Ruinwahrscheinlichkeit bei erfahrungstarifiertem Portefeuille

Autor(en): **Bühlmann, Hans**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **72 (1972)**

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-967085

Ruinwahrscheinlichkeit bei erfahrungstarifiertem Portefeuille

Von Hans Bühlmann, Zürich

1. Das klassische Modell

In der klassischen Risikotheorie ist der folgende Ansatz für den Risikoprozess üblich. Unter Verwendung der Bezeichnungen:

- Prämieneinnahme im Intervall $[0,t]$: $P(t) = ct$
- Anzahl Schäden im Intervall $[0,t]$: $N(t)$
- Schadenhöhe für den Schaden j: Y_j

werden für die eben definierten Grössen folgende Voraussetzungen gemacht:

α) $\{N(t); t \geq 0\}$ ist ein homogener Poisson-Prozess mit unabhängigen Zuwächsen und Poisson-Parameter λt (= erwartete Anzahl Schäden in $[0,t]$)

β) $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, \ldots$ bilden eine Folge von Zufallsvariablen, welche alle die gleiche Verteilungsfunktion $F(x)$ haben und welche unter sich und auch vom Schadenzählprozess $\{N(t); t \geq 0\}$ unabhängig sind.

Wir wählen im folgenden die Geldeinheit so, dass $E(Y_j) = 1$. Mittels der eingeführten Grundgrössen kann dann der akkumulierte Schaden $S(t)$ (= Total der Schadenbeträge im Intervall $[0,t]$) wie folgt dargestellt werden:

$$S(t) = \sum_{j=0}^{N(t)} Y_j .$$

Für einen Planungshorizont T (möglicherweise ∞) ist schliesslich die Ruinwahrscheinlichkeit $\psi_T(u)$ bei anfänglichem Kapital u wie folgt definiert:

$$\psi_T(u) = P\left[S(t) - P(t) > u \text{ für mindestens ein } t \in [0,T]\right]. \tag{1}$$

2. Kritik am klassischen Modell

Die Pionierarbeiten von *F. Lundberg* [5] und die Untersuchungen von *H. Cramér* [3, 4] wie auch von vielen seiner Schüler, sind – mit gewissen Verallgemeinerungen – diesem eben zitierten klassischen Fall der Ruinwahrscheinlichkeit gewidmet. Mit mathematisch anspruchsvollen Mitteln werden in diesen Arbeiten auch für die Praxis geeignete Formeln für $\psi_T(u)$ hergeleitet. Dieses klassische Modell steht hingegen von der Voraussetzungsseite her unter Kritik. In der Praxis ist beobachtet worden, dass insbesondere die Annahme, es handle sich beim Schadenzählprozess um einen homogenen Poisson-Prozess mit bekanntem festem Parameter, öfters danebentrifft. Dies scheint davon herzurühren, dass die Risikoauswahl, welche das Portefeuille charakterisiert, nicht Elemente eines homogenen Kollektivs zum Gegenstand hat. Diese Feststellung wiederum suggeriert ein Risikomodell, in welchem die Parameter der vorkommenden Verteilungen selbst ebenfalls Zufallsvariablen sind. Prinzipiell lässt sich dieser Gedankengang für Schadenzahl und/oder Schadenhöhe realisieren. Lediglich der Einfachheit halber beschränke ich mich hier auf den Fall schwankender Grundwahrscheinlichkeiten bei der Schadenzahl allein und behalte für die Schadenhöhen die klassische Fiktion der festen Verteilungsfunktion bei. In der Literatur sind dann zwei Wege vorgezeichnet, wie das klassische Modell erweitert werden kann, um den erwähnten Einwänden Rechnung zu tragen.

3. Das Modell von Ove Lundberg

In seiner grundlegenden Arbeit von 1940 [6] fasst *Ove Lundberg* den Poisson-Parameter λ als Zufallsvariable mit einer Verteilungsfunktion (Strukturfunktion) auf. Sein Wert wird zu *Beginn des Zeitablaufes gezogen und bleibt nachher konstant*. Die zufällige Zahl N(t) kommt nach dieser Vorstellung wie folgt zustande:

a) Ziehen eines Wertes für den Parameter λ aus der Verteilung $U(\lambda)$;
b) Ziehen eines Wertes für N(t) aus einer Poisson-Verteilung mit Parameter λt.

