Die Unternehmensforschung im Versicherungswesen

Die Unternehmensforschung im Versicherungswesen

Von Karl-Heinz Wolff, Wien

Zusammenfassung

Das aufstrebende Wissensgebiet der Unternehmensforschung kann auch auf Probleme der Versicherungsmathematik mit Vorteil angewendet werden. Die vorliegende Studie bringt eine Zusammenstellung von Anwendungsbeispielen, insbesondere der Spieltheorie, der Methode der linearen Programme und der Monte-Carlo-Methode.

In der Entwicklung jeder Wissenschaft gibt es Perioden stürmischen Wachstums und Perioden ruhiger, gleichmässiger Ausdehnung. Während des zweiten Weltkrieges hat ein Zweig der mathematischen Wissenschaften einen ungeheuren Aufschwung erlebt, und zwar die als operations research oder Unternehmensforschung bezeichnete Anwendung mathematischer Modelle. Die Verwendbarkeit der von der Unternehmensforschung verwendeten Methoden hat es mit sich gebracht, dass sie heute bereits den Status einer eigenen wissenschaftlichen Disziplin erreicht hat. Dass dies in so kurzer Zeit möglich war, liegt vor allem daran, dass sie es gestattet, Probleme aus den verschiedensten Bereichen des praktischen Lebens zu lösen und dort, wo mehrere Entscheidungen möglich sind, die Frage nach der besten Entscheidung beantwortet.

Es heisst eigentlich Eulen nach Athen tragen, wenn man Versicherungsmathematikern über Methoden der Unternehmensforschung berichtet. Die Anwendung mathematischer Modelle und die Lösung von Problemen mittels bestimmter Methoden, wie sie der Unternehmensforschung eigen sind, wird nämlich – genau genommen – in der Versicherungsmathematik schon seit jeher vorgenommen. Dennoch haben sich die von der Unternehmensforschung entwickelten spezifischen Methoden auch für die Versicherungsmathematik als äusserst brauchbar erwiesen, und wir stehen heute eigentlich erst am Beginn einer Entwicklung, die mit dem Namen «Unternehmensforschung im Versicherungswesen» bezeichnet werden kann. Wie die einschlägigen, zu diesem Gebiet veröffentlichten Facharbeiten zeigen, gibt es eine Fülle von Problemen zu behandeln, so dass sich die weitere Entwicklung heute kaum abschätzen lässt.

Da ein wesentliches Merkmal von Methoden der Unternehmensforschung in der Anwendung mathematischer Modelle liegt, mathematischer Modelle, die auch speziell im Rahmen der Unternehmensforschung entwickelt wurden, werde ich mich auf die Beschreibung solcher Modelle beschränken, die gerade im Versicherungswesen zu brauchbaren Ergebnissen geführt haben. Meine Ausführungen werden sich daher vorwiegend mit solchen mathematischen Modellen und ihrer Anwendung beschäftigen.

Die vorliegende Fassung der Arbeit beschränkt sich darauf, in jenen beiden Fällen, in denen es sich um in den «Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker» veröffentlichte Untersuchungen handelt, auf eine eingehende Beschreibung zu verzichten und lediglich einen Hinweis auf die betreffende Arbeit zu geben.

Sterblichkeit und Spieltheorie

Beginnen wir zunächst mit den Versicherungsgrundlagen, Sterbetafel, Ausscheideordnungen usw. Die Sterbetafel ist eine Zusammenstellung von Ablebenswahrscheinlichkeiten. Mit ihrer Hilfe werden Versicherungswerte errechnet, doch ist es klar, dass die tatsächlichen Ergebnisse, der tatsächliche Sterblichkeitsverlauf von dem auf Grund der Sterbetafel errechneten Verlauf mehr oder weniger abweichen wird. Wir haben es nicht nur mit zufälligen Schwankungen zu tun, sondern wir können aus den Erfahrungen der Vergangenheit darauf schliessen, dass eine Verringerung der Sterblichkeit zu erwarten ist.

Die Sterbetafel bietet aber die Grundlage der Prämienberechnung. Wenn die Versicherungsgesellschaft sicherheitshalber mit einer etwas überhöhten Sterblichkeit bei Todesfallversicherungen rechnet, dann wird sie gegenüber anderen Gesellschaften, die auf Grund niedrigerer Sterblichkeiten niedrigere Prämien kalkulieren, nicht mehr konkurrenzfähig sein. Schätzt sie hingegen die Sterblichkeit zu niedrig ein, dann werden die Prämien zur Deckung der Kosten der Todesfallversicherungen nicht mehr ausreichen, so dass die Gesellschaft aus diesem Grund einen Verlust erleidet.

Die Gesellschaft steht also vor der Entscheidung, welche Sterblichkeiten sie ihrer Prämienberechnung zugrunde legen soll. Der tatsächliche Sterblichkeitsverlauf in der Zukunft ist ja nicht bekannt. Sie kann allerdings auf Grund der Erfahrungen annehmen, dass die zukünftige Sterblichkeit nicht höher sein wird als die ihr bekannte gegenwärtige Sterblichkeit, und sie kann so einen Bereich abgrenzen, in dem die Sterblichkeiten liegen müssen. Ihre Aufgabe ist es, nunmehr die *beste* Sterbetafel unter allen möglichen herauszufinden.

Dies ist gerade ein Problem, zu dessen Lösung sich die Methoden der Unternehmensforschung eignen, nämlich die beste Lösung zu finden. Das Problem wurde von Herrn *Nolfi* mit den Methoden der Spieltheorie behandelt. Es handelt sich dabei um ein Spiel zwischen den Spielpartnern Versicherungsgesellschaft und Natur. Die Natur setzt die tatsächliche Sterbewahrscheinlichkeit fest, während die Gesellschaft ihrer Prämienberechnung ebenfalls Sterbewahrscheinlichkeiten zugrunde legt, von denen ihr jedoch noch nicht bekannt ist, ob sie mit den durch die Natur festgesetzten tatsächlichen Sterbewahrscheinlichkeiten übereinstimmen.

In der Spieltheorie unterscheidet man zwischen verschiedenen Strategien. Unter einer Strategie ist eine Regel zu verstehen, nach der bei der Spielführung vorgegangen wird. In unserem Fall bestünde also eine Strategie in der Annahme bestimmter Sterbewahrscheinlichkeiten durch die Gesellschaft. Setzt die Gesellschaft die Sterbewahrscheinlichkeiten zu hoch fest, dann werden die Prämien für eine Todesfallversicherung zu hoch bemessen werden. Die Gesellschaft erleidet in diesem Fall einen Verlust infolge der verminderten Konkurrenzfähigkeit. Setzt die Gesellschaft die Sterbewahrscheinlichkeiten zu niedrig fest, dann reichen die Prämien für Todesfallversicherungen nicht aus, und die Gesellschaft erleidet aus diesem Grund einen Verlust. Aufgabe der Gesellschaft ist es nun, jene Sterbewahrscheinlichkeiten zu wählen, für welche die Verlusterwartung möglichst klein wird. Die Wahl der in diesem Sinn «optimalen» Sterbewahrscheinlichkeiten kann nun mit den Methoden der Spieltheorie erfolgen[1]).

[1]) Vgl. *P. Nolfi* «Zur Auffindung optimaler Sterblichkeitsgrundlagen», Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, 61. Band, S. 151–160.

