

**Zeitschrift:** Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker  
= Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of  
Swiss Actuaries

**Herausgeber:** Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

**Band:** 64 (1964)

**Artikel:** Spezielle Lösungen der erweiterten Erneuerungsgleichung

**Autor:** Wettenschwiler, K.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-966971>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 03.02.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Spezielle Lösungen der erweiterten Erneuerungsgleichung

Von K. Wettenschwiler, Wil (SG)

### Zusammenfassung

Nach der Methode der iterierten Kerne werden die Lösungen der erweiterten Erneuerungsgleichung in zwei Spezialfällen exakt hergeleitet (Gesetz von Dormoy, bzw. Moivre als Ausscheidefunktionen). In einem dritten Fall (Gesetz von Jecklin und Leimbacher) ist der lösende Kern so kompliziert, dass nur der Weg zu einem approximativen Resultat angegeben wird.

#### *Die erweiterte Erneuerungsgleichung*

$$\Phi(t) = S(t) + \int_0^t \Phi(k) p(t-k) dk \quad (1)$$

mit  $S(t) = H'(t) + H(0) p_0(t)$

lässt sich leicht interpretieren:  $H(t)$  bezeichne den *Umfang* einer offenen Gesamtheit zur Zeit  $t$ . Die  $H(0)$  Anfangselemente werden nach einer *Ausscheidefunktion*  $p_0(t)$  eliminiert, während die neueintretenden Elemente nach einer Funktion  $p(t)$  ausscheiden. Die Zahl der gesamten Eintritte in einem Moment  $t$  (bei unserer kontinuierlichen Betrachtungsweise heisst das im Intervall  $t$  bis  $t + dt$ ) nennt man die *Erneuerungszahl*  $\Phi(t)$ . Gleichung (1), nach  $H'(t)$  aufgelöst, besagt nun, dass die Änderung des Bestandes sich aus den Eintritten minus Summe der Austritte zusammensetzt. Setzen wir die Entwicklung des Bestandes und die Ausscheidefunktion als bekannt voraus, so stellt sich die Aufgabe, die unbekannte Erneuerungszahl  $\Phi(t)$  zu bestimmen.

Nach der mathematischen Gestalt ist (1) eine *lineare inhomogene Integralgleichung vom Volterraschen Typus zweiter Art*. Durch sukzessive Approximation nach der Methode der iterierten Kerne ergibt sich die Lösung

$$\Phi(t) = S(t) + \int_0^t S(\tau) I(t-\tau) d\tau. \quad (2)$$

Der lösende Kern, auch Resolvente genannt, ist

$$\Gamma(t-\tau) = K_1(t-\tau) + K_2(t-\tau) + \dots, \quad (3)$$

wobei sich die  $K_i(t-\tau)$  nach der Rekursionsformel

$$K_{n+1}(t-\tau) = \int_{\tau}^t p(t-y) K_n(y-\tau) dy, \quad K_1(t-y) = p(t-y),$$

berechnen. Wenn geeignete Rechenmaschinen zur Verfügung stehen, lassen sich mit dieser Methode auch numerische Aufgaben anfassen, während die eleganten Lösungswege mittels Differentiation oder Laplace-Transformation leider oft nur theoretische Möglichkeiten bieten.<sup>1)</sup>

Bekanntlich können analytische Sterbegesetze im allgemeinen nicht befriedigen. Hingegen werden Ausschnitte aus der empirischen Überlebensordnung oft genügend gut durch Funktionsausdrücke wiedergegeben. Da in der Praxis vor allem Personengesamtheiten mit Altern zwischen 20 und 70 (Aktivitätsspanne) wichtig sind, lässt sich wohl der Versuch rechtfertigen, die Erneuerung unter Zugrundelegung einer *analytischen Ausscheideordnung* zu berechnen. Die Neueintretenden sollen das gleiche Eintrittsalter wie die Anfangsgeneration haben. Ferner wollen wir ein *natürliches Anwachsen des Bestandes* annehmen, d. h. der Zuwachs soll nach dem Gesetz von Malthus in jedem Moment proportional zum jeweiligen Bestand sein.