Die Verteilung von N(t) entsteht also durch *Gewichtung* der Poisson-Wahrscheinlichkeiten mit der Strukturfunktion $U(\lambda)$:

$$P[N(t) = k] = \int \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} dU(\lambda), \tag{2}$$

wobei bekanntlich, im Falle dass $U(\lambda)$ eine Gamma-Verteilung ist, negativ binomial verteilte Wahrscheinlichkeiten aus der Integration hervorgehen.
Die Ruinwahrscheinlichkeit kann in diesem Falle ebenfalls durch *Gewichtung* berechnet werden. Es gilt

$$\psi_T(u) = \int \psi_T(u/\lambda)\, dU(\lambda), \tag{3}$$

wobei $\psi_T\ (u/\lambda)$ die Ruinwahrscheinlichkeit bei bekanntem Poisson-Parameter λ darstellt, also der im klassischen Fall auftretenden Ruinwahrscheinlichkeit entspricht.

4. Das Modell von Hans Ammeter

Die Grundgedanken seines Pionierwerkes von 1948 [1] sind denjenigen von Ove Lundberg nahe verwandt. Der wesentliche Unterschied ist aber darin zu sehen, dass, während bei O. Lundberg der Risikoparameter nur einmal gezogen wird – nämlich zu Beginn des zeitlichen Ablaufes –, das Modell von Ammeter davon ausgeht, *dass diese Ziehung immer wieder von neuem und unabhängig von den bereits erfolgten vorgenommen wird.* Dabei sei die Zeiteinheit so festgelegt, dass die Zeitpunkte der Ziehungen genau in die ganzzahligen Gitterpunkte der Zeitachse fallen.
Bei Ammeter kommt also die zufällige Zahl $N(t)$ – für ganzes t – wie folgt zustande:

a) $N(t) = \sum_{\tau=1}^{t} [N(\tau) - N(\tau-1)]$,

wobei die Zuwächse $\{N(\tau) - N(\tau-1)\}_{\tau=1,2,\ldots,t}$ unabhängige gleichverteilte Zufallsvariablen sind.

b) Jeder Summand, z. B. $N(1) - N(0) = N(1)$, wird wie nach dem Schema von Ove Lundberg gezogen.

Nun hat Ammeter – im Falle einer Gamma-Strukturfunktion – gezeigt, dass für alle Zuwächse $S(\tau)$—$S(\tau\text{-}1)$ die folgende verblüffende Transformation immer richtig ist

$$P[S(\tau) - S(\tau-1) \leqslant x] = \int \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \overset{*k}{F}(x)\, dU(\lambda) \tag{4}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\mu} \frac{\mu^k}{k!} \overset{*k}{G}(x)$$

für ein geeignetes positives μ und eine geeignete Verteilungsfunktion G(x). Diese eigentliche «Trouvaille» der Ammeterschen Theorie – später für beliebiges unendlich teilbares U(λ) nachgewiesen – erlaubt somit auch in diesem Falle, die klassischen Resultate zu übernehmen, da der Prozess nach der Transformation – mindestens in den ganzzahligen Gitterpunkten – auf das klassische Risikomodell zurückgeführt ist.

5. Das erfahrungstarifierte Portefeuille und seine Ruinwahrscheinlichkeit

Je nach der praktischen Anwendung, welche man im Auge hat, wird man sich für das Modell von Ove Lundberg oder von Ammeter entscheiden. Beim Ammeterschen Modell werden sich die vielen Parameterziehungen nach den Gesetzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung ausmitteln, nicht so aber, wenn wir, wie Ove Lundberg, annehmen, dass der Risikoparameter nur einmal – nämlich am Anfang – gezogen wird. In diesem Falle wird der Versicherungsmathematiker versuchen, auf Grund seiner Erfahrungen mit dem Schadenprozess den gezogenen *Parameterwert zu schätzen*, um dann seine Prämie entsprechend anzupassen. Diese Möglichkeit wollen wir hier jetzt ausschöpfen.
Die Theorie der Erfahrungstarifierung (siehe z.B. [2], Seite 100 ff.) lehrt uns, dass für die Schätzung $\hat{\lambda}$ (t) (= Schätzung des Poisson-Parameters auf Grund der Erfahrungen bis zum Zeitpunkt t) folgende Formel zu verwenden ist:

$$\hat{\lambda}(t) = \frac{\alpha + N(t)}{\beta + t}, \tag{5}$$

wobei N(t) = beobachtete Anzahl Schäden in [0,t]

$$\frac{\alpha}{\beta} = \int \lambda dU(\lambda)$$
$$\frac{\alpha}{\beta^2} = \int \lambda^2 dU(\lambda) - \left(\int \lambda dU(\lambda)\right)^2.$$

Dies bedeutet, dass die Prämieneinnahme – im klassischen Modell als konstanter Strom der Intensität (Steigung) c aufgefasst – jetzt von der Erfahrung mit dem Prozess bestimmt wird, genauer gesagt von der Anzahl der im Intervall [0,t] eingetroffenen Schäden abhängt.