Versicherungswerte und Monte-Carlo-Methode

Nun möchte ich im Zusammenhang mit der Ermittlung von Rechnungsgrundlagen einige Anwendungen einer anderen Methode der Unternehmensforschung bringen, und zwar handelt es sich um die Monte-Carlo-Methode. Die Technik soll an folgendem Beispiel erläutert werden: Es soll der Wert einer allgemeinen Ablebensversicherung der Gestalt

$$A_x = \frac{1}{D_x} \sum_{m=0}^{\omega-x-1} C_{x+m}\, \alpha_{x+m}$$

mit Hilfe der Monte-Carlo-Methode geschätzt werden. Nehmen wir nun an, dass eine zufällige Variable m gegeben sei mit der Verteilung

$$W\{m = \bar{m}\} = \frac{C_{x+\bar{m}}}{M_x}$$

$$\text{mit } M_x = \sum_{t=0}^{\omega-x-1} C_{x+t} \text{ und } \bar{m} = 0, 1, \ldots, \omega - x - 1.$$

Es seien nun K Werte m_k $(k = 1, \ldots, K)$ Realisierungen der zufälligen Variablen m. Die Werte m_k sind also eine Stichprobe vom Umfang K der zufälligen Variablen m. In diesem Fall ist

$$\hat{A} = \frac{1}{K} \frac{M_x}{D_x} \sum_{k=1}^{K} \alpha_{x+m_k}$$

eine erwartungstreue Schätzfunktion für A_x mit der Streuung

$$\sigma^2(\hat{A}) = \frac{1}{K} \left\{ \frac{M_x}{D_x^2} \sum_{m=0}^{\omega-x-1} C_{x+m}\, \alpha_{x+m}^2 - A_x^2 \right\}.$$

Man beachte insbesondere

$$E\left\{ M_x \sum_{k=1}^{K} \alpha_{x+m_k} \right\} = \sum_{m=0}^{\omega-x-1} C_{x+m}\, \alpha_{x+m}.$$

Man geht nun von einer Zusammenstellung von Zufallszahlen aus, die wir etwa mit p_k bezeichnen und die gleichmässig über das Intervall [0,1] verteilt sind. Solche Zufallszahlen liegen tabelliert vor.

Offenbar gilt

$$W\{p_k < z\} = z$$

für jedes z aus dem Intervall [0,1].

Aus
$$W\left\{p_k < \frac{M_{x+m}}{M_x}\right\} = W\{p_k M_x < M_{x+m}\} = \frac{M_{x+m}}{M_x}$$
folgt
$$W\{M_{x+m+1} \leqq p_k M_x < M_{x+m}\} = \frac{M_{x+m} - M_{x+m+1}}{M_x} = \frac{C_{x+m}}{M_x},$$
so dass die durch
$$M_{x+m_k+1} \leqq p_k M_x < M_{x+m_k}$$
definierte Variable m_k die gewünschte Verteilung besitzt. Man geht also so vor, dass man aus den Zufallszahlen der Reihe nach die Zahlen p_k aufsucht und nachsieht, zwischen welchen Werten der Reihe M_{x+t} der Wert $p_k M_x$ liegt. m_k ist dann gleich dem Wert t für den auf $p_k M_x$ unmittelbar folgenden Wert M_{x+t} der Reihe. Damit wird für jede Zufallszahl eine Grösse m_k gefunden, und mit dieser Grösse kann der Schätzwert für A nach der vorhin angegebenen Formel errechnet werden.

Die hier auftretenden Operationen können leicht mit einem Rechengerät mittlerer Grösse durchgeführt werden, so dass mit Hilfe der Eingabe von Zufallszahlen der ganze Schätzvorgang programmiert werden kann. Die notwendige Genauigkeit bestimmt dabei die Anzahl der Zufallsvariablen. Diese Anzahl wird um so geringer sein, je kleiner die Streuung $\sigma^2(\hat{A})$ ist. Es wird daher notwendig sein, bei solchen Schätzungen jene mit einer möglichst geringen Streuung aufzusuchen.

Dieses Beispiel sollte lediglich die Technik der Methode klarstellen. Das folgende Beispiel ist nun für die praktische Anwendung geeignet, und zwar betrachten wir die Schätzung eines Rentenbarwertes a_{xy}:
$$a_{xy} = \frac{1}{l_x D_y} \sum_{m=1}^{\omega-x} l_{x+m} D_{y+m} = \frac{1}{D_x l_y} \sum_{m=1}^{\omega-x} D_{x+m} l_{y+m}.$$
Setzen wir
$$\sum_{m=1}^{\omega-t} l_{t+m} = L_{t+1} \quad \text{und} \quad \sum_{m=1}^{\omega-t} D_{t+m} = N_{t+1}$$
dann ist
$$\hat{a}_{xy}^{(1)} = \frac{L_{x+1}}{K\, l_x D_y} \sum_{k=1}^{K} D_{y+m_k}$$
ein erwartungstreuer Schätzwert für a_{xy}. Die Grössen m_k werden nach der bekannten Methode mit Hilfe von Zufallszahlen p_k ermittelt und bestimmen sich aus der Ungleichung
$$L_{x+m_k+1} \leqq p_k L_{x+1} < L_{x+m_k}.$$

Diese Schätzung ist aus der ersten Form der Darstellung von a_{xy} gewonnen. Aus der zweiten Form erhalten wir den Schätzwert

$$\hat{a}_{xy}^{(2)} = \frac{N_{x+1}}{K D_x l_y} \sum_{k=1}^{K} l_{y+m_k}.$$

Hier ist die Verteilung von m_k wie folgt gegeben:

$$N_{x+m_k+1} \leqq p_k N_{x+1} < N_{x+m_k}.$$

Die Streuungen der beiden Schätzwerte betragen:

$$\sigma^2(\hat{a}_{xy}^{(1)}) = \frac{1}{K}\left(\frac{L_{x+1}}{l_x^2 D_y^2} \sum_{m=1}^{\omega-x} l_{x+m} D_{y+m}^2 - a_{xy}^2\right),$$

$$\sigma^2(\hat{a}_{xy}^{(2)}) = \frac{1}{K}\left(\frac{N_{x+1}}{D_x^2 l_y^2} \sum_{m=1}^{\omega-x} D_{x+m} l_{y+m}^2 - a_{xy}^2\right).$$

Man wird in der Praxis natürlich den Schätzwert mit der voraussichtlich geringeren Streuung wählen. a_{xy} kann aber auch auf andere Weise geschätzt werden, wenn wir etwa voraussetzen, dass der Wert a_y gegeben ist. Aus der Formel

$$a_{xy} = a_y - \frac{1}{l_x D_y} \sum_{m=0}^{\omega-x-1} d_{x+m} N_{y+m+1}$$

kann der Schätzwert

$$\hat{a}_{xy}^{(3)} = a_y - \frac{1}{K D_y} \sum_{k=1}^{K} N_{y+m_k+1}$$

für

$$l_{x+m_k+1} \leqq p_k l_x < l_{x+m_k}$$

gefunden werden. Für die Streuung ergibt sich

$$\sigma^2(\hat{a}_{xy}^{(3)}) = \frac{1}{K}\left(\frac{1}{l_x D_y^2} \sum_{m=0}^{\omega-x-1} d_{x+m} N_{y+m+1}^2 - a_{xy}^2\right).$$

Man kann übrigens durch gewisse Umformungen die Streuung noch weiter vermindern.

De Jager hat in einem speziellen Fall für $x = 30$ und $y = 27$ bei einer Zinsrate von 3,5% die folgenden Werte erhalten:

$$a_{xy} = 20{,}15$$

$$\sigma^2(\hat{a}^{(1)}_{xy}) = \frac{126{,}37}{K}$$

$$\sigma^2(\hat{a}^{(2)}_{xy}) = \frac{6{,}23}{K}$$

$$\sigma^2(\hat{a}^{(3)}_{xy}) = \frac{9{,}36}{K}.$$

Um eine Streuung von 0,01 zu erhalten, müssen im ersten Fall 12637 Zufallszahlen, im zweiten Fall 623 und im dritten Fall 936 gezogen werden. Wie man sieht, ist also der Arbeitsaufwand sehr stark von der Streuung abhängig.