Wir setzen nun in Gleichung (1) für  $H(t)$  immer  $H(t) = c^t$ , während für  $p(t)$  verschiedene Ausdrücke eingesetzt werden. Aus der Ausscheideordnung  $p(t)$  folgt sofort auch die *Verweilwahrscheinlichkeit*

$$P(t) = 1 - \int_0^t p(\tau) d\tau.$$

Im übrigen nehmen wir an, der Ablauf erfolge stets rechnermässig, d. h. dass die beobachteten Werte mit den ihnen zugrunde liegenden Wahrscheinlichkeiten übereinstimmen sollen. Dabei sind die Rechengrößen eigentlich Erwartungswerte.

---

<sup>1)</sup> Es sei auf die Literatur zur Lösung von Integralgleichungen aus der Erneuerungstheorie verwiesen: H. Schulthess, *Volterrasche Integralgleichungen in der Versicherungsmathematik*, Diss. Bern 1935; W. Saxer, *Versicherungsmathematik II*, Springer-Verlag 1958; u. a.

a) Gesetz von Dormoy  $P(t) = a^{-t}$ .

Aus  $P(t)$  folgt die Ausscheidfunktion

$$p(t) = -\frac{dP(t)}{dt} = a^{-t} \ln a.$$

Die Resolvente zu  $p(t-\tau)$  berechnen wir durch Addition der iterierten Kerne

$$K_1(t-\tau) = (\ln a) a^{-(t-\tau)},$$

$$K_2(t-\tau) = (\ln a)^2 \int_{\tau}^t a^{-(t-y)} a^{-(y-\tau)} dy = (\ln a)^2 a^{-(t-\tau)} (t-\tau),$$

$$K_3(t-\tau) = (\ln a)^3 \int_{\tau}^t a^{-(t-y)} a^{-(y-\tau)} (y-\tau) dy = (\ln a)^3 a^{-(t-\tau)} \frac{(t-\tau)^2}{2},$$

.....

$$K_n(t-\tau) = (\ln a)^n a^{-(t-\tau)} \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!},$$

.....

Also nach (3):

$$I(t-\tau) = (\ln a) a^{-(t-\tau)} \left[ 1 + (\ln a) (t-\tau) + \frac{(\ln a)^2 (t-\tau)^2}{2!} + \dots \right],$$

$$I(t-\tau) = (\ln a) a^{-(t-\tau)} e^{(\ln a) (t-\tau)} = \ln a.$$

Mit dem lösenden Kern

$$I(t-\tau) = \ln a = \text{konstant}$$

lässt sich jetzt leicht  $\Phi(t)$  bestimmen:

$$\Phi(t) = H'(t) + p(t) + \int_0^t (H'(\tau) + p(\tau)) I(t-\tau) d\tau,$$

$$\Phi(t) = c^t \ln c + a^{-t} \ln a + \ln a \int_0^t (c^\tau \ln c + a^{-\tau} \ln a) d\tau$$

$$= c^t \ln c + a^{-t} \ln a + \ln a (c^t - 1 - a^{-t} + 1),$$

$$\Phi(t) = c^t (\ln a + \ln c).$$

Neben der Erneuerungszahl  $\Phi(t)$  operiert man häufig mit der *Erneuerungsfunktion*  $\varphi(t)$ , die sich aus der Beziehung

$$\Phi(t) = \varphi(t) H(t) \tag{4}$$

als Intensität der Erneuerung ableitet. Die Relation (4) berücksichtigend, erhalten wir in unserm Fall die äusserst einfache Erneuerungsfunktion

$$\varphi(t) = \ln a + \ln c = \text{konstant.}$$

Würde der Umfang des Bestandes konstant bleiben, so wäre  $\Gamma(t-\tau)$  aus Symmetriegründen, wie ein Vergleich von (1) mit (2) zeigt, schon die Lösung der Erneuerungsfunktion  $\varphi(t)$ . Wir markieren diesen Fall mit einem Index:

$$\varphi_0(t) = \ln a = \text{konstant.}$$

b) *Gesetz von Moivre*  $P(t) = \left(1 - \frac{t}{\omega}\right)$ .