Wir haben somit für die Intensität des Prämienstromes

$$c[N(t),t] = c \cdot \frac{\alpha + N(t)}{\beta + t} \qquad (c > 1) \qquad (6)$$

und somit für die Differenz von Schadenbelastung und Prämieneinnahme

$$S(t) - P(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} Y_j - \int_0^t c[N(\tau), \tau] d\tau. \qquad (7)$$

Die vorliegende Arbeit soll sich mit dem Problem befassen, für das eben beschriebene Modell des erfahrungstarifierten Portefeuilles die Ruinwahrscheinlichkeit $\psi_T(u)$ (siehe Formel 1) zu bestimmen. Dazu ist es nützlich, auf der Zeitachse die zufälligen Punkte W_j der Schadeneintritte zu betrachten. Um eine möglichst einfache Bezeichnungsweise zu haben, wählen wir $W_0 = 0$ und verstehen unter W_j den Zeitpunkt des Eintritts des Schadens j. Falls $N(t) = n$ (Zeichnung) trägt der letzte Zeitpunkt eines Schadeneintritts vor dem Zeitpunkt t die Nummer n

Im Intervall $(W_{j-1}, W_j]$ beträgt die Prämieneinnahme

$$\int_{W_{j-1}}^{W_j} c \frac{\alpha + (j-1)}{\beta + \tau} d\tau = c[\alpha + j - 1] \ln \frac{\beta + W_j}{\beta + W_{j-1}},$$

und für das (letzte) Intervall $(W_n, t]$ ist sie

$$c[\alpha + n] \ln \frac{\beta + t}{\beta + W_n}.$$

Somit gilt für die gesamte Prämieneinnahme in $[0,t]$

$$P(t) = c \sum_{j=1}^{n} [\alpha + j - 1] \ln \frac{\beta + W_j}{\beta + W_{j-1}} + c[\alpha + n] \ln \frac{\beta + t}{\beta + W_n}$$

$$= - c\,\alpha \ln\beta - c \sum_{j=1}^{n} \ln(\beta + W_j) + c[\alpha + n] \ln(\beta + t)$$

$$= c\,\alpha \cdot \ln \frac{\beta + t}{\beta} + c \sum_{j=1}^{n} \ln \frac{\beta + t}{\beta + W_j}.$$

Unter Verwendung von N(t) = n erhalten wir schliesslich

$$P(t) = c \propto \ln \frac{\beta + t}{\beta} + c \sum_{j=1}^{N(t)} \ln \frac{\beta + t}{\beta + W_j} \cdot \tag{8}$$

Damit geht (7) über in

$$S(t) - P(t) = - c \propto \ln \frac{\beta + t}{\beta} + \sum_{j=1}^{N(t)} (Y_j - c \ln \frac{\beta + t}{\beta + W_j}). \tag{9}$$

Diese Darstellung zeigt recht anschaulich, wie beim erfahrungstarifierten Portefeuille zunächst ein Prämienstrom vom Beginn an fliesst (erster Term auf der rechten Seite) und wie nachher jeder Schadeneintrittspunkt W_j Quelle eines zusätzlichen Prämienstromes (zweiter Teil jedes Summanden) ist.
Wir werden im folgenden die letztgefundene Form verwenden, um die Ruinwahrscheinlichkeit $\psi_T(u)$ beim erfahrungstarifierten Portefeuille zu berechnen.

6. *Die Ruinwahrscheinlichkeit bei erfahrungstarifiertem Portefeuille für gegebenen Parameterwert*

Nehmen wir an, dass – obwohl wir selbst den entscheidenden Parameterwert für den Risikoprozess nicht kennen und deshalb das Portefeuille nach seiner Erfahrung tarifieren – jemand anders die uns entzogene Kenntnis hat. Dieser mehrwissende andere soll nun auf Grund seiner Kenntnisse bestimmen, welche Ruinwahrscheinlichkeit wir laufen.
Da bei bekanntem Risikoparameter λ der Schadenzählprozess ein Poisson-Prozess ist, bilden unter der Bedingung N(t) = k die Zeitpunkte $(W_j)_{j=1,2,\ldots,k}$ eine Punktmenge, welche verteilt ist wie die Punktmenge $(W_j')_{j=1,2,\ldots,k}$, die durch das unabhängige Auswürfeln von k zwischen [0,t] gleichverteilten Punkten entsteht. Unter Verwendung der Schreibweise