Die Monte-Carlo-Technik gestattet die vielfältigsten Anwendungsgebiete, insbesondere im Bereiche der Versicherungen für verbundene Leben, aber auch in anderen Bereichen, wo etwa Prämien auf Grund von Kombinationen mehrerer Schadensverteilungen ermittelt werden müssen. Ich muss mich hier mit diesen Hinweisen begnügen. Ich möchte allerdings noch eine Anwendung der Monte-Carlo-Technik zeigen, die in ihrer Allgemeinheit sowohl für Versicherungswerte als auch etwa für die Berechnung von Reserven für ein ganzes Versicherungsportefeuille anwendbar ist. Ich komme damit auch gleichzeitig zum nächsten Punkt meiner Ausführungen, nämlich die Abschätzung von Reserven.

Abschätzung von Reserven

Die Aufgabe lautet, den folgenden Wert zu schätzen:

$$L = \sum_{(x)} b_x A_x .$$

Hiebei ist über alle Werte x eines Versicherungsportefeuilles zu summieren. A_x sei ein Versicherungswert, etwa der Gestalt:

$$A_x = \frac{1}{D_x} \sum_{m=0}^{\omega-x-1} C_{x+m}\, \alpha_{x+m} .$$

Dieser Wert von A_x entspricht einer Todesfallversicherung. Die folgenden Überlegungen sind aber ganz analog für allgemeinere Formen von

A_x gültig. So kann anstelle von A_x etwa ein Reservewert treten. Wenn b_x die Summe der auf diesen Reservewert entfallenden Versicherungswerte angibt, dann stellt L die Gesamtreserve dar. Die Schätzung, die wir nun vornehmen wollen, kann daher grundsätzlich auch für die Berechnung von Reserven verwendet werden.

Als Schätzwert wählen wir

$$\hat{L} = \sum_{(x)} \frac{b_x M_x}{K_x D_x} \sum_{k=1}^{Kx} \alpha_{x+m_{x,k}}.$$

Zum Unterschied gegenüber den früheren Schätzungen treten hier im Schätzwert zwei Summen auf. Halten wir zunächst x fest und betrachten die Schätzung für festes x, dann kann $m_{x,k}$ wie früher durch

$$M_{x+m_{x,k}+1} \leqq p_{x,k} < M_{x+m\ x,k}$$

ermittelt werden, wobei die $p_{x,k}$ wieder entsprechende Zufallszahlen sind. $\hat{L}$ ist wieder ein erwartungstreuer Schätzwert für L mit der Streuung

$$\sigma^2(\hat{L}) = \sum_{(x)} \frac{b_x^2 \sigma_x^2}{K_x}$$

mit

$$\sigma_x^2 = \frac{M_x}{D_x^2} \sum_{m=0}^{\omega-x-1} C_{x+m}\, \alpha_{x+m}^2 - A_x^2.$$

Es ist nun noch notwendig, die Grössen K_x festzusetzen, um für jeden Wert x die entsprechende Anzahl von Zufallszahlen $p_{x,k}$ wählen zu können. Offenbar wird man K_x so wählen, dass die Streuung möglichst klein wird. Es ist nun leicht zu zeigen, dass die Streuung $\sigma^2(\hat{L})$ ein Minimum wird, wenn die K_x proportional $b_x \sigma_x$ gewählt werden. Nun sind die σ_x nicht bekannt. Man kann sich aber so behelfen, dass man K_x proportional b_x setzt, das heisst

$$K_x = \frac{K}{B} b_x \quad \text{für} \quad K = \sum_{(x)} K_x \quad \text{und} \quad B = \sum_{(x)} b_x.$$

In diesem Fall erhält man den Schätzwert

$$\hat{L} = \frac{B}{K} \sum_{(x)} \frac{M_x}{D_x} \sum_{k=1}^{Kx} \alpha_{x+m_{x,k}}$$

und die Streuung

$$\sigma^2(\hat{L}) = \frac{B}{K} \sum_{(x)} b_x \sigma_x^2.$$

Der Vorteil der Monte-Carlo-Methode liegt bei diesen Beispielen vor allem darin, dass der Rechenvorgang vereinfacht wird. Anstatt alle Versicherungen eines Versicherungsportefeuilles zu untersuchen, wird durch die Verwendung der Zufallszahlen eine Art Stichprobe daraus entnommen. Der Rechenvorgang lässt sich darüber hinaus leicht maschinell durchführen, da hauptsächlich Additionen für die Schätzung notwendig sind.

Das Problem der Reservenschätzung ist für Versicherungsgesellschaften von besonderer Bedeutung. Die Vielzahl der Methoden zur Gewinnung eines Näherungswertes für die Gesamtreserve eines Versicherungsportefeuilles zeigt, welche Bedeutung dieser Frage in der Praxis der Verwaltung einer Versicherungsgesellschaft zukommt. Diese Methoden bestehen im wesentlichen darin, anstelle der «wahren» Reserve einen Näherungswert zu setzen. Die «wahre» Reserve lässt sich genau durch die Addition sämtlicher Einzelreserven ermitteln. Diese Einzelreserven müssten jedes Jahr für jede einzelne Versicherung errechnet und aufaddiert werden. Um diesen enormen Rechenaufwand zu vermeiden, zieht man es vor, die Gesamtreserve auf Grund gewisser Hilfszahlen zu errechnen, wobei diese Hilfszahlen wesentlich einfacher zu ermitteln sind als die Reserve selbst und vor allem für eine bestimmte Versicherung während des gesamten Versicherungsverlaufes gleichbleiben, also nur einmal errechnet werden müssen. Es handelt sich also praktisch darum, anstelle der nur mit einem grossen administrativen Aufwand genau zu ermittelnden Gesamtreserve eine Schätzung auf Grund von einfach zu errechnenden Hilfszahlen vorzunehmen. Diese Vorgangsweise erscheint um so mehr gerechtfertigt, als auch jede noch so exakt berechnete Gesamtreserve letzten Endes auf Versicherungsgrundlagen, wie Sterbetafel, Zinsfuss usw., beruht, die ihrerseits nur Schätzwerte darstellen können. Den Versicherungsmathematikern sind diese Dinge natürlich wohl bekannt.

Das Problem der Reservenschätzung bietet ein reiches Anwendungsgebiet für Methoden der Unternehmensforschung. Wir können es folgendermassen formulieren: Die Versicherungsgesellschaft ermittelt die Reserven bzw. die Hilfszahlen zur Schätzung der Reserven, wobei ihr – je nach der verwendeten Methode – ein mehr oder weniger grosser Aufwand erwächst. Die ermittelten Reserven bzw. die ermittelten Hilfszahlen stellen nun eine *Information* dar über die «wahre» Reserve. Auf Grund dieser Information wird von der Gesellschaft ein Schätzwert für die Reserve gewählt. Weicht dieser Schätzwert von der «wahren» Reserve ab, dann erleidet die Gesellschaft einen Verlust, der offenbar um so grösser sein wird, je grösser die Abweichung ist. Für die Ermittlung der Reserve sind daher zwei Schritte zu unterscheiden:

1. die Gewinnung einer Information über die Reserve (etwa durch die Ermittlung von Hilfszahlen) und
2. die Ermittlung eines Schätzwertes für die Reserve auf Grund der Information.

