

Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker
= Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of
Swiss Actuaries

Band: 73 (1973)

Artikel: La réserve de risque de la compagnie d'assurances et les
investissements

Autor: Frisque, André

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-555464>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 06.10.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

La réserve de risque de la compagnie d'assurances et les investissements

Par André Frisque, Bruxelles

1. Introduction

Les décisions que doit prendre une compagnie d'assurances relativement à un risque se basent sur la connaissance de certaines probabilités en vue du calcul du coût du risque.

Elles reposent aussi sur l'attitude du preneur de décisions face au risque, sur «l'utilité» de la situation de risque.

La situation de risque est caractérisée par la réserve de risque de la compagnie et la fonction de répartition des sinistres (*Seal*, 1969).

Nous examinons l'influence de la structure de la réserve de risque de la compagnie sur la gestion optimale de celle-ci: la compagnie cherche à rendre maximum l'utilité moyenne de la réserve de risque.

2. Modèle mathématique

2.1. *Eléments du modèle*

Le modèle est décrit par les trois éléments suivants:

S la réserve de risque de la compagnie au début de la période considérée, période comprise entre deux bilans successifs (*Bohman*, 1971; *Borch*, 1972; *Seal*, 1969).

P les primes perçues au cours de la période. Nous tenons compte des primes de risque (nettes), augmentées d'un chargement de sécurité (*Beard*, 1969; *Seal*, 1969).

X les sinistres payés durant cette même période. X est une variable stochastique avec la fonction de répartition

$$F_X(x) = P [X \leq x] \quad (X \geq 0).$$

Nous considérons de plus les deux paramètres k_1 et k_2 :

k_1 la part du portefeuille conservée par la compagnie dans un système de réassurance quota. $0 \leq k_1 \leq 1$.

k_2 la part de la réserve de risque S conservée sous forme liquide. $0 \leq k_2 \leq 1$.
Dès lors, $1 - k_2$ est la part de la réserve de risque investie. Soit r le taux d'intérêt moyen des investissements.

2.2. Equation du modèle

A la fin de la période, la réserve de risque de la compagnie est déterminée par l'équation

$$S_1 = S [k_2 + (1 - k_2) \cdot (1 + r)] + k_1 (P - X).$$

2.3. Liquidation des investissements

Lorsque le montant disponible pour payer les sinistres est insuffisant, nous supposons qu'un coût intervient dans la liquidation d'investissements en vue de régler les sinistres (*Borch*, 1968).

Le montant disponible pour payer les sinistres $k_1 X$ est

$$k_2 S + k_1 P.$$

Ce montant est insuffisant si

$$k_1 X > k_2 S + k_1 P$$

ou

$$X > \frac{k_2 S + k_1 P}{k_1} \quad (k_1 \neq 0).$$

Désignons par K le second membre de cette inégalité.

$$K = \frac{k_2 S + k_1 P}{k_1}$$

La probabilité que X soit supérieur à K ou P [$X > K$] est égale à

$$1 - P[X \leq K] = 1 - F(K).$$

Soit c le coût unitaire de liquidation des investissements. Le coût moyen total de l'opération est égal à

$$c \int_K^{\infty} (k_1 x - k_2 S - k_1 P) dF(x) = c \int_K^{\infty} k_1 (x - K) dF(x).$$

2.4. Utilité moyenne

L'utilité moyenne de la réserve de risque en fin de période est égale à

$$\int_0^K u [k_2 S + (1 - k_2) \cdot (1 + r)S + k_1 (P - x)] dF(x) \\ + \int_K^{\infty} u [k_2 S + (1 - k_2) \cdot (1 + r) \cdot S + k_1 (P - x) - ck_1 (x - K)] dF(x).$$

Dans cette expression, u désigne la fonction d'utilité de la compagnie d'assurances.

2.5. Utilité moyenne maximum

Nous obtenons l'utilité moyenne maximum en cherchant les valeurs de k_1 et k_2 qui rendent maximum l'expression du 2.4.

Nous devons avoir

$$0 \leq k_1 \leq 1; 0 \leq k_2 \leq 1.$$

Si le couple optimal (k_1, k_2) est dans le carré unitaire, les valeurs de k_1 et k_2 conviennent et déterminent le quota de réassurance et la part de la réserve de risque à conserver sous forme liquide.