Vernünftigerweise kann sich hier  $t$  nur von 0 bis zu einem endlichen Höchstalter  $\omega$  erstrecken. Die zugehörige Ausscheidefunktion ist

$$p(t) = \frac{1}{\omega} = a = \text{konstant.}$$

Summation der iterierten Kerne

$$\begin{aligned} K_1(t-\tau) &= a, \\ K_2(t-\tau) &= \int_{\tau}^t a a dy = a^2(t-\tau), \\ K_3(t-\tau) &= a^3 \int_{\tau}^t (y-\tau) dy = a^3 \frac{(t-\tau)^2}{2!}, \\ &\dots\dots \\ K_n(t-\tau) &= a^n \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!}, \\ &\dots\dots \end{aligned}$$

liefert die Resolvente

$$\begin{aligned} \Gamma(t-\tau) &= a \left[ 1 + a(t-\tau) + \frac{a^2(t-\tau)^2}{2!} + \dots \right], \\ \Gamma(t-\tau) &= a e^{a(t-\tau)}. \end{aligned}$$

Damit hat  $\varphi_0(t)$  die Form

$$\varphi_0(t) = a q^t, \quad q = e^a.$$

Nach (2) berechnen wir weiter die Erneuerungszahl  $\Phi(t)$ :

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= c^t \ln c + a + \int_0^t a e^{a(t-\tau)} (c^\tau \ln c + a) d\tau \\ &= c^t \ln c + a + a \ln c e^{at} \int_0^t (e^{-a} c)^\tau d\tau + a^2 e^{at} \int_0^t e^{-a\tau} d\tau \\ &= c^t \left( \ln c + \frac{a \ln c}{\ln c - a} \right) + e^{at} \left( a - \frac{a \ln c}{\ln c - a} \right) - a + a, \\ \Phi(t) &= c^t \frac{(\ln c)^2}{\ln c - a} + e^{at} \frac{-a^2}{\ln c - a}. \end{aligned}$$

Dividieren wir durch  $H(t) = c^t$ , so präsentiert sich die Erneuerungsfunktion  $\varphi(t)$  in der Gestalt

$$\varphi(t) = m + n q^t,$$

wobei  $m$ ,  $n$  und  $q$  Funktionen der am Anfang gewählten Konstanten  $a$  und  $c$  sind:

$$m = \frac{(\ln c)^2}{\ln c - a}, \quad n = \frac{a^2}{a - \ln c}, \quad q = \frac{e^a}{c}.$$

c) Gesetz von Jecklin und Leimbacher<sup>1)</sup>

$$P(t) = \left(1 - \frac{t}{\omega}\right) k^t, \quad 0 \leq t \leq \omega < \infty,$$

ist eine Art Kombination der Gesetze von Moivre und Dormoy, die für die speziellen Werte  $k = 1$  resp.  $\omega = \infty$  darin enthalten sind.

Führten diese beiden Spezialfälle, die wir eben in a) und b) untersucht haben, auf erstaunlich einfache Resolventen und entsprechende Erneuerungsfunktionen  $\varphi(t)$ , so zeigt sich jetzt, dass schon dieses scheinbar einfach gebaute  $P(t)$  zu Schwierigkeiten Anlass gibt. Der lösende Kern ist schon so kompliziert, dass schnell die Übersicht verloren geht.

<sup>1)</sup> H. Jecklin und W. Leimbacher: Über ein Sterbegesetz, welches eine exakte Darstellung der Leibrenten durch Zeitrentenwerte erlaubt. Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, Bd. 53 (1953).