$$V_j(t) = \ln \frac{\beta + t}{\beta + W_j'} \tag{10}$$

gilt also für $j \leqslant k$

$$E\left[V_j(t) \middle| N(t) = k\right] = \frac{1}{t} \int_0^t \ln \frac{\beta + t}{\beta + \tau} \, d\tau = 1 + \frac{\beta}{t} \ln \left(\frac{\beta}{\beta + t}\right) \tag{11}$$

und $$E\left[V_j^2(t)\Big|_{N(t)=k}\right] = \frac{1}{t}\int_0^t \left(\ln\frac{\beta+t}{\beta+\tau}\right)^2 d\tau = \frac{\beta+t}{t}\int_{\frac{\beta}{\beta+t}}^{1} (\ln u)^2\, du$$

$$= \frac{\beta+t}{t}\left\{(\ln u)^2 u - 2u[\ln u - 1]\right\}\Bigg|_{\frac{\beta}{\beta+t}}^{1}$$

$$= \frac{\beta+t}{t}\left\{2 - \frac{\beta}{\beta+t}\left(\ln\frac{\beta}{\beta+t}\right)^2 + 2\frac{\beta}{\beta+t}\left[\ln\frac{\beta}{\beta+t} - 1\right]\right\}$$

Somit finden wir wegen

$$\mathrm{Var}\left[V_j(t)\Big|_{N(t)=k}\right] = E\left[V_j^2(t)\Big|_{N(t)=k}\right] - \left(E\left[V_j(t)\Big|_{N(t)=k}\right]\right)^2$$

– ebenfalls für $j \leqslant k$ –

$$\mathrm{Var}\left[V_j(t)\Big|_{N(t)=k}\right] = 1 - \frac{\beta(\beta+t)}{t^2}\left(\ln\frac{\beta}{\beta+t}\right)^2. \qquad (12)$$

Zusammenfassend stellen wir fest, dass die rechten Seiten von (11) und (12) nicht von k abhängen. Die Bedingung $N(t) = k$ ist in diesen Formeln also nur insofern von Bedeutung, als sie besagt, dass der j. Schaden vor dem oder im Zeitpunkt t sich ereignet hat. Dies ist gleichbedeutend mit der Bedingung: $j \leqslant N(t)$.

Also halten wir fest

$$E\left[V_j(t)\Big|_{j\leqslant N(t)}\right] = 1 - \frac{\beta}{t}\ln\left[1+\frac{t}{\beta}\right] \qquad (13)$$

$$\mathrm{Var}\left[V_j(t)\Big|_{j\leqslant N(t)}\right] = 1 - \frac{\beta(\beta+t)}{t^2}\left(\ln\left[1+\frac{t}{\beta}\right]\right)^2.$$

Wegen $\lim\limits_{t\to 0}\left[1+\frac{t}{\beta}\right]^{\frac{\beta}{t}} = e$ sieht man, dass beide Ausdrücke unter (13) für $t \to 0$ ebenfalls gegen *Null* streben. Andererseits streben beide Ausdrücke für $t \to \infty$ gegen *Eins*.

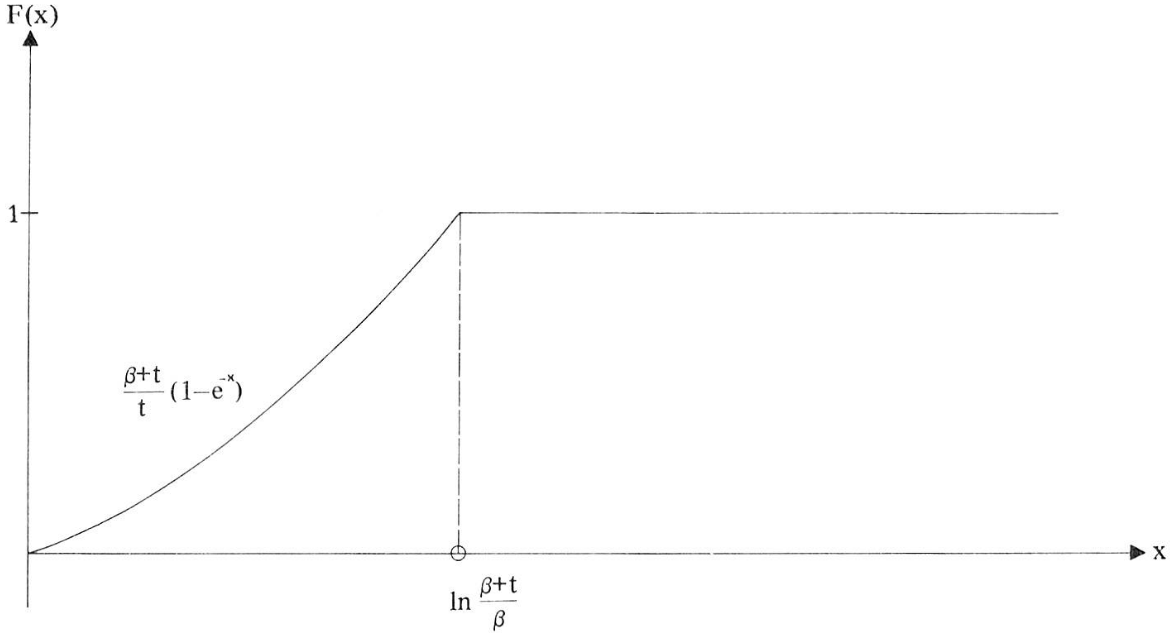
Schliesslich bemerken wir, dass unter der Bedingung $j \leqslant N(t)$ die Verteilungsfunktion von $V_j(t)$ explizit berechnet werden kann. Es gilt