Wir wollen für diese Überlegungen einen Formalismus einführen. Die «wahre» Reserve wird, wollen wir sagen, von der Natur festgesetzt, die Schätzung der Reserve erfolgt durch einen Versicherungsmathematiker. Wir können nun den Vorgang als ein Spiel zwischen Versicherungsmathematiker und Natur im Sinne der Spieltheorie ansehen. Die Natur setzt die «wahre» Reserve fest. Der Versicherungsmathematiker ermittelt auf Grund eines bestimmten Verfahrens (Stichprobenverfahren usw.) eine Information I über die Reserve. Auf Grund der Information I wird nun ein Schätzwert $W = W(I)$ für die Reserve V ermittelt.

Man geht dabei wie folgt vor:

Zunächst werden mit Hilfe der Methode der linearen Programme eine obere und eine untere Grenze für die «wahre» Reserve ermittelt. Mit Hilfe der Spieltheorie wird aus den so eingeschränkten Reservewerten der optimale Schätzwert gefunden[1]).

Rückversicherung und Spieltheorie

Ein interessantes Anwendungsgebiet der Spieltheorie sind Entscheidungen eines Versicherers über Rückversicherungen. Hiebei können als Spielpartner zwei Versicherungsgesellschaften angesehen werden, die gegenseitig Rückversicherungsverträge abschliessen; die Zahl der Spielpartner kann aber auch auf n Versicherungsgesellschaften erweitert werden. Welches sind nun die Züge dieses Spiels? Wir wollen die Verhältnisse so darstellen, dass der Abschluss eines Rückversicherungsvertrages in der Bezahlung einer Rückversicherungsprämie vom

[1]) Vgl. *U. Baumgartner* «Abschätzung von Reserven mit spieltheoretischen Methoden», Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, 61. Band, S. 223–274.

Versicherer an den Rückversicherer und in der Übernahme eines Teiles des Versicherungsportefeuilles des Versicherers durch den Rückversicherer besteht.

In jedem Spiel müssen Auszahlungsfunktionen definiert werden. Für den Fall des hier behandelten Rückversicherungsspieles kommen die effektiven Schadenszahlungen auf Grund der Versicherungsverträge für die Auszahlungsfunktionen sicherlich nicht in Betracht. Diese Schadenszahlungen sind ja im Zeitpunkt des Abschlusses des Rückversicherungsvertrages nicht bekannt. Die Rückversicherungsprämie allein ist auch keine geeignete Auszahlungsfunktion, da die Frage einer zweckmässigen oder unzweckmässigen Rückversicherung sicher auch von der rückversicherten Schadensverteilung abhängt.

Offenbar kann die Auszahlung eines Gewinnes in einem Spiel im Sinne der Spieltheorie in unserem Rückversicherungsspiel ganz allgemein nur einer Verbesserung der Situation des Versicherungsträgers entsprechen. Eine Rückversicherung wird ja offenbar mit dem Ziel abgeschlossen, die Situation des Versicherungsträgers in irgendeinem Sinne zu verbessern (ansonsten wäre der Abschluss von Rückversicherungsverträgen sinnlos). Unsere Aufgabe muss daher sein, ein Mass für die Verbesserung der Situation des Versicherungsträgers zu finden. Kennen wir ein Mass für die Situation des Versicherungsträgers, dann können wir die Veränderung dieses Masses, die durch den Abschluss eines Rückversicherungsvertrages verursacht wurde, messen und als Auszahlungsfunktion dem Rückversicherungsspiel zugrunde legen. War etwa das Mass für die Situation des Versicherungsträgers vor Abschluss des Rückversicherungsvertrages M_1, nach Abschluss des Rückversicherungsvertrages M_2, dann ist $M_2 - M_1$ das Mass für die Verbesserung der Situation.

Es ist daher zunächst notwendig, ein Mass für die Situation einer Versicherungsgesellschaft einzuführen. Wir müssen dabei gewisse Vereinfachungen vornehmen, und zwar nehmen wir an, dass die Situation der Versicherungsgesellschaft gegeben sei durch die freie Reserve R und die Schadensverteilung $F(x)$. Dabei ist die freie Reserve R die Summe der der Gesellschaft zur Verfügung stehenden finanziellen Mittel, also das Vermögen, abzüglich des Erwartungswertes der durch die Verteilungsfunktion $F(x)$ beschriebenen Schäden. Wir werden daher später die Risikosituation einer Gesellschaft durch $\{R, F(x)\}$ beschreiben, und unsere Aufgabe liegt darin, eine Nutzfunktion $N\{R, F(x)\}$ als Mass für den Nutzen, den die Gesellschaft aus der gegebenen Risikosituation zieht, einzuführen. Eine weitere Vereinfachung, die wir nun einführen wollen, besteht darin, dass wir die Risikosituation nicht mehr durch R und $F(x)$ beschreiben, sondern durch eine Verteilungsfunktion $G(z)$, welche die Verteilung des der Gesellschaft nach Abwicklung der Versicherungen verbleibenden Kapitals z wiedergibt. Offensichtlich ist $z = R - S$, wobei S der nach der Verteilungsfunktion $F(x)$ verteilte Schaden ist. Man kann nun leicht zeigen, dass sich $G(z)$ wie folgt darstellen lässt:

$$G(z) = 1 - F(R + P - z),$$

wobei $P = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, dF(x)$ den Erwartungswert des Schadens S darstellt.

Wir müssen nun eine Nutzfunktion, also ein Mass für den Nutzen für alle möglichen Verteilungsfunktionen $G(z)$ einführen. Diese Aufgabe setzt voraus, dass wir eine gewisse Ordnung in der Menge der Verteilungsfunktionen $G(z)$ einführen. Offenbar soll die Aussage, dass eine Verteilungsfunktion $G_1(z)$ besser ist als eine Verteilungsfunktion $G_2(z)$, die Aussage $N\{G_1(z)\} > N\{G_2(z)\}$ nach sich ziehen. Das heisst, die Nutzfunktion für die bessere Risikosituation $G_1(z)$ soll einen höheren Wert annehmen als die Nutzfunktion für die schlechtere Risikosituation $G_2(z)$.

Wir beginnen mit Risikosituationen einfachster Art, und zwar sei $G(z) = \varepsilon(z - R) = 1$ für $z > R$ und 0 für $z \leqq R$. Diese Risikosituation entspricht dem sicheren Endkapital R, wobei «sicher» im Sinne von «mit der Wahrscheinlichkeit 1» zu verstehen ist. Nun ist offenbar eine Risikosituation $\varepsilon(z - R_1)$ besser als eine Risikosituation $\varepsilon(z - R_2)$, wenn $R_1 > R_2$ ist. Es muss also gelten: $N\{\varepsilon(z - R_1)\} > N\{\varepsilon(z - R_2)\}$ für $R_1 > R_2$. Da $\varepsilon(z - R)$ nur von R abhängt, können wir $N\{\varepsilon(z - R)\} = n(R)$ setzen. Offenbar muss $n(R)$, also die Nutzfunktion für den Geldbetrag R, eine monoton steigende Funktion in R sein.