Es bleibt somit als einziger Weg die Berechnung einer approximativen Lösung. Der Praxis ist auch mit einer Näherungslösung gedient, sofern man nur sicher ist, dass auch wirklich Konvergenz stattfindet. Dass dies hier der Fall ist, soll im folgenden gezeigt werden.

Zuerst müssen wir wieder aus

$$P(t) = \left(1 - \frac{t}{\omega}\right) k^t$$

die Ausscheidefunktion  $p(t)$  bestimmen:

$$\begin{aligned} p(t) &= -P'(t) = \frac{k^t}{\omega} - \left(1 - \frac{t}{\omega}\right) k^t \ln k \\ &= k^t \left(\frac{1}{\omega} - \ln k\right) + k^t \frac{\ln k}{\omega} t, \end{aligned}$$

$$p(t) = k^t (a + bt)^{-1}, \quad a = \left(\frac{1}{\omega} - \ln k\right), \quad b = \frac{\ln k}{\omega}.$$

Die Berechnung der Resolvente:

$$\begin{aligned} \Gamma(t - \tau) &= K_1(t - \tau) + K_2(t - \tau) + \dots, \\ K_1(t - \tau) &= k^{(t-\tau)} (a + b(t - \tau)), \\ K_2(t - \tau) &= \int_{\tau}^t k^{(t-y)} [a + b(t - y)] k^{(y-\tau)} [a + b(y - \tau)] dy, \\ &\dots\dots\dots \\ K_n(t - \tau) &= \int_{\tau}^t k^{(t-y)} (\dots) k^{(y-\tau)} (\dots) dy, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Wegen der Faltung  $k^{(t-y)} k^{(y-\tau)} = k^{(t-\tau)}$  lässt sich von jedem  $K_n(t - \tau)$  der Faktor  $k^{(t-\tau)}$  abspalten.

$$\Gamma(t - \tau) = k^{(t-\tau)} (K_1^*(t - \tau) + K_2^*(t - \tau) + \dots).$$

1) Mit dieser Funktion haben H. Jecklin und W. Leimbacher in der zitierten Arbeit Rentenwerte und Prämien der gemischten Versicherung innerhalb der Altersgrenzen 20 und 70 berechnet, die mit den nach einer offiziellen Tafel gerechneten Werten gut übereinstimmen (Abweichung  $\approx 0,5 \text{ ‰}$ ). Die Konstanten  $\omega$  und  $k$  hatten dabei die umgerechneten Werte  $k = 1,0158$  und  $\omega = 88,2$ .

Den Stern lassen wir weg und schreiben für  $K_n^*$  wieder  $K_n$ .

$$\begin{aligned}
 K_1(t-\tau) &= a + b(t-\tau), \\
 K_2(t-\tau) &= \int_{\tau}^t [a + b(t-y)] [a + b(y-\tau)] dy \\
 &= a^2(t-\tau) + (ab + ba) \frac{(t-\tau)^2}{2!} + b^2 \frac{(t-\tau)^3}{3!}, \\
 &\dots\dots \\
 K_n(t-\tau) &= \int_{\tau}^t [a + b(t-y)] \left[ \dots + (\dots) \frac{(y-\tau)^m}{m!} + \dots \right] dy, \\
 &\dots\dots
 \end{aligned}$$

Ausmultiplizieren der Integranden und gliedweise Integration führt zu lauter Termen von der Form

$$\int_{\tau}^t a(\dots) \frac{(y-\tau)^m}{m!} dy = a(\dots) \frac{(t-\tau)^{m+1}}{(m+1)!}$$

oder

$$\int_{\tau}^t b(t-y)(\dots) \frac{(y-\tau)^m}{m!} dy = b(\dots) \frac{(t-\tau)^{m+2}}{(m+2)!},$$

denn

$$\int_{\tau}^t (t-y)(y-\tau)^m dy = \frac{(t-\tau)^{m+2}}{(m+1)(m+2)}.$$

$K_n(t-\tau)$  ist demnach ein Polynom in  $(t-\tau)$ :

