, _{n|}\ddot{a}_{[x]\Sigma}}{\ddot{a}_{[x]:\overline{n}|}}\,\frac{1}{a_{[x+\, _{n|}{}^{\ddot{\alpha}}t_{[x]\Sigma}\cdot(n-1)]}}. \qquad (37)$$

Pour ne pas avoir à calculer $_{n|}\ddot{a}_{[x]\Sigma}$, il est préférable de faire intervenir $_{n|}\ddot{a}_{[x]}$ à sa place dans (36) et (37). On tient alors compte de (34) et l'on peut écrire, après approximation, .

$$ {}_{n|}^{\ddot{\alpha}}\ddot{a}_{[x]\Sigma} = (1+\alpha)\, {}_{n|}\ddot{a}_{[x]} + \alpha\, {}_{n|}^{\ddot{\alpha}}\varphi^{*}_{[x]\Sigma}\, \ddot{a}_{[x]:\overline{n}|} \tag{38} $$

où

$$ {}_{n|}^{\ddot{\alpha}}\varphi^{*}_{[x]\Sigma} = \frac{n\, {}_{n|}\ddot{a}_{[x]}}{\ddot{a}_{[x]:\overline{n}|}} \left(\frac{1}{a_{[x+{}_{n|}^{\ddot{\alpha}}t^{*}_{[x]\Sigma}\cdot(n-1)]}} + \frac{\frac{1+\alpha}{\alpha}\,\frac{n-1}{n}\, q_{[x+{}_{n|}^{\ddot{\alpha}}t^{*}_{[x]\Sigma}\cdot n]}}{\ddot{a}_{[x+{}_{n|}^{\ddot{\alpha}}t^{*}_{[x]\Sigma}\cdot n]}} \right), \tag{39} $$

l'astérisque * indiquant que le cumul de la sélection agit exclusivement sur la fonction φ, et non sur la prime pure.

On obtient également, en partant de (6) modifié par (30),

$$ P({}_{n|}^{\ddot{\alpha}}\ddot{a}_{[x]\Sigma}) = \frac{{}_{n|}\ddot{a}_{[x]} + \alpha\, {}_{n|}^{\ddot{\alpha}}\psi^{*}_{[x]\Sigma}\, \ddot{a}_{[x]}}{\ddot{a}_{[x]:\overline{n}|}} \tag{40} $$

où

$$ {}_{n|}^{\ddot{\alpha}}\psi^{*}_{[x]\Sigma} = \frac{{}_{n|}^{\ddot{\alpha}}\varphi^{*}_{[x]\Sigma}}{1+\alpha\,(1-{}_{n|}^{\ddot{\alpha}}\varphi^{*}_{[x]\Sigma})}. \tag{41} $$

Les remarques faites au sujet de la formule (11) s'appliquent également à (41).

2. Frais de gestion payés postnummerando

Voici les formules, sans indiquer le détail des calculs.

$$ {}^{\varepsilon}a_{[x]} = {}^{\alpha}a_{[x]} = (1+\alpha)\, a_{[x]}, \tag{42} $$

$$ {}_{n|}^{\alpha}\ddot{a}_{[x]\Sigma} = (1+\alpha)\, {}_{n|}\ddot{a}_{[x]} + \alpha\, {}_{n|}^{\alpha}\varphi^{*}_{[x]\Sigma}\, a_{[x]:\overline{n-1}|}, \tag{43} $$

$$ {}_{n|}^{\alpha}\varphi^{*}_{[x]\Sigma} = \frac{(n-1)\, {}_{n|}\ddot{a}_{[x]}}{a_{[x]:\overline{n-1}|}}\; \frac{1+\frac{1+\alpha}{\alpha}\, q_{[x+{}_{n|}^{\alpha}t^{*}_{[x]\Sigma}\cdot n]}}{\ddot{a}_{[x+{}_{n|}^{\alpha}t^{*}_{[x]\Sigma}\cdot n]}}, \tag{44} $$

$$ P({}_{n|}^{\alpha}\ddot{a}_{[x]\Sigma}) = \frac{{}_{n|}\ddot{a}_{[x]} + \alpha\, {}_{n|}^{\alpha}\psi^{*}_{[x]\Sigma}\, a_{[x]}}{\ddot{a}_{[x]:\overline{n}|}}, \tag{45} $$