Wir nehmen zunächst an, dass $n(R)$ bereits gegeben ist. Damit ist eine Nutzfunktion für alle Verteilungsfunktionen der Gestalt $G(z) = \varepsilon(z - R)$ gegeben. Um zu einer allgemeinen Nutzfunktion zu kommen, wird von einer Reihe von Autoren ein Axiomensystem eingeführt, welches eine Ordnung in der Menge der $G(z)$ herstellt. Wir wollen diese Ordnung auf anderem Weg erreichen. Wir definieren jetzt den Nutzen einer Verteilungsfunktion der Gestalt $G(z) = \alpha\,\varepsilon(z - R) + (1 - \alpha)\,H(z)$ mit $0 \leqq \alpha \leqq 1$ wie folgt:

$$N\{\alpha\,\varepsilon(z - R) + (1 - \alpha)\,H(z)\} = \alpha\,N\{\varepsilon(z - R)\} + (1 - \alpha)\,N\{H(z)\}.$$

Diese Definition ist wesentlich für die gesamte Ordnung der Menge der $G(z)$. Sie beinhaltet die Aussage, dass der Nutzen für zwei mit bestimmten Wahrscheinlichkeiten eintretende Ereignisse gleich dem mit diesen Wahrscheinlichkeiten gewogenen Mittelwert der beiden Nutzen der einzelnen Ereignisse ist. So ist z. B. der Nutzen einer Risikosituation, die mit 50 % Wahrscheinlichkeit das Endkapital R_1 und mit 50 % Wahrscheinlichkeit das Endkapital R_2 ergibt, gleich dem arithmetischen Mittel der Nutzen $n(R_1)$ und $n(R_2)$.

Mit Hilfe der eben angegebenen Funktion kann der Nutzen für jede Risikosituation $G(z)$ definiert werden. Aus der Definition folgt nämlich für $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ und $a_i > 0$ für $i = 1, 2, \ldots, n$

$$N\left\{\sum_{i=1}^{n} a_i \, \varepsilon(z - R_i)\right\} = \sum_{i=1}^{n} a_i \, n(R_i).$$

Sieht man diesen Ausdruck als Riemannsche Summe eines Integrales an, dann folgt

$$N\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon(z-y)\, dG(y)\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} n(y)\, dG(y).$$

Da sich jede Verteilungsfunktion $G(z)$ in der Form

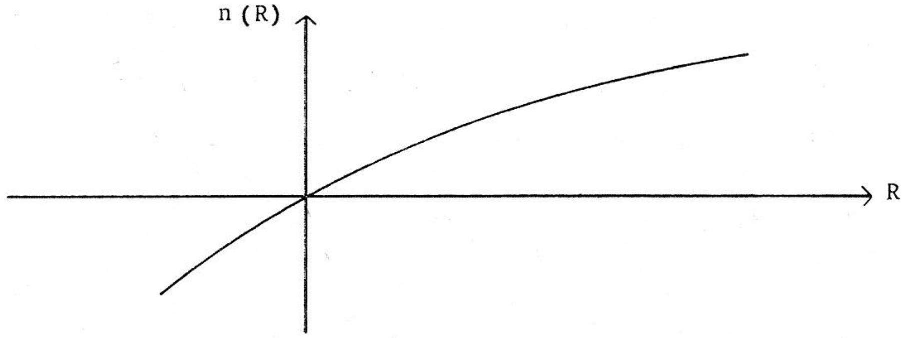
$$G(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon(z-y)\, dG(y)$$

darstellen lässt, gilt allgemein

$$N\{G(z)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} n(y)\, dG(y).$$

Die Einführung einer Nutzfunktion in der angeführten Weise war notwendig, um die Eindeutigkeit und die Widerspruchsfreiheit einer solchen Funktion zeigen zu können. Ich verzichte allerdings hier auf einen derartigen Beweis, der sich aus der Ableitung ohne Schwierigkeiten folgern lässt.

Wir müssen nun die Funktion $n(R)$, den Nutzen des Geldbetrages R, festsetzen. Bei der Wahl dieser Funktion sind wir verhältnismässig frei. Wir müssen nur darauf achten, dass $n(R)$ für jedes reelle R, also insbesondere auch für negative R, definiert ist, da die Verteilungsfunktion $G(z)$ für negative z noch grösser als 0 sein kann. Dass $n(R)$ monoton steigend sein muss, haben wir bereits erwähnt. Wir werden aber auch voraussetzen müssen, dass der Anstieg von $n(R)$ bzw. $n'(R)$ (sofern diese Ableitung existiert) mit steigendem R nicht zunimmt. Es ist ja plausibel, dass ein Geldzuwachs von 0 bis 100 Währungseinheiten sicher einen grösseren Nutzen darstellt als ein Geldzuwachs von 1 000 000 auf 1 000 100 Währungseinheiten. Man könnte sagen, dass 100 Währungseinheiten für einen Bettler einen grösseren subjektiven Wert haben als für einen Millionär. Die Funktion $n(R)$ muss also etwa die folgende Gestalt haben



Da in den folgenden Überlegungen hauptsächlich vom Nutzenzuwachs die Rede sein wird, können wir die Funktion $n(R)$ bis auf eine additive Konstante unbestimmt lassen. Eine klassische Bewertung des Nutzens des Geldes stammt von *Bernoulli*, der $n(R) = \ln R$ setzt, doch ist diese Bewertung für unsere Zwecke nicht brauchbar, da sie für negative R keine endlichen Werte liefert. Eine zweckmässige Bewertung des Nutzens wäre etwa:

$$n(R) = A - e^{-R}.$$

Wie man sieht, entspricht diese Funktion unseren Bedingungen. Sie lässt sich auch auf Probleme der Rückversicherung anwenden, doch führt sie im allgemeinen zu mathematisch schwierig zu behandelnden Formeln, so dass ich sie hier nicht in unsere Überlegungen einbeziehen kann.

Im weiteren soll $n(R)$ als Polynom in R festgesetzt werden. Der einfachste Fall, $n(R) = C =$ konstant, führt offenbar zu keinem brauchbaren Ergebnis. Der Ansatz $n(R) = R$ liefert den folgenden Nutzen für $G(z)$:

$$N\{G(z)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} n(y)\, dG(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y\, dG(y) = E(y)\,.$$

Diese Form von $n(R)$ bewertet die Risikosituation einer Versicherungsgesellschaft also lediglich nach dem Erwartungswert des Endkapitals, ohne die Streuung mit einzubeziehen. Nun ist aber die Streuung der Schadensverteilung bei der Beurteilung einer Risikosituation unbedingt mit zu berücksichtigen. Der Ansatz $n(R) = R$ ist daher ebenfalls nicht brauchbar.

Es hat sich gezeigt, dass der folgende Ansatz in vielen Fällen zu sehr brauchbaren Ergebnissen führt:

$$n(R) = -R^2 + bR.$$

Daraus folgt nämlich

$$N\{G(z)\} = N\{R, F(x)\} = (b-R)\,R - \sigma^2,$$

wobei R die bereits erwähnte freie Reserve und σ^2 die Streuung der Schadensverteilung darstellt. Diese Nutzfunktion bewertet eine Risikosituation um so höher, je grösser die freie Reserve R und je kleiner die Streuung der Schadensverteilung ist, und dies ist ein sehr plausibles Ergebnis. Allerdings hat sie einen Schönheitsfehler; sie ist nämlich nur für $R < \frac{b}{2}$ monoton steigend. Man muss daher darauf achten, dass die Konstante $b > 2R$ gewählt wird. Bei der Wahl der Konstante b haben wir es wiederum mit einer Entscheidung zu tun, die nur im Einzelfall getroffen werden kann.

Wir können uns nun bereits einem Rückversicherungsproblem zuwenden. Es seien zwei Versicherungsgesellschaften gegeben mit den Risikosituationen $\{R_1, F_1(x)\}$ und $\{R_2, F_2(y)\}$. x und y seien stochastisch unabhängig voneinander, das heisst die beiden Gesellschaften haben nicht Teile ein und desselben Risikos versichert. Die beiden Gesellschaften wollen miteinander Rückversicherungsverträge austauschen, und zwar in folgender Weise:

1. Die Gesellschaft 1 zediert der Gesellschaft 2 ein Portefeuille mit der Schadensverteilung $G_1(x)$, entsprechend einer Nettoprämie $P_1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\, dG_1(x)$ und zahlt einen Risikozuschlag Q_1.