Si le couple optimal (k_1, k_2) est en dehors du carré unitaire, nous pouvons, étant donné la valeur de k_1 correspondant au traité de réassurance, choisir la valeur de k_2 qui rend maximum l'utilité moyenne de la réserve de risque.

3. Exemples

Nous considérons des fonctions d'utilité particulières et des fonctions de répartition des sinistres F déterminées.

Les fonctions d'utilité choisies sont :

$$u(x) = x \quad \text{à indifférence au risque,}$$

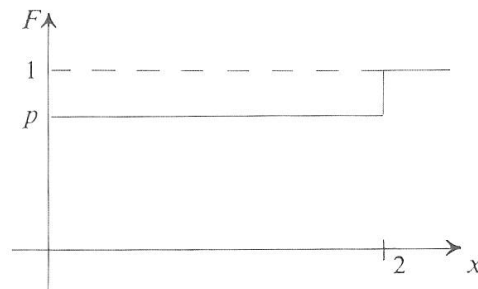
$$u(x) = 1 - e^{-x} \quad \text{à aversion de risque.}$$

Les fonctions de répartition des sinistres sont :

$F(x)$ quelconque

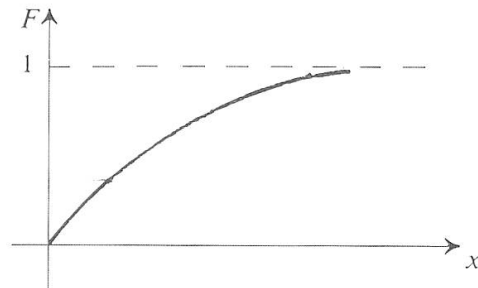
$$F(x) = p \quad (0 \leq x < 2)$$

$$= 1 \quad (2 \leq x < \infty)$$



Dans ce cas, X peut prendre les deux valeurs 0 et 2, respectivement avec les probabilités p et q (Borch, 1964; de Finetti, 1957).

$$F(x) = 1 - e^{-x}$$



Dans ce cas, X peut prendre toute valeur positive (Borch, 1972).

3.1. $u(x) = x$

3.1.1. $F(x)$ quelconque

L'utilité moyenne de la réserve de risque est dans ce cas égale à

$$E_1 = \int_0^K [k_2 S + (1 - k_2) \cdot (1 + r)S + k_1 (P - x)] dF(x)$$

$$+ \int_K^\infty [k_2 S + (1 - k_2)(1 + r)S + k_1 (P - x) - ck_1 (x - K)] dF(x)$$

$$E_1 = -rSk_2 + (1+r)S + k_1 \left(P - \int_0^{\infty} x dF(x) \right) - ck_1 \int_K^{\infty} (x-K) dF(x). \quad K = \frac{k_2 S + k_1 P}{k_1}.$$

Etude du maximum de l'expression E_1 .

Soit une valeur fixée de k_2 .

La condition de premier ordre pour avoir le maximum par rapport à k_1 s'écrit:

$$\frac{\delta E_1}{\delta k_1} = P \left(1 + c \int_K^{\infty} dF(x) \right) - \int_0^{\infty} x dF(x) - c \int_K^{\infty} x dF(x) = 0. \quad (1)$$

La dérivée seconde par rapport à k_1 est:

$$\frac{\delta^2 E_1}{\delta k_1^2} = - \frac{c k_2 S}{k_1^2} (K - P) \cdot F'(K).$$

Elle est négative. Dès lors, l'annulation de la dérivée première donne une valeur de k_1 rendant E_1 maximum.

Il faut avoir $0 \leq k_1 \leq 1$. Si la valeur optimale de k_1 est située en dehors de $(0,1)$, nous prenons la valeur de k_1 comprise entre 0 et 1 qui donne à E_1 la plus grande valeur possible.

Soit une valeur fixée de k_1 .

La condition de premier ordre pour avoir le maximum par rapport à k_2 s'écrit:

$$\frac{\delta E_1}{\delta k_2} = S \left(-r + c \int_K^{\infty} dF(x) \right) = 0. \quad (2)$$

La dérivée seconde de E_1 par rapport à k_2 est:

$$\frac{\delta^2 E_1}{\delta k_2^2} = - \frac{cS^2}{k_1} \cdot F'(K).$$

Elle est négative. Dès lors, l'annulation de la dérivée première donne une valeur de k_2 rendant E_1 maximum.

Il faut avoir $0 \leq k_2 \leq 1$. Si la valeur optimale de k_2 est située en dehors de $(0,1)$, nous prenons la valeur de k_2 comprise entre 0 et 1 qui donne à E_1 la plus grande valeur possible.