$$P\left[V_j(t) \leqslant x\Big|_{j\leqslant N(t)}\right] = P\left[\ln\frac{\beta+t}{\beta+W_j'} \leqslant x\Big|_{j\leqslant N(t)}\right]$$

$$= P\left[W_j' \geqslant (\beta+t)e^{-x} - \beta\Big|_{j\leqslant N(t)}\right]$$

$$= \min\left\{1, \frac{(\beta+t)}{t}(1-e^{-x})\right\}. \qquad (14)$$

Graphisch sieht diese Verteilungsfunktion wie folgt aus:



Für den Grenzfall $t \to \infty$ erhalten wir – immer unter der Bedingung $j \leqslant N(t)$ – die gewöhnliche Exponentialfunktion mit Erwartungswert 1 und Varianz 1. Wir bezeichnen die mit diesem Grenzfall verbundenen Zufallsvariablen mit $V_j(\infty)$.

Nach diesen Vorbereitungen möchten wir nun die Ruinwahrscheinlichkeit

$$\psi_T(u) = P[\sum_{j=1}^{N(t)} [Y_j - c\, V_j(t)] - c \propto \ln\frac{\beta+t}{\beta} > u \text{ für mindestens ein } t \leqslant T]$$

bestimmen.

Unter Verwendung der Abkürzung

$$Z(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} [Y_j - c\, V_j(t)] - c \propto \ln\frac{\beta+t}{\beta} \tag{15}$$

bestimmen wir zunächst als Grössen, die uns über die «Belastung» $Z(t)$ erste Auskünfte geben: $E[Z(t)]$ und $Var[Z(t)]$.

Wir finden $$E[Z(t)] = \lambda t\left[1 - c + c\frac{\beta}{t}\ln\left(\frac{\beta+t}{\beta}\right)\right] - c\,\alpha\,\ln\frac{\beta+t}{\beta}$$

oder durch Umformen

$$E[Z(t)] = \lambda t[1-c] - c[\alpha - \lambda\beta]\ln\frac{\beta+t}{\beta}. \tag{16}$$

Der erste Teil $\lambda t[1 - c]$ ist – analog zum klassischen Modell – als *Zuschlagsteil* zu verstehen, während $c[\alpha - \lambda\beta]\ln\frac{\beta+t}{\beta}$ dem *Schätzungsbias* entspricht.

Für den Fall $\lambda = \frac{\alpha}{\beta}$, d.h. wenn der wahre Parameterwert dem nach der Strukturfunktion $U(\lambda)$ erwarteten Parameterwert entspricht, ist dieser Schätzungsbias Null. Bemerkenswert ist die Tatsache, dass in jedem Fall der Schätzungsbias nur logarithmisch zunimmt und somit gegenüber dem Zuschlagsteil, der eine lineare Funktion in t ist, rasch an Bedeutung verliert. Diese Feststellung stellt eine eindrückliche Empfehlung für die Prinzipien der Erfahrungstarifierung dar, welche uns – bis auf den Schätzungsbias – ermöglichen, auf dem anvisierten Zuschlagsniveau zu operieren, obwohl wir den wahren Wert des Risikoparameters nicht kennen.
Andererseits rechnet man nach, dass

$$\begin{aligned}\operatorname{Var} Z(t) &= \lambda t\left\{\operatorname{Var}\left[Y_j - c\,V_j(t)\Big|_{j \leqslant N(t)}\right] + (E[Y_j - c\,V_j(t)])^2\right\}\\ &= \lambda t\left\{\operatorname{Var}[Y_j] + c^2 - c^2\frac{\beta(\beta+t)}{t^2}\left(\ln\frac{\beta+t}{\beta}\right)^2 + \left(1 - c + c\frac{\beta}{t}\ln\frac{\beta+t}{\beta}\right)^2\right.,\end{aligned}$$

woraus durch Umordnung entsteht

$$\operatorname{Var} Z(t) = 2\lambda t\left[\frac{1 + \operatorname{Var}[Y_j]}{2} - c + c^2\right] - \lambda c\beta\ln\frac{\beta+t}{\beta}\left[c\ln\frac{\beta+t}{\beta} + 2(c-1)\right]. \tag{17}$$