2. Die Gesellschaft 2 zediert der Gesellschaft 1 ein Portefeuille mit der Schadensverteilung $G_2(y)$, entsprechend einer Nettoprämie $P_2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y\, dG_2(y)$ und zahlt einen Risikozuschlag Q_2.

Nach Abschluss der gegenseitigen Rückversicherungsverträge sei die Schadensverteilung für die erste Gesellschaft $H_1(x)$, für die zweite Gesellschaft $H_2(y)$. Die freie Reserve verändert sich für die beiden Gesellschaften folgendermassen:

$$R_1 \text{ geht über in } R_1 - Q_1 + Q_2,$$
$$R_2 \text{ geht über in } R_2 + Q_1 - Q_2.$$

Für $Q_1 - Q_2 = Q$ gilt daher

$$R_1 \text{ geht über in } R_1 - Q,$$
$$R_2 \text{ geht über in } R_2 + Q.$$

Offenbar muss $-R_2 \leqq Q \leqq R_1$ sein. Die Risikosituationen der beiden Gesellschaften verändern sich daher durch den Abschluss der gegenseitigen Rückversicherungsverträge wie folgt:

$$\{R_1, F_1(x)\} \text{ geht über in } \{R_1 - Q, H_1(x)\},$$
$$\{R_2, F_2(y)\} \text{ geht über in } \{R_2 + Q, H_2(y)\}.$$

Die beiden Gesellschaften müssen nun trachten, ihre neue Risikosituation so zu wählen, dass der grösste Nutzen erreicht wird. Hiebei geraten sie natürlich in einen Interessenkonflikt, da die Vergrösserung des Nutzens für die eine Gesellschaft vielfach eine Verringerung des Nutzens für die zweite Gesellschaft mit sich bringt. Dennoch wird es im allgemeinen möglich sein, den Nutzen für beide Gesellschaften zu erhöhen. Das Problem kann als ein Zweipersonenspiel aufgefasst werden. Die Züge bestehen in der Wahl von Q sowie in der Wahl der Versicherungsportefeuilles $G_1(x)$ bzw. $G_2(y)$. Die Auszahlungsfunktionen entsprechen dem Zuwachs des Nutzens. Für die rechnerische Behandlung des Problems wollen wir der Einfachheit halber annehmen, dass beide Gesellschaften die gleiche Bewertung des Nutzens eingeführt haben. Diese Voraussetzung wird lediglich zur Vereinfachung der Darstellung getroffen. Grundsätzlich lassen sich die Überlegungen auch auf verschiedene Bewertungen des Nutzens anwenden. Die Konstante b muss die Bedingung $b > 2(R_1 + R_2)$ erfüllen, damit die Nutzfunktion für alle in Betracht kommenden Werte der freien Reserve monoton steigend bleibt.

Auf Grund der vorgesehenen Nutzfunktion

$$N\{R, F(x)\} = (b - R)\,R - \sigma^2(F) \qquad \text{erhält man:}$$

$$(b - R_1)\,R_1 - \sigma^2(F_1) \text{ geht über in } (b - R_1 + Q)\,(R_1 - Q) - \sigma^2(H_1),$$
$$(b - R_2)\,R_2 - \sigma^2(F_2) \text{ geht über in } (b - R_2 - Q)\,(R_2 + Q) - \sigma^2(H_2).$$

Man kann nun zeigen, dass in diesem Fall die grössten Nutzen erzielt werden, wenn die Kovarianzen der beiden Verteilungen $F_1(x)$ und $G_1(x)$ bzw. $F_2(y)$ und $G_2(y)$ möglichst gross sind. Dies ist aber der Fall, wenn es sich um eine Quotenrückversicherung handelt, da dann eine vollständige Korrelation zwischen $F_1(x)$ und $G_1(x)$ bzw. $F_2(y)$ und $G_2(y)$ besteht.

Dieses Ergebnis mag zunächst überraschen, da bekanntlich im allgemeinen eine Exzedentenrückversicherung als günstiger angesehen wird als eine Quotenrückversicherung. Wir dürfen aber nicht übersehen, dass wir hier den Nutzen für beide Versicherungsgesellschaften betrachten. Wenn auch die Exzedentenrückversicherung für die zedierende Gesellschaft günstiger ist, so ist sie doch für den Rückversicherer ungünstiger. Wenn der grösste Nutzzuwachs für *beide* Gesellschaften erreicht werden soll, dann ist es nicht weiter verwunderlich, wenn statt der Exzedentenrückversicherung eine andere Rückversicherungsform vorzuziehen ist. Natürlich hängt die Form der besten Rückversicherung wiederum von der Bewertungsfunktion für den Nutzen ab.

Unter der Annahme, dass die Quoten für die zedierten Rückversicherungsportefeuilles für die erste Gesellschaft k_1 und für die zweite Gesellschaft k_2 betragen, ergibt sich:

$$\sigma^2(H_1) = (1-k_1)^2\,\sigma^2(F_1) + k_2^2\,\sigma^2(F_2)\,,$$

$$\sigma^2(H_2) = k_1^2\,\sigma^2(F_1) + (1-k_2)^2\,\sigma^2(F_2)\,.$$

Für das «Spiel» zwischen den beiden Gesellschaften sind alle Werte (Q, k_1, k_2) zulässig, für die $-R_2 \leqq Q \leqq R_1$ und $0 \leqq k_1 \leqq 1, 0 \leqq k_2 \leqq 1$ gilt. Man kann nun zeigen, dass $k_1 + k_2 = 1$ sein muss, da für jede andere Wahl der Grössen k_1 und k_2 bei festen Q der Nutzen für *beide* Gesellschaften noch verbessert werden kann. Setzen wir $k_1 = k$ und $k_2 = 1-k$, dann ist die Form der beiden Rückversicherungen durch die Wahl der Grössen k und Q eindeutig bestimmt. Es lässt sich nun leicht zeigen, dass die beste Form der Rückversicherung für beide Gesellschaften zu der Beziehung

$$Q = -(b-R_1-R_2)\,k + \tfrac{1}{2}b - R_2$$

führt, da für jede andere Beziehung der Nutzen für beide Gesellschaften durch eine entsprechende Wahl von Q verbessert werden kann. Durch diese Beziehung zwischen k und Q wird erreicht, dass die Form der Rückversicherungen nur mehr durch die Wahl einer einzigen Grösse, nämlich entweder k oder Q bestimmt ist.

Grundsätzlich wird nun die Grösse k bzw. Q durch keine andere Bedingung eingeschränkt, als dass der Nutzen keiner der beiden Gesellschaften verringert wird. Jede Vergrösserung des Nutzens der ersten Gesellschaft durch entsprechende Wahl von k bzw. von Q führt zu einer Verringerung des Nutzens der zweiten Gesellschaft und umgekehrt. Um zu einer eindeutigen Lösung dieser Situation zu kommen, müssen zusätzliche Annahmen getroffen werden. Eine Lösung wäre etwa darin gelegen, dass man voraussetzt, der Nutzenzuwachs soll für beide Gesellschaften gleich gross sein. Es lässt sich zeigen, dass unter dieser Voraussetzung eine eindeutige Lösung gefunden werden kann. Es ist ja nurmehr notwendig, den Nutzenzuwachs durch eine der beiden Grössen k oder Q für beide Gesellschaften formelmässig auszudrücken und aus der Gleichsetzung der beiden Formeln den entsprechenden Wert von k bzw. von Q zu errechnen.