Le maximum de E_1 a lieu pour les valeurs de k_1 et k_2 satisfaisant à (1) et (2) pourvu que le couple (k_1, k_2) soit dans le carré unitaire. Dans ce cas, les valeurs de k_1 et k_2 déterminent le quota de réassurance et la part de S à conserver sous forme liquide. Si le couple optimal (k_1, k_2) est en dehors du carré unitaire, nous pouvons, par exemple, étant donné la valeur de k_1 correspondant au traité de réassurance, choisir la valeur de k_2 qui rend maximum l'utilité moyenne de la réserve de risque.

$$\begin{aligned} 3.1.2. \quad F(x) &= p \quad (0 \leq x < 2) \\ &= 1 \quad (2 \leq x < \infty) \end{aligned} \quad (P = 2q + \eta).$$

L'utilité moyenne de la réserve de risque est égale à

$$E_2 = [k_2 S + (1 - k_2) \cdot (1 + r)S + k_1 P] \cdot p + [k_2 S + (1 - k_2) \cdot (1 + r)S + k_1 (P - 2) - c(k_1 \overline{2 - P - k_2 S})] \cdot q$$

$$E_2 = (-r + cq)S k_2 + [P(1 + cq) - 2q(1 + c)] k_1 + (1 + r)S.$$

Etude du maximum de l'expression E_2 .

Pour une valeur fixée de k_2 , le maximum a lieu pour

$$\begin{aligned} k_1 &= 1 && \text{si } P(1 + cq) - 2q(1 + c) > 0 && \text{ou } P > \frac{2q(1 + c)}{1 + cq} && \text{ou } \eta > \frac{2c pq}{1 + cq} \\ k_1 &= 0 && \text{si } P(1 + cq) - 2q(1 + c) < 0 && \text{ou } P < \frac{2q(1 + c)}{1 + cq} && \text{ou } \eta < \frac{2c pq}{1 + cq} \\ k_1 &\text{ quelconque} && \text{si } P(1 + cq) - 2q(1 + c) = 0 && \text{ou } P = \frac{2q(1 + c)}{1 + cq} && \text{ou } \eta = \frac{2c pq}{1 + cq} \end{aligned}$$

Pour une valeur fixée de k_1 , le maximum a lieu pour

$$\begin{aligned} k_2 &= 1 && \text{si } -r + cq > 0 && \text{ou } c > \frac{r}{q} \\ k_2 &= 0 && \text{si } -r + cq < 0 && \text{ou } c < \frac{r}{q} \\ k_2 &\text{ quelconque} && \text{si } -r + cq = 0 && \text{ou } c = \frac{r}{q} \end{aligned}$$

Maximum de E_2 .

$$\begin{array}{l}
 \text{Si } \eta > \frac{2c pq}{1+cq} \quad k_1 = 1 \\
 \left. \begin{array}{l} c < \frac{r}{q} \quad k_2 = 0 \\ c = \frac{r}{q} \quad k_2 \text{ quelconque} \end{array} \right\} \text{Max } E_2 = (1+r)S + (P-2q) + (P-2)cq \\
 c > \frac{r}{q} \quad k_2 = 1 \quad \text{Max } E_2 = (1+cq)S + (P-2q) + (P-2)cq.
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{Si } \eta \leq \frac{2c pq}{1+cq} \quad k_1 = 0 \quad \text{ou quelconque (valeur du traité de réassurance)} \\
 \left. \begin{array}{l} c < \frac{r}{q} \quad k_2 = 0 \\ c = \frac{r}{q} \quad k_2 \text{ quelconque} \end{array} \right\} \text{Max } E_2 = (1+r)S \\
 c > \frac{r}{q} \quad k_2 = 1 \quad \text{Max } E_2 = (1+cq)S.
 \end{array}$$

$$3.1.3. \quad F(x) = 1 - e^{-x} \quad (P = 1 + \eta)$$

L'utilité moyenne de la réserve de risque est égale à

$$E_3 = -k_2 r S + (1+r)S + k_1 (P-1 - ce^{-K}) \quad K = \frac{k_2 S + k_1 P}{k_1}.$$

Etude du maximum de l'expression E_3 .