Auch hier entdecken wir einen linearen und einen logarithmischen (sowie auch quadriert logarithmischen) Bestandteil in unserer Formel. Der lineare Teil stellt wegen $c > 1$ zudem eine Majorante für die Varianzfunktion dar, d.h. wir haben

$$\operatorname{Var} Z(t) \leqslant 2\lambda t\left[\frac{1 + \operatorname{Var}[Y_j]}{2} - c + c^2\right] \text{ für alle } t \in [0,\infty). \tag{18}$$

Man rechnet leicht nach, dass die Schranke $2\lambda t\left[\frac{1+\mathrm{Var}[Y_j]}{2}-c+c^2\right]$ exakt erreicht wird, wenn man in Z(t) alle Summanden $V_j(t)$ durch die Grenzvariablen $V_j(\infty)$ ersetzt.

Da die Berechnung von $\psi_T(u) = P[Z(t) > u$ für ein $t \in [0,T]]$ auf erhebliche Schwierigkeit stösst, legt die eben gemachte Bemerkung den Gedanken nahe, statt

$$Z(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} [Y_j - c\, V_j(t)] - c\alpha \ln \frac{\beta + t}{\beta}$$

die stochastische Funktion

$$Z^*(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} [Y_j - c\, V_j(\infty)] - c[\alpha - \lambda\beta] \ln \frac{\beta + t}{\beta}$$

zu betrachten, welche die gleiche Erwartungswertfunktion wie Z(t) hat und gleichzeitig die Varianzfunktion von Z(t) majorisiert. Es gilt nämlich

$$E[Z^*(t)] = E[Z(t)]$$

$$\mathrm{Var}[Z^*(t)] = 2\lambda t\left[\frac{1 + \mathrm{Var}[Y_j]}{2} - c + c^2\right] \geqslant \mathrm{Var}[Z(t)].$$

Es ist also zu vermuten, dass $\{Z^*(t);\ t \geqslant 0\}$ einen «gefährlicheren» Prozess darstellt als $\{Z(t);\ t \geqslant 0\}$, was die Ungleichung

$$P\left[Z^*(t) > u \text{ für ein } t \in [0,T]\right] \geqslant \psi_T(u) \tag{19}$$

für grosse Werte von u als plausibel erscheinen lässt.

Wir interessieren uns deshalb für die Berechnung von

$$P\left[\sum_{j=1}^{N(t)} [Y_j - c\, V_j(\infty)] > u + c[\alpha - \lambda\beta] \ln \frac{\beta + t}{\beta} \text{ für ein } t \in [0,T]\right] \tag{20}$$

in der Meinung, damit für grosse u-Werte eine vorsichtige Schranke für $\psi_T(u)$ zu bestimmen. Dabei profitieren wir von der glücklichen Koinzidenz, dass unter der Bedingung $j \leqslant N(t)$ die $V_j(\infty)$ exponentiell verteilt und unabhängig sind und die Glieder in der auftretenden stochastischen Summe gerade dieser Bedingung genügen.

Es gilt also $$P[\sum_{j=1}^{N(t)} [Y_j - c\,V_j(\infty)] \leqslant x] = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \left(F(x) * H\left(-\frac{x}{c}\right)\right)^{*k} \tag{21}$$

(man beachte, dass die in der Formel auftretenden Sterne (*) die Faltungsoperation bezeichnen),

wobei $F(x)$ die (gemeinsame) Verteilungsfunktion der Y_j darstellt und $H(x) = 1 - e^{-x}$ ist.