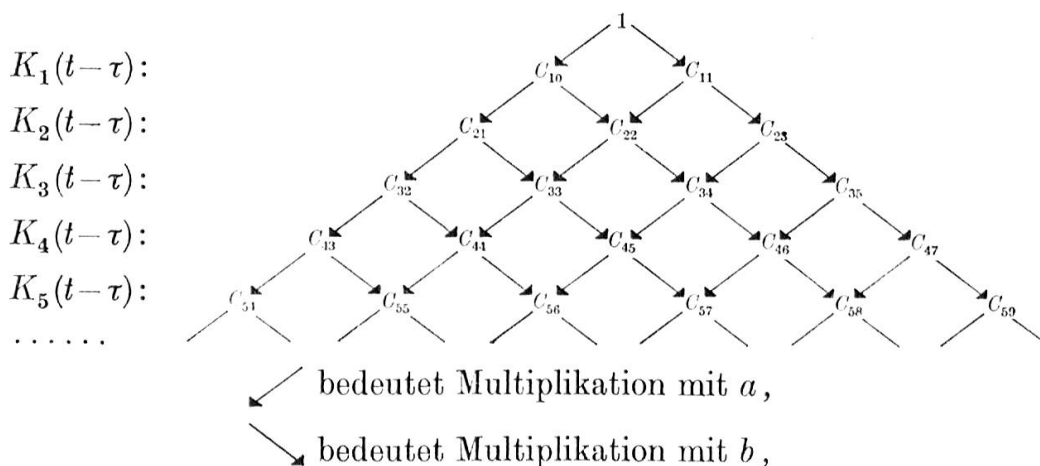
$$K_n(t-\tau) = \sum_{i=n-1}^{2n-1} c_{ni} \frac{(t-\tau)^i}{i!}.$$

Die Koeffizienten berechnen sich nach der Rekursionsformel

$$c_{ni} = a c_{n-1, i-1} + b c_{n-1, i-2}.$$

Man gewinnt die Übersicht über die Koeffizienten  $c_{ni}$ , wenn man sie in einem Schema nach der Art des Pascalschen Dreiecks zusammenstellt:





$c_{ni}$ :  $n$  gibt den Index von  $K_n(t-\tau)$  wieder und

$i$  gibt den Exponenten von  $\frac{(t-\tau)^i}{i!}$  an,  $n-1 \leq i \leq 2n-1$ .

Die Anzahl Möglichkeiten zu einem Punkt  $c_{ni}$  zu gelangen wird offensichtlich durch einen Binomialkoeffizienten gegeben (Galtonsches Brett!).

$$c_{ni} = \binom{n}{i-(n-1)} a^{2n-1-i} b^{i-(n-1)}, \quad n-1 \leq i \leq 2n-1.$$

Die Summe der Exponenten beträgt  $n$ . Die Kombinationszahlen entnimmt man dem Pascalschen Dreieck.

Setzen wir jetzt in

$$\Gamma(t-\tau) = k^{(t-\tau)} \sum_{n=1}^{\infty} K_n(t-\tau) \tag{5}$$

für  $K_n$  die Potenzreihen ein, so lässt sich (5) als Doppelsumme schreiben:

$$\Gamma(t-\tau) = k^{(t-\tau)} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=n-1}^{2n-1} \binom{n}{i-(n-1)} a^{2n-1-i} b^{i-(n-1)} \frac{(t-\tau)^i}{i!}. \tag{6}$$

Die Summationen lassen sich vertauschen:

$$\Gamma(t-\tau) = k^{(t-\tau)} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(t-\tau)^i}{i!} \sum_{n=\left\{\frac{i+1}{2}\right\}}^{i+1} \binom{n}{i-(n-1)} a^{2n-1-i} b^{i-(n-1)}, \tag{7}$$

$\left\{\frac{i+1}{2}\right\}$  bedeutet die nächst grössere ganze Zahl  $\geq \frac{i+1}{2}$ .