Diese Überlegungen beruhen auf Arbeiten von *K. Borch*. Die zusätzliche Annahme, um die Lösung eindeutig bestimmen zu können, geht auf *J.F. Nash* zurück.

Das Ergebnis unserer Untersuchungen führt zu anderen Rückversicherungsarten, als sie vielfach in der Praxis verwendet werden. Denken wir etwa an jene Form der Rückversicherung, bei der zwei Gesellschaften Rückversicherungsportefeuilles austauschen, und zwar lediglich auf Grund der Nettoprämie, also ohne die Zahlung irgendeines Risikozuschlages. In diesem Fall ist offenbar $Q = 0$. Es ist aber nun keinesfalls sicher, dass eine solche Rückversicherung tatsächlich optimal ist. Wir werden vielmehr auf Grund unserer Ableitungen annehmen müssen, dass es eine andere Rückversicherungsart gibt, die für beide Gesellschaften zu einer besseren Rückversicherung im Sinne eines grösseren Nutzens führt. Dies gilt ebenfalls für jene Form der Rückversicherung, bei der ein Risikozuschlag proportional zur Streuung des Rückversicherungsportefeuilles gezahlt wird. Auch in diesem Fall ist es keineswegs sicher, dass für beide Gesellschaften der grösstmögliche Nutzenzuwachs erreicht wird. Man kann dies leicht an Hand einfacher Beispiele numerisch nachweisen.

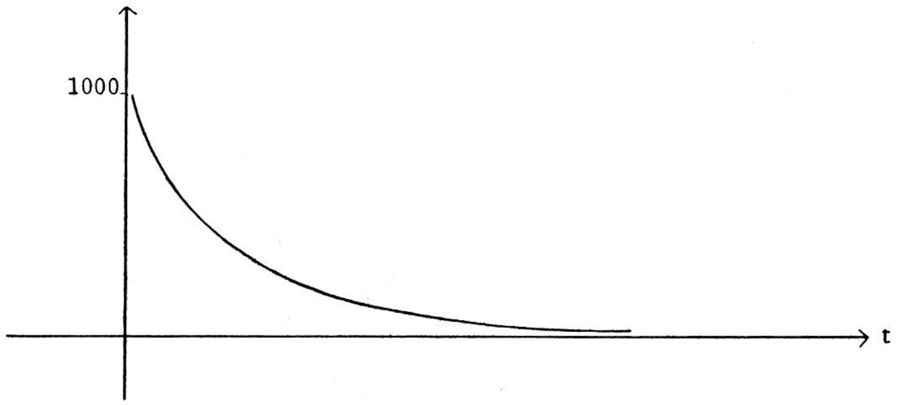
Wir haben allerdings bereits darauf hingewiesen, dass die optimale Form der Rückversicherung von der verwendeten Nutzfunktion abhängt.

Sicher wird eine Änderung der Nutzfunktion unter Umständen zu einer Veränderung der als optimal erkannten Rückversicherung führen. Trotzdem scheint es der Mühe wert zu prüfen, ob nicht auf Grund der hier angestellten Überlegungen Verbesserungen in der althergebrachten Form der Rückversicherungen möglich sind.

Die Frage nach der besten Form der Rückversicherung kann auch etwas allgemeiner für eine beliebige Anzahl von n Versicherungsgesellschaften behandelt werden. Gleichgültig, welche Nutzfunktion man zugrunde legt, ergibt sich zunächst unter allen möglichen Rückversicherungsarten eine Auswahl von optimalen Rückversicherungen, optimal in dem Sinne, dass jede nicht aus der optimalen Menge gewählte Rückversicherung so verbessert werden kann, dass der Nutzen für alle beteiligten Gesellschaften erhöht wird. Innerhalb dieser optimalen Menge haben wir es mit einem Interessenkonflikt zwischen den einzelnen Gesellschaften zu tun. Jede Erhöhung des Nutzens einer Gesellschaft kann dann nurmehr durch eine Verringerung des Nutzens anderer Gesellschaften erkauft werden. Um zu diesem Problem eine Lösung zu finden, ist es notwendig, zusätzliche Annahmen über die «beste Rückversicherung» zu machen, etwa im Sinne von *Nash*, der den gleichen Nutzenzuwachs für alle n beteiligten Gesellschaften vorsieht.

Ein wirtschaftliches Problem: die Besoldung der Vertreter

Ich möchte nun ein Problem aus der Verwaltung einer Versicherungsgesellschaft behandeln, und zwar handelt es sich um die Frage der Honorierung der Versicherungsvertreter. Eine amerikanische Versicherungsgesellschaft hatte es sich zur Aufgabe gestellt zu prüfen, ob das System der Entlöhnung von Versicherungsvertretern verbessert werden könnte. Die Gesellschaft zahlte den neu aufgenommenen Vertretern ein bestimmtes Fixum, während der übrige Teil der Einnahmen der Vertreter in den Provisionen bestand. Die Gesellschaft beobachtete, wie lange die neu aufgenommenen Vertreter im Dienste der Gesellschaft verblieben. Es stellte sich heraus, dass das Ausscheiden der Vertreter in den ersten Monaten besonders hoch war und in den folgenden Monaten geringer wurde. Die Kurve, welche die Zahl der von 1000 aufgenommenen Vertretern nach Ablauf einer bestimmten Zeit jeweils im Dienste der Gesellschaft verbliebenen Vertretern darstellt, hatte etwa die folgende Gestalt:



Nun wurde untersucht, auf welche Gründe dieses Ausscheiden zurückzuführen ist. Man konnte zwischen freiwilligen Austritten der Vertreter und Entlassungen unterscheiden. Die Entlassung führte daher, dass der Vertreter nicht in der Lage war, das von der Gesellschaft vorgesehene Minimum an Versicherungen abzuschliessen. Die freiwilligen Austritte kamen zum grössten Teil daher, dass die Vertreter mit dem finanziellen Erfolg ihrer Tätigkeit nicht zufrieden waren.

Die Gesellschaft begann daher zunächst, die monatlichen Geschäftsabschlüsse der Vertreter zu untersuchen. Es zeigte sich, dass die monatlichen Einnahmen an Provisionen annähernd normal verteilt waren, und zwar betrug die Streuung etwa $\sigma = 0{,}55\,\mathrm{m}$. Die Streuung war also etwa 55 % des Mittelwertes der monatlichen Einnahmen. Bei der Streuung der monatlichen Einnahmen handelt es sich um die üblichen zufälligen Abweichungen.

Die Errechnung der Verteilung der Summe aus 36 Monatsverdiensten, also aus dem Verdienst von 3 Jahren, ergab, dass bei 1,58 % aller Vertreter der Zufallsstreuung wegen die Summe dieser Monatsverdienste um mehr als 7 Monatsverdienste unterhalb des Erwartungswertes lag. Es war klar, dass kein Vertreter in der Lage war, derart starke Einkommensschwankungen aus eigenem zu tragen. Die Erfahrung hat sogar gezeigt, dass schon wesentlich kleinere Abweichungen nach unten die Ursache freiwilliger Austritte geworden sind.