Die stochastische Summe $\sum_{j=1}^{N(t)} [Y_j - c\,V_j(\infty)]$ kann aber auch wie folgt aufgefasst werden (siehe z. B. [2], Seite 145): Die Summanden stellen genau die Differenz von Schadenbelastung und Prämieneinnahme dar, welche in einem klassischen Modell mit Poisson-Parameter $\lambda = 1$ zwischen dem $(j - 1)$. (exklusive) und j. (inklusive) Schadenereignis anfällt:

Y_j ist der einzige Schadenbetrag, der während dieses Intervalles anfällt; $c(W_j - W_{j-1})$ ist die Prämieneinnahme in diesem Intervall, wobei $W_j - W_{j-1}$ exponentiell verteilt ist mit Parameter 1, also der gleichen Verteilung genügt, wie sie für $V_j(\infty)$ unter der Bedingung $j \leqslant N(t)$ gilt.

Wir sind somit für die Berechnung der Ruinwahrscheinlichkeit gemäss Formel (20) wie im klassischen Fall beim Problem angelangt, den diskreten Random Walk

$$S_0, S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots \qquad S_0 = 0$$
$$S_n = \sum_{j=1}^{n} (Y_j - c V_j(\infty)) \text{ für } n \geqslant 1$$

zu studieren. Für den Fall $\lambda = \frac{\alpha}{\beta}$ (d. h. falls der wahre Wert des Risikoparameters gleich dem nach der Strukturfunktion $U(\lambda)$ erwarteten ist) ist Ruin gleichbedeutend mit dem Ereignis, dass das Maximum des Random Walks über $[0,T]$ die anfänglichen Mittel u überschreitet, d. h. es gelten die üblichen Formeln, welche aus dem klassischen Modell hergeleitet worden sind. Der Fall $\lambda \neq \frac{\alpha}{\beta}$ bietet einige Schwierigkeiten, da der Schätzbias je *nach Zeitpunkt des Eintretens des Maximums* die Grenze u, deren Überschreiten Ruin bedeutet, nach oben oder nach unten verschiebt.
Wir beschränken uns hier auf grobe Schätzungen für den Fall $\lambda \neq \frac{\alpha}{\beta}$. Zunächst ist für $\lambda < \frac{\alpha}{\beta}$ der zusätzliche Prämienstrom aus dem Schätzungsbias positiv, also ist für diesen Fall die Ruinwahrscheinlichkeit für $\lambda = \frac{\alpha}{\beta}$ eine Majorante. Im

Falle $\lambda > \frac{\alpha}{\beta}$ wollen wir annehmen, dass wir das Ruinereignis nur in den Gitterpunkten $(nh)_{n=0,1,2,\ldots}$ zu vermeiden wünschen. Dann ist der erstmögliche Eintritt des Ruins im Zeitpunkt h möglich. Bis dann ist der negative Prämienstrom auf $c[\alpha - \lambda\beta] \ln \frac{\beta+h}{\beta}$ angewachsen, und wir erhalten wiederum eine Majorante für die Ruinwahrscheinlichkeit, falls wir annehmen, dass in den weiteren Perioden der Länge h die Belastung durch den Schätzungsbias ebenfalls $c[\alpha - \lambda\beta] \ln \frac{\beta+h}{\beta}$ beträgt. Damit haben wir aber die Möglichkeit, durch Übergang von c auf

$$c^* = c\left[1 + \frac{1}{h}(\alpha - \lambda\beta)\ln\frac{\beta+h}{\beta}\right] \tag{22}$$

wiederum den Wert dieser Majorante aus dem klassischen Modell zu entnehmen.

7. *Ein numerisches Beispiel*

Wir nehmen an, dass der Poisson-Parameter λ nach der Gamma-Dichte

$$f(\lambda) = \frac{\beta^\beta}{\Gamma(\beta)}\lambda^{\beta-1}e^{-\beta\lambda}$$

verteilt sei. Es gilt dann

$$E(\lambda) = 1 \text{ und } Var(\lambda) = \frac{1}{\beta},$$

und die Erfahrungstarifierungsformel lautet

$$\hat{\lambda}(t) = \frac{\beta + N(t)}{\beta + t}.$$

Die Parameterwerte seien wie folgt angenommen:

$\beta = 1$ für die Strukturfunktion,
$c = 1.1$ für die Intensität des Prämienstromes.

Der Planungshorizont T sei ∞.

Schliesslich wollen wir noch annehmen, dass die Y_j exponentiell verteilt seien, d.h. $P[Y_j \leq x] = 1 - e^{-x}$.