φ et ψ remplissent la condition (16).

d) Primes brutes

Si les frais de gestion sont payés postnummerando et que l'ajournement est basé sur les primes brutes de la rente immédiate s'exprimant par

$$^{\varepsilon}a_{[x]} = {}^{\alpha,\beta}a_{[x]} = \frac{1+\alpha}{1-\beta}\, a_{[x]} \;^{1)}, \tag{46}$$

on peut poser $\dfrac{1+\alpha}{1-\beta} = 1 + \alpha_\beta$, d'où $\alpha_\beta = \dfrac{\alpha+\beta}{1-\beta}$; il en résulte que

$$_{n|}{}^{\alpha,\beta\Sigma}\ddot{a}_{[x]\Sigma} = {}_{n|}{}^{\alpha_\beta}\ddot{a}_{[x]\Sigma} \quad \text{et} \quad P({}_{n|}{}^{\alpha,\beta\Sigma}\ddot{a}_{[x]\Sigma}) = P({}_{n|}{}^{\alpha_\beta}\ddot{a}_{[x]\Sigma}).$$

Les formules (43) à (45) donnent directement

$$_{n|}{}^{\alpha,\beta\Sigma}\ddot{a}_{[x]\Sigma} = \frac{(1+\alpha)\, {}_{n|}\ddot{a}_{[x]} + (\alpha+\beta)\, {}_{n|}{}^{\alpha,\beta\Sigma}\varphi^{*}_{[x]\Sigma}\, a_{[x]:\overline{n-1|}}}{1-\beta}, \tag{47}$$

$$_{n|}{}^{\alpha,\beta\Sigma}\varphi^{*}_{[x]\Sigma} = \frac{(n-1)\, {}_{n|}\ddot{a}_{[x]}}{a_{[x]:\overline{n-1|}}} \cdot \frac{1 + \dfrac{1+\alpha}{\alpha+\beta}\, q_{[x+{}_{n|}{}^{\alpha,\beta\Sigma}f^{*}_{[x]\Sigma}\cdot n]}}{\ddot{a}_{[x+{}_{n|}{}^{\alpha,\beta\Sigma}f^{*}_{[x]\Sigma}\cdot n]}}, \tag{48}$$

$$P({}_{n|}{}^{\alpha,\beta\Sigma}\ddot{a}_{[x]\Sigma}) = \frac{{}_{n|}\ddot{a}_{[x]} + \left[(\alpha+\beta)\, {}_{n|}{}^{\alpha,\beta\Sigma}\psi^{*}_{[x]\Sigma} - \beta\, \dfrac{{}_{n|}\ddot{a}_{[x]}}{a_{[x]}}\right] a_{[x]}}{(1-\beta)\, \ddot{a}_{[x]:\overline{n|}}}. \tag{49}$$

Les fonctions $_{n|}{}^{\alpha,\beta\Sigma}\varphi^{*}_{[x]\Sigma}$ et $_{n|}{}^{\alpha,\beta\Sigma}\psi^{*}_{[x]\Sigma}$ sont liées par une relation de la forme (16). Les *tableaux I et III* montrent que, par suite du cumul de la sélection, leurs valeurs sont un peu plus élevées que celles qui ont été établies précédemment. Il est d'ailleurs facile de dissocier, dans la formule (48) la partie de φ se rapportant au cumul de la sélection. Dans le *tableau II* on voit que les valeurs du facteur $_{n|}{}^{\alpha,\beta\Sigma}f^{*}_{[x]\Sigma}$ sont, comme celles des autres facteurs, voisines de 0,6. Enfin le *tableau IV* donne les valeurs des rapports