Die Gesellschaft beschloss, die Honorierung der Vertreter zu ändern. Sie führte für alle Vertreter ein garantiertes Mindesteinkommen ein, das etwa den Lebensbedürfnissen entsprach. Die Differenz zwischen Provisionseinnahmen und diesem Mindesteinkommen wurde von der Gesellschaft bezahlt. Naturgemäss war diese Differenz etwas höher als das früher vorgesehene monatliche Fixum. Damit wurde zunächst erreicht, dass die freiwilligen Austritte der Vertreter wegen zu geringer Einnahmen oder zu grosser Einnahmensschwankungen stark verringert wurden. Ausserdem wurden die Toleranzgrenzen, also das Minimum für die monatlich neu abzuschliessenden Versicherungen, verringert. Die verhältnismässig starke Streuung der montalichen Einkommen hat ja gezeigt, dass selbst die Summe der Provisionen aus 36 Monaten starken Zufallsschwankungen unterworfen ist. Bei der Festsetzung der Toleranzgrenzen wurde so vorgegangen, dass für jeden Monat seit dem Eintritt des Vertreters ein bestimmter Minimalbetrag festgesetzt wurde. Erreichte die Summe der Provisionen, die der Vertreter seit dem Eintritt bis zum Ende des betreffenden Monates erzielen konnte, nicht das vorgesehene Minimum, dann wurde der Vertreter entlassen.

Bei dieser Vorgangsweise sind zwei Arten von Fehlern möglich:

Fehler erster Art: Ein Vertreter, der tatsächlich zu wenig Versicherungen abschliesst, wird deshalb nicht entlassen, weil infolge der zufälligen Schwankungen seine Provisionen höher waren, als es seinen Fähigkeiten entsprechen würde.

Fehler zweiter Art: Ein Vertreter, dessen Fähigkeiten eine genügend hohe Anzahl von Geschäftsabschlüssen sichern würde, wird entlassen, weil infolge der zufälligen Schwankungen die Summe seiner Provisionen die Toleranzgrenzen nicht erreicht.

Bei der Festsetzung der Toleranzgrenzen ist daher auf diese beiden Fehlermöglichkeiten Bedacht zu nehmen. Für die Festsetzung der Toleranzgrenzen wird ein mathematisches Modell ermittelt. In diesem Modell werden die monatlichen Einkünfte jedes Vertreters als zufällige Variable aufgefasst, wobei der Mittelwert dieser zufälligen Variablen von Vertreter zu Vertreter verschieden ist. Die Abrechnungen der Gesellschaft gestatteten einen Überblick nicht nur über die Verteilung der monatlichen Einkünfte für ein und denselben Vertreter – diese Verteilung war bekanntlich annähernd normal mit einer Streuung von 0,55 m –, sondern auch über die Verteilung der Mittelwerte der monatlichen Einkünfte der Vertreter. Auf Grund dieser Angaben konnte die Gesellschaft bei vorgegebenen Toleranzgrenzen die Zahl der jeweils verbleibenden Vertreter ermitteln und gleichzeitig feststellen, mit welcher Wahrscheinlichkeit Fehler der ersten Art und Fehler der zweiten Art auftreten werden. Diese Berechnungen wurden mit Hilfe der Monte-Carlo-Methode, also durch Simulation, vorgenommen, wobei für jeden der ersten 36 Monate nach dem Eintritt eines Vertreters je 500 Zufallszahlen ausgewählt wurden.

Für die Wahl der Toleranzgrenzen ist natürlich massgebend, welchen Verlust die Gesellschaft durch einen Fehler erster Art bzw. durch einen Fehler zweiter Art erleidet. Naturgemäss ist das Einkommen an Provisionen eines Vertreters kurz nach dem Eintritt niedriger als später. Die Zuschüsse der Gesellschaft, die zur Erlangung des garantierten Mindesteinkommens notwendig sind, werden daher vor allem in den ersten Monaten nach dem Eintritt besonders hoch sein. Erst nach einiger Zeit steigen die Provisionseinnahmen an, so dass keine Zuschüsse seitens der Gesellschaft mehr notwendig sind. Wird nun ein Vertreter nicht entlassen, obwohl er zu wenig Versicherungen abschliesst (Fehler erster Art), dann werden die Zuschüsse der Gesellschaft zu hoch sein. Zwar sind die Zuschüsse in den ersten Monaten noch nicht überhöht, da der Fehler ja gerade dadurch entstanden ist, dass die monatlichen Einkünfte des Vertreters infolge zufälliger Schwankungen überhöht waren, doch muss dieser Fehler durch um so höhere Zuschüsse in der späteren Zeit bezahlt werden. Wird hingegen ein Vertreter entlassen, obwohl er genügend Versicherungen abschliessen würde, dann sind die Zuschüsse der Gesellschaft verloren (Fehler zweiter Art).

Die Verluste auf Grund der beiden Fehlerarten müssen nun gegeneinander abgewogen und danach die Toleranzgrenzen festgesetzt werden.

In dem speziellen Fall war die Zahl der Austritte von Vertretern bei der Gesellschaft, die auf je 1000 aufgenommene Vertreter entfällt, zunächst die folgende:

Zeitraum	Zahl der Austritte
1. bis 12. Monat	613
13. bis 24. Monat	139
25. bis 36. Monat	51
Zusammen	803
Verbleibende Vertreter	197

Nach einer entsprechenden Änderung der Honorierung der Vertreter, insbesondere nach der Einführung eines garantierten Mindesteinkommens sowie nach der Festsetzung entsprechender Toleranzgrenzen, konnte die Zahl der austretenden Vertreter wie folgt verändert werden:

Zeitraum	Zahl der Austritte
1. bis 12. Monat	410
13. bis 24. Monat	169
25. bis 36. Monat	82
Zusammen	661

Die Zahl der nach 36 Monaten, also nach 3 Jahren, noch verbleibenden Vertreter konnte somit um 72 % erhöht werden. Dies allein würde jedoch noch keineswegs eine Verbesserung der Situation bedeuten, wenn nicht gleichzeitig damit erreicht worden wäre, dass die Gesamtsumme der für jeden Vertreter gezahlten Subventionen, also jene Summe, die zur Aufstockung der Einkommen auf das garantierte Mindesteinkommen notwendig ist, auf den Kopf jedes nach 36 Monaten noch im Dienste der Gesellschaft stehenden Vertreters um 22,2 % gesenkt werden konnte. Hiebei ist jedoch zu berücksichtigen, dass eine Reihe anderer Kosten, die insbesondere durch die Neuaufnahme neuer Vertreter neben den Subventionen entstehen, ebenfalls gesenkt werden konnten, da infolge der geringen Austritte von Vertretern weniger Neuaufnahmen notwendig waren.

Es sei noch erwähnt, dass die auf Grund der Monte-Carlo-Methode durch Simulation vorgenommenen Berechnungen über die Zahl der im Dienste der Gesellschaft verbleibenden Vertreter mit den späteren tatsächlichen Ergebnissen im Rahmen der Fehlergrenzen sehr gut übereinstimmten.

Résumé

Les méthodes développées dans le domaine de la recherche opérationnelle, nouvelle branche des mathématiques appliquées en pleine extension, peuvent être également utilisées avantageusement en science actuarielle. Le présent travail donne un résumé d'exemples pratiques, en particulier dans le domaine de la théorie des jeux, de la programmation linéaire et de la méthode de Monte Carlo.

Summary

Operations research is a relative new branch of science, but with a rapid development in the very last years. Many of its methods can be used in insurance mathematics as well. The following study gives an ample review of practical examples, especially with regard to the theory of games, the linear programming and the Monte Carlo-method.

Riassunto

Il ramo della scienza in sviluppo ricerche operazioni può essere applicato con profitto anche a problemi della matematica d'assicurazioni. Gli studi precedenti danno una raccolta di esempi di applicazioni, in special modo della teoria del gioco, del metodo dei programmi lineari e del metodo Monte Carlo.