$\Gamma(t-\tau)$  hat in (7) die Form einer Potenzreihe. Es ist anzunehmen, dass die Koeffizienten langsamer wachsen als  $i!$ . Die Koeffizienten, will man sie bestimmen, sind jedoch so kompliziert, dass man schnell die Übersicht verliert.

Versuchen wir, ob es gelingt, wenigstens über die Konvergenz der Funktionenreihe (5) Aussagen zu machen.

$$\sum_{n=1}^{\infty} K_n(t-\tau) \text{ Reihe der Funktionen } K_n.$$

$$K_n(t-\tau) = \sum_{i=n-1}^{2n-1} \binom{n}{i-(n-1)} a^{2n-1-i} b^{i-(n-1)} \frac{(t-\tau)^i}{i!}.$$

Für jedes  $n > N_0(t)$  gilt:

$$\frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} > \frac{(t-\tau)^n}{n!},$$

$$\text{denn } 1 > \frac{t-\tau}{n} \text{ für endliches } (t-\tau) \text{ und } n > N_0.$$

Wenn wir beachten, dass nach dem binomischen Lehrsatz

$$\sum_{i=n-1}^{2n-1} \binom{n}{i-(n-1)} a^{2n-1-i} b^{i-(n-1)} = (a+b)^n,$$

so ist für  $K_n(t-\tau)$ ,  $n > N_0$ , folgende Abschätzung statthaft:

$$(a+b)^n \frac{(t-\tau)^{2n-1}}{(2n-1)!} < K_n(t-\tau) < (a+b)^n \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Die rechte und die linke Seite streben für wachsende  $n$  gegen Null und mit ihnen auch die Funktionen  $K_n(t-\tau)$ .

Die Funktionenreihe  $\sum_{n=N_0}^{\infty} K_n(t-\tau)$  hat die Majorante

$$\sum_{n=N_0}^{\infty} (a+b) \frac{[(a+b)(t-\tau)]^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Diese Majorante konvergiert sicher, denn ihr Restglied  $R_n$  ist identisch mit dem Restglied der nach MacLaurin entwickelten Funktion  $(a+b)e^{(a+b)(t-\tau)}$ .

Nach der Restgliedformel von Lagrange ist

$$R_n = (a+b) \frac{[(a+b)(t-\tau)]^{n+1}}{(n+1)!} e^{\Theta(a+b)(t-\tau)}, \quad 0 < \Theta < 1,$$
$$< (a+b) \frac{c^{n+1}}{(n+1)!} e^c < \varepsilon, \text{ für } n \text{ genügend gross.}$$

Damit haben wir sichergestellt:

Die unendliche Funktionenreihe  $\Gamma(t-\tau)$  konvergiert für jedes endliche  $(t-\tau)$  absolut und gleichmässig.

Nun lässt sich die Reihe gliedweise integrieren und man erhält  $\Phi(t)$  in beliebig exakter Approximation.

---

### Résumé

Les solutions de l'équation de renouvellement élargie sont déterminées exactement – d'après la méthode des noyaux itérés – dans deux cas particuliers (loi de Dormoy, resp. de Moivre comme fonctions d'extinction). Dans un troisième cas (loi de Jecklin et Leimbacher) le noyau résolvant est si compliqué que seule la voie conduisant à un résultat approximatif est indiquée.

### Summary

Using the method of iterated kernels, the solutions of the extended renewal equation have been exactly worked out in two special cases (law of Dormoy and Moivre as eliminate functions). In the third case (law of Jecklin and Leimbacher), the kernel is so complicated that only the way to an approximate result has been indicated.

### Riassunto

Secondo il metodo dei nuclei iterati, le soluzioni della equazione ampliata di rinnovamento di una popolazione sono risultate esatte in due casi speciali (regola di Dormoy, risp. di Moivre come funzioni di eliminazione). In un terzo caso (regola di Jecklin e Leimbacher) il nucleo risolvente è talmente complicato che può essere indicata unicamente la via per un risultato approssimativo.