$$_{n|}{}^{\alpha,\beta\Sigma}\Phi^{*}_{[x]\Sigma} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha}\, {}_{n|}{}^{\alpha,\beta\Sigma}\varphi^{*}_{[x]\Sigma},$$

$$_{n|}{}^{\alpha,\beta\Sigma}\Psi^{*}_{[x]\Sigma} = \frac{(\alpha+\beta)\, {}_{n|}{}^{\alpha,\beta\Sigma}\psi^{*}_{[x]\Sigma} - \beta\, \dfrac{{}_{n|}\ddot{a}_{[x]}}{a_{[x]}}}{\alpha},$$

---

[1]) La combinaison connue, dans la pratique, sous le nom de «rente différée à volonté» répond aux mêmes conditions.

permettant la comparaison avec les résultats fournis par les formules habituelles pour rentes différées.

VII.

Conclusion

Le procédé de l'ajournement, qui permet de calculer les primes des rentes différées au moyen de celles des rentes immédiates, établit des liens étroits entre les deux genres de rentes. L'emploi d'un nombre spécial F de commutation facilite les calculs.

Les primes des rentes différées, obtenues par ajournement, se distinguent de celles qui sont établies selon la méthode habituelle, surtout par le fait que leurs chargements pour frais de gestion ne sont pas fixes. Ils dépendent en effet des paramètres de la prime, et cela par l'intermédiaire de fonctions, désignées par φ pour la prime unique et ψ pour la prime annuelle, sur la variation desquelles on peut faire les remarques suivantes:

a) partant de la valeur 1, elles décroissent à peu près linéairement lorsque la durée du différé augmente;

b) la décroissance est d'autant plus rapide que l'âge d'entrée est élevé;

c) les autres paramètres ont une influence très faible à l'exception du cumul de la sélection, s'il agit exclusivement sur φ et ψ, et qui tend à diminuer fortement l'effet de l'âge d'entrée;

d) les valeurs correspondantes de φ et ψ sont très voisines.

La prime annuelle et la prime unique ne font pas intervenir de la même manière les chargements pour frais de gestion. Elles sont liées par une relation différente de la relation habituelle mais grâce à laquelle il est possible d'assurer les mêmes prestations par des primes annuelles que par une répétition de primes uniques.

Afin que ses résultats soient le plus simple possible, la théorie de l'ajournement doit être basée sur un système coordonné de chargements; pour la gestion, il faut que les chargements soient comptés de la même façon dans la rente immédiate et dans la rente différée, soit *praenummerando*, soit *postnummerando*; les chargements pour frais d'acquisition et d'encaissement doivent être identiques dans la prime unique et dans la prime annuelle. Pour un cas pratique dont les caractéristiques sont différentes, on établit facilement la formule de passage.

Le cas de l'ajournement basé sur des primes brutes de la rente immédiate a été examiné parce qu'on le trouve dans la pratique. Mais dans un système logique, on ne doit tenir compte que des formules qui ont été indiquées avec chargements exacts pour commission d'acquisition.

Les formules de primes pour rentes différées qui ont été établies par la méthode de l'ajournement doivent être appliquées en admettant que la durée du différé est fixée contractuellement et ne peut pas être choisie «à volonté», quel que soit l'état de santé de l'assuré. Aussi convient-il de ne prendre en considération que les formules indiquées avec sélection à partir du début de l'assurance, et non celles dans lesquelles la sélection agit à partir de chaque ajournement.