Wir tabellieren im folgenden die Ruinwahrscheinlichkeit (besser: deren vorsichtige Schätzung) für verschiedene wahre Werte λ_0 von λ. Es gilt dabei vergleichsweise

$$\psi_{\infty}(u) = \frac{1}{c} e^{-\frac{c-1}{c}u} = \frac{1}{1.1} e^{-0{,}091\,u}$$

im klassischen Modell mit $\lambda = 1$.

	h = 100	h = 1000	$P[\lambda \leqslant \lambda_0]$
$\lambda_0 = 1/2$	$\frac{1}{1.1} e^{-0.091\,u}$	$\frac{1}{1.1} e^{-0.091\,u}$	39,3%
$\lambda_0 = 1$	$\frac{1}{1.1} e^{-0.091\,u}$	$\frac{1}{1.1} e^{-0.091\,u}$	63,2%
$\lambda_0 = 1\,1/2$	$\frac{1}{1.075} e^{-0.070\,u}$	$\frac{1}{1.096} e^{-0.088\,u}$	77,7%
$\lambda_0 = 2$	$\frac{1}{1.049} e^{-0.047\,u}$	$\frac{1}{1.092} e^{-0.084\,u}$	86,5%
$\lambda_0 = 2\,1/2$	$\frac{1}{1.024} e^{-0.023\,u}$	$\frac{1}{1.089} e^{-0.082\,u}$	91,8%

Wir verwenden hier $c^* = c\,[1 + (1 - \lambda_0)\frac{\beta}{h}\ln(1 + \frac{h}{\beta})]$ für $\lambda_0 > 1$ und tabellieren in der letzten Kolonne die Werte der Strukturfunktion, welche die Wahrscheinlichkeit angeben, mit welcher der Risikoparameter unter dem Niveau λ_0 bleibt.

8. Die Ruinwahrscheinlichkeit bei erfahrungstarifiertem Portefeuille, falls der Parameterwert nicht bekannt ist

Nachdem wir die Ruinwahrscheinlichkeit bei bekanntem Risikoparameter prinzipiell bestimmen können – auf die praktischen Schwierigkeiten haben wir im vorletzten Abschnitt hingewiesen –, erhält man nun bei unbekanntem Risikoparameter die uns interessierende Grösse durch Integration mittels der Strukturfunktion. Wir verzichten auf die praktische Durchführung des Verfahrens und möchten darauf hinweisen, dass für die Praxis erst dann sinnvolle Resultate bei dieser Integration zu erwarten sind, wenn die im vorletzten Abschnitt gegebenen groben Abschätzungen noch wesentlich verbessert werden können. Es ist deshalb zu hoffen, dass eine Verfeinerung der Abschätzungen bald gefunden wird.

Literaturverzeichnis

[1] *Ammeter, H.:* A generalization of the collective theory of risk in regard to fluctuating basic probabilities. Skandinavisk Aktuarietidskrift *31* (1948), S. 171–198.
[2] *Bühlmann, H.:* Mathematical Methods in Risk Theory, Springer 1970.
[3] *Cramér, H.:* On the mathematical theory of risk. Skandia Jubilee Volume, Stockholm 1930.
[4] *Cramér, H.:* Collective Risk Theory, a survey of the theory from the point of view of the theory of stocastic processes. Skandia Jubilee Volume, Stockholm 1955.
[5] *Lundberg, F.:* Über die Theorie der Rückversicherung. Berichte VI. Int. Kongress Versicherungsmathematiker (1909), S. 877–948.
[6] *Lundberg, O.:* On random processes and their applications to sickness and accident statistics. University of Stockholm, Thesis, Uppsala 1940.

Zusammenfassung

Die Frage nach der Ruinwahrscheinlichkeit bei schwankendem Risikoparameter wird hier für den Fall diskutiert, wo dieser Parameter auf Grund der Erfahrung laufend geschätzt wird. Es resultiert ein wesentlich komplizierteres «Random-Walk-Problem» als im klassischen Fall, wobei es aber gelingt, geeignete Abschätzungen für die numerische Berechnung zu finden.

Summary

The probability of ruin is discussed in the case of a fluctuating risk parameter which is continuously estimated on the basis of past experience. There results a random walk problem which is considerably more complicated than in the classical case. However one can derive cautious bounds which are convenient for numerical calculations.

Résumé

On discute le problème de la probabilité de ruine dans le cas d'un paramètre de risque variable. Si l'on estime ce paramètre continuellement à la base de l'expérience faite dans le passé, on obtient un problème du type «marche aléatoire» qui est beaucoup plus compliqué que dans le cas classique. Au moins on peut dériver des bornes qui sont convenables pour l'évaluation numérique.

Riassunto

Si discute il problema della probabilità di rovina nel caso di un parametro di rischio variabile. Se si stima questo parametro di modo continuo alla base dell'esperienza nel passato, si arriva ad un problema del tipo «cammino stochastico» molto più difficile del caso classico. Almeno si può trovare formole approssimative che sono adatte all'evaluazione numerica.