Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 63 (1963)

Artikel: Zu den Bernoullizahlen nach Nörlund und Adrian

Autor: Paasche, Ivan

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-966926

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 17.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Zu den Bernoullizahlen nach Nörlund und Adrian

Von Ivan Paasche, München

Zusammenfassung

Der Verfasser gibt einige Hinweise zur Darstellung der Bernoullizahlen.

1. Die oszillierend stark ansteigenden Bernoullizahlen nach Nörlund mit der symbolischen Binomialentwicklung

$$B_n = (-1-B)^n, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$
$$B_n = 1, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{6}, 0, \ldots$$

(man setze nach der Entwicklung überall $B^\nu = B_\nu$) sind in der folgenden Formel merkwürdigerweise mit den monoton schwach sinkenden Stammbrüchen $A_n = \dfrac{1}{n+1}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ vertauschbar:

$$0 = (A+B)^n = \binom{n}{0} A_n B_0 + \ldots + \binom{n}{n} A_0 B_n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{1}$$

Der Beweis von (1) ergibt sich aus der bekannten Formel

$$(-1)^n B_n = n \int_0^{-1} (1^{n-1} + 2^{n-1} + \ldots + \mu^{n-1})\, d\mu = \int_0^{-1} \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} B_\nu \mu^{n-\nu}\, d\mu$$

durch Ausführung der Integration. – Aus (1) folgt eine Determinantendarstellung der B_n durch die A_ν (oder der A_n durch die B_ν):

$$B_n = D_n(A_0, \ldots, A_n), \quad A_n = D_n(B_0, \ldots, B_n), \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Die D_n sind vollständige homogene Polynome ihrer $n+1$ Argumente mit ganzrationalen Koeffizienten, z. B.

$$B_3 = -\begin{vmatrix} A_1 & A_0 & \\ A_2 & 2A_1 & A_0 \\ A_3 & 3A_2 & 3A_1 \end{vmatrix} \qquad A_3 = -\begin{vmatrix} B_1 & B_0 & \\ B_2 & 2B_1 & B_0 \\ B_3 & 3B_2 & 3B_1 \end{vmatrix}.$$

2. Die Bernoullizahlen nach Adrian (Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker *59* [1959], S. 199–206) haben $B_1 = 0$ statt des obigen $B_1 = -\frac{1}{2}$, stimmen aber sonst vollständig mit denen nach Nörlund überein. Die schöne, bequeme Formel (1) muss bei Adrian lauten

$$0 = (A+B)^n - \frac{n}{2} A_{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Auch hier zeigt sich wieder der Vorteil der Nörlundschen Bezeichnung. Vgl. im übrigen die Rezension 91853 im Zentralblatt für Mathematik über die genannte Arbeit von Adrian.

3. Im Falle $A_n = n+1$ statt $\dfrac{1}{n+1}$ nebst $B_0 = 1$ ergeben sich aus (1) ganze Zahlen $B_0, B_1, B_2, B_3, \ldots = 1, -2, 5, -16, \ldots$ der Eigenschaft $B_n = (-1)^n - nB_{n-1}$ statt $(-1-B)^n$.

4. Die jahrhundertelange Unsicherheit in der Bezeichnungsweise der Bernoullizahlen beruht letztlich auf dem Fehlen eines Eigenvektors $\neq 0$ der Pascalmatrix: die kritische Koordinate $\pm B_1$ verhindert, dass die Folge der Bernoullizahlen Eigenvektor der Pascalmatrix ist. Für diesen Mangel wird man jedoch reichlich entschädigt durch das Bestehen z. B. der folgenden Identitäten, darin der binomische Satz und eine Partialbruchzerlegung:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & \\ . & . & . & . & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_0 & a^0 u_n & z^0 & z(z+0)^{-1} \\ B_1 & a^1 u_{n-1} & z^1 & -z(z+1)^{-1} \\ B_2 & a^2 u_{n-2} & z^2 & z(z+2)^{-1} \\ B_3 & a^3 u_{n-3} & z^3 & -z(z+3)^{-1} \\ . & . & . & . \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_0 & b^0 u_n & (z+1)^0 & \binom{z+0}{0}^{-1} \\ -B_1 & b^1 u_{n+1} & (z+1)^1 & \binom{z+1}{1}^{-1} \\ B_2 & b^2 u_{n+2} & (z+1)^2 & \binom{z+2}{2}^{-1} \\ -B_3 & b^3 u_{n+3} & (z+1)^3 & \binom{z+3}{3}^{-1} \\ . & . & . & . \end{pmatrix}.$$

Die B_n sind hier die Bernoullizahlen, die u_n irgendwelche Zahlen der Eigenschaft $u_n + a u_{n-1} = b u_{n+1}$, z. B. die Fibonaccizahlen (bei ihnen ist $a = b = u_0 + 1 = u_1 = 1$). Zu den obigen Identitäten gesellt sich noch, mit $\zeta = z(1-z)^{-1}$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & . \\ & 1 & 2 & 3 & . \\ & & 1 & 3 & . \\ & & & 1 & . \\ & & & & . \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \\ z^3 \\ z^4 \\ . \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta^1 \\ \zeta^2 \\ \zeta^3 \\ \zeta^4 \\ . \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & . \\ & 1 & 2 & 3 & . \\ & & 1 & 3 & . \\ & & & 1 & . \\ & & & & . \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & . \\ 1 & 2 & 3 & . & \\ 1 & 3 & . & & \\ 1 & . & & & \\ . & & & & \end{pmatrix}$$

und eine unabsehbare Fülle weiterer Formeln, z. B. mit der Stirlingmatrix 1. Art zugleich als Linksfaktor und Produkt:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ -1 & 1 & & & \\ 2 & -3 & 1 & & \\ -6 & 11 & -6 & 1 & \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & -1 & 1 & & \\ & 2 & -3 & 1 & \\ & -6 & 11 & -6 & 1 \\ & . & . & . & . \end{pmatrix}.$$

Durch Inversion erhält man hieraus die Stirlingmatrix 2. Art zugleich als Rechtsfaktor und Produkt:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ -1 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ -1 & 3 & -3 & 1 & \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & 3 & 1 & & \\ 1 & 7 & 6 & 1 & \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & 1 & 3 & 1 & \\ & 1 & 7 & 6 & 1 \\ & . & . & . & . \end{pmatrix}.$$

Alle aufgeführten Identitäten stellen Verallgemeinerungen des Begriffs Eigenvektor dar.

Résumé

L'auteur donne quelques indications quant à la représentation des nombres de Bernoulli.

Summary

Some hints for the representation of the Bernoulli-numbers are given by the author.

Riassunto

L'autore dà alcune indicazioni relative alla rappresentazione dei numeri di Bernoulli.