Tableau I MR 1950 2,5 %

x	n	$_{n\|}\ddot{\alpha}\varphi_x$ $\alpha = 0{,}025$	$_{n\|}\ddot{\alpha}\varphi_x$ $\alpha = 0{,}1$	$_{n\|}^{\alpha}\varphi_x$ $\alpha = 0{,}025$	$_{n\|}^{\ddot{\alpha},\beta\Sigma}\varphi_x$ $\alpha = 0{,}025$ $\beta = 0{,}025$	$_{n\|}^{\alpha,\beta\Sigma}\varphi_x$ $\alpha = 0{,}025$ $\beta = 0{,}025$	$_{n\|}^{\alpha,\beta\Sigma}\varphi^*_{[x]\Sigma}$ $\alpha = 0{,}025$ $\beta = 0{,}025$
30	1	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	2	0,982	0,983	0,963	0,972	0,964	0,983
	4	0,944	0,948	0,927	0,933	0,928	0,947
	6	0,907	0,913	0,890	0,896	0,892	0,911
	8	0,870	0,878	0,853	0,859	0,856	0,876
	10	0,832	0,843	0,816	0,823	0,820	0,840
	20	0,646	0,665	0,632	0,641	0,639	0,660
	30	0,459	0,482	0,447	0,458	0,455	0,480
	40	0,275	0,298	0,265	0,276	0,273	0,304
40	10	0,805	0,817	0,787	0,796	0,791	0,823
	20	0,584	0,604	0,567	0,579	0,574	0,612
	30	0,359	0,382	0,345	0,357	0,353	0,399
50	10	0,761	0,775	0,737	0,749	0,743	0,806
	20	0,482	0,504	0,462	0,476	0,470	0,545
60	10	0,681	0,699	0,652	0,667	0,658	0,799

Tableau II MR 1950 2,5 %

x	n	$_{n\|}\ddot{\alpha}f_x$ $\alpha = 0{,}025$	$_{n\|}\ddot{\alpha}f_x$ $\alpha = 0{,}1$	$_{n\|}^{\alpha}f_x$ $\alpha = 0{,}025$	$_{n\|}^{\alpha,\beta\Sigma}f_x$ $\alpha = 0{,}025$ $\beta = 0{,}025$	$_{n\|}^{\alpha,\beta\Sigma}f^*_{[x]\Sigma}$ $\alpha = 0{,}025$ $\beta = 0{,}025$
30	2	0,580	0,660	0,530	0,585	0,550
	4	0,540	0,660	0,553	0,585	0,570
	6	0,550	0,656	0,552	0,588	0,578
	8	0,553	0,656	0,546	0,585	0,584
	10	0,554	0,657	0,550	0,588	0,585
	20	0,576	0,664	0,570	0,602	0,603
	30	0,600	0,677	0,591	0,620	0,627
	40	0,629	0,698	0,618	0,644	0,663
40	10	0,554	0,638	0,549	0,577	0,576
	20	0,579	0,654	0,571	0,598	0,603
	30	0,609	0,678	0,597	0,623	0,640
50	10	0,556	0,628	0,545	0,574	0,574
	20	0,587	0,655	0,575	0,601	0,613
60	10	0,562	0,631	0,551	0,576	0,583

Tableau III MR 1950 2,5 %

x	n	${}_{n\rvert}{}^{\ddot{\alpha}}\psi_x$ $\alpha = 0{,}025$	${}_{n\rvert}{}^{\ddot{\alpha}}\psi_x$ $\alpha = 0{,}1$	${}_{n\rvert}{}^{\alpha}\psi_x$ $\alpha = 0{,}025$	${}_{n\rvert}{}^{\ddot{\alpha},\beta\Sigma}\psi_x$ $\alpha = 0{,}025$ $\beta = 0{,}025$	${}_{n\rvert}{}^{\alpha,\beta\Sigma}\psi_x$ $\alpha = 0{,}025$ $\beta = 0{,}025$	${}_{n\rvert}{}^{\alpha,\beta\Sigma}\psi^*_{[x]\Sigma}$ $\alpha = 0{,}025$ $\beta = 0{,}025$
30	1	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	2	0,981	0,981	0,980	0,974	0,981	0,991
	4	0,943	0,943	0,942	0,935	0,942	0,958
	6	0,905	0,905	0,904	0,896	0,904	0,921
	8	0,867	0,867	0,865	0,858	0,866	0,884
	10	0,829	0,830	0,827	0,820	0,827	0,846
	20	0,641	0,643	0,637	0,633	0,638	0,658
	30	0,453	0,459	0,448	0,448	0,449	0,474
	40	0,270	0,278	0,264	0,267	0,266	0,296
40	10	0,802	0,803	0,798	0,792	0,799	0,830
	20	0,578	0,581	0,572	0,569	0,573	0,610
	30	0,353	0,360	0,345	0,347	0,347	0,392
50	10	0,756	0,758	0,751	0,744	0,751	0,812
	20	0,475	0,481	0,466	0,466	0,467	0,542
60	10	0,676	0,678	0,667	0,660	0,667	0,803

Tableau IV $\alpha = \beta = 0{,}025$ MR 1950 2,5 %

x	n	${}_{n\rvert}{}^{\ddot{\alpha},\beta\Sigma}\Phi_x$	${}_{n\rvert}{}^{\alpha,\beta\Sigma}\Phi_x$	${}_{n\rvert}{}^{\alpha,\beta\Sigma}\Phi^*_{[x]\Sigma}$	${}_{n\rvert}{}^{\ddot{\alpha},\beta\Sigma}\Psi_x$	${}_{n\rvert}{}^{\alpha,\beta\Sigma}\Psi_x$	${}_{n\rvert}{}^{\alpha,\beta\Sigma}\Psi^*_{[x]\Sigma}$
30	1	1,000	2,000	2,000	1,000	1,000	1,000
	2	1,458	1,928	1,966	0,998	0,999	1,020
	4	1,633	1,856	1,894	0,993	0,995	1,026
	6	1,642	1,785	1,823	0,985	0,987	1,021
	8	1,611	1,712	1,751	0,972	0,975	1,011
	10	1,564	1,640	1,679	0,957	0,960	0,998
	20	1,251	1,277	1,319	0,838	0,842	0,884
	30	0,900	0,910	0,960	0,657	0,659	0,708
	40	0,545	0,546	0,607	0,428	0,427	0,487
40	10	1,512	1,582	1,646	0,943	0,946	1,008
	20	1,128	1,149	1,224	0,782	0,785	0,859
	30	0,702	0,705	0,798	0,535	0,534	0,625
50	10	1,423	1,486	1,612	0,916	0,919	1,040
	20	0,928	0,940	1,091	0,676	0,677	0,825
60	10	1,267	1,317	1,597	0,857	0,860	1,132

Bibliographie

[1] *K. Kihm:* Altersrenten auf unbestimmte Verfallzeit ohne und mit Rückgewähr der Einlagen im Todesfall. Bulletin de l'Association des Actuaires suisses, 1912, vol. 7.

[2] Technischer Aufbau der gemeinsamen Rententarife, 10. Mai 1950.

Zusammenfassung

Durch die fortlaufende und wiederholte Anwendung von Prämien sofort beginnender Leibrenten ist es möglich, die einmaligen oder periodischen Prämien von aufgeschobenen Leibrenten zu errechnen. Der Verfasser gibt die Formeln dieser Prämien bekannt, die im allgemeinen von denjenigen abweichen, zu denen die übliche Methode führt. Er gibt auch die Formeln an, welche die nach den beiden Methoden berechneten Prämien zu vergleichen erlaubt, und liefert die Regeln für eine Annäherungsberechnung.

Riassunto

Con l'impiego successivo e ripetuto di rendite immediate, è possibile ottenere i premi, unici o periodici, di rendite differite. L'autore indica le formule di questi premi, che differiscono in genere da quelle alle quali conduce il metodo abituale. Esso ci indica ugualmente le formule permettenti di comparare i premi calcolati secondo i due metodi e fornisce le regole di un calcolo approssimativo.

Summary

It is possible to compute the premiums of deferred annuities by applying consecutively the formulae for the premiums of immediate annuities. Proceeding in this way the author establishes formulae for deferred annuities which however differ in general from those computed by the usual method. He also derives formulae allowing to compare the premiums computed on basis of the two methods and gives several rules for approximate computations.