Les conditions de premier ordre en k_1 et k_2 s'écrivent :

$$P - 1 - ce^{-K} \frac{k_1 + k_2 S}{k_1} = 0 \quad (1)$$

$$e^{-K} = \frac{r}{c}. \quad (2)$$

Le maximum de E_3 a lieu pour les valeurs de k_1 et k_2 satisfaisant à (1) et (2) pourvu que le couple (k_1, k_2) soit dans le carré unitaire.

Dès lors
$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{r-P+1}{-rS}; e^{\frac{(1+r) \cdot (1-P)}{r}} = \frac{r}{c}. \quad (3)$$

Discussion

La dérivée première par rapport à k_2 s'écrit :

$$(ce^{-K} - r) \cdot S$$

1)
$$ce^{-K} - r < 0 \left(e^{-K} < \frac{r}{c} \right) \quad \forall k_1, k_2$$

Nous prenons $k_2 = 0$ pour une valeur fixée de k_1 .

$$E_3 = (1+r)S + k_1(P-1-ce^{-P})$$

Le maximum de E_3 a lieu pour

$k_1 = 1$ si $e^{-P} < \frac{P-1}{c}$; $\text{Max } E_3 = (1+r)S + P-1-ce^{-P}$

$k_1 = 0$ si $e^{-P} > \frac{P-1}{c}$; $\text{Max } E_3 = (1+r)S$

k_1 valeur du traité si $e^{-P} = \frac{P-1}{c}$; $\text{Max } E_3 = (1+r)S$.

2)
$$ce^{-K} - r > 0 \left(e^{-K} > \frac{r}{c} \right) \quad \forall k_1, k_2.$$

Nous prenons $k_2 = 1$ pour une valeur fixée de k_1 .

$$E_3 = S + k_1 \left(P-1-ce^{-\frac{k_1 P+S}{k_1}} \right).$$

Il faut alors trouver la valeur de k_1 rendant E_3 maximum.

3)
$$ce^{-K} - r = 0 \left(e^{-K} = \frac{r}{c} \right).$$

Les valeurs maximales de k_1 et k_2 doivent satisfaire à (3). En supposant $0 \leq k_1 \leq 1$, la condition $0 \leq k_2 \leq 1$ entraîne les deux inégalités :

$$r \leq P-1; r \geq \frac{(P-1)k_1}{S+k_1}.$$

De plus

$$\text{Max } E_3 = (1+r)S.$$

Si $r > P-1$, nous prenons $k_2 = 0$ et

$$E_3 = (1+r)S + k_1(P-1-ce^{-P}) \quad (\text{voir 1}).$$

Si $r < \frac{(P-1)k_1}{S+k_1}$, nous prenons $k_2 = 1$ et

$$E_3 = S + k_1 \left(P-1-ce^{-\left(P+\frac{S}{k_1}\right)} \right) \quad (\text{voir 2}).$$

$$3.2. \quad u(x) = 1 - e^{-x}$$

3.2.1. $F(x)$ quelconque

L'utilité moyenne de la réserve de risque est égale à

$$\begin{aligned} E^1 &= \int_0^K \left(1 - e^{-[k_2 S + (1-k_2) \cdot (1+r)S + k_1(P-x)]} \right) dF(x) \\ &\quad + \int_K^\infty \left(1 - e^{-[k_2 S + (1-k_2) \cdot (1+r)S + k_1(P-x) - ck_1(x-K)]} \right) dF(x) \\ E^1 &= 1 - e^{-[-rSk_2 + (1+r)S + k_1P]} \cdot \left[\int_0^K e^{k_1 x} dF(x) + \int_K^\infty e^{k_1 x + ck_1(x-K)} dF(x) \right]. \end{aligned}$$

Nous étudions le maximum de E^1 dans des cas particuliers de fonctions de répartition des sinistres.

$$\begin{aligned} 3.2.2. \quad F(x) &= p(0 \leq x < 2) \\ &= 1(2 \leq x < \infty) \end{aligned}$$

L'utilité moyenne de la réserve de risque est égale à

$$E^2 = 1 - e^{-[-rSk_2 + (1+r)S + k_1P]} \cdot \left(p + qe^{2k_1 + c(k_1 2 - P - k_2 S)} \right).$$

Etude du maximum de E^2

Les conditions de premier ordre en k_1 et k_2 s'écrivent :

$$k_1 = \left[\log_e \frac{Pp}{q(2-P) \cdot (1+c)} + ck_2S \right] \cdot \frac{1}{2+2c-Pc} \quad (1)$$

$$k_2 = \left[k_1(2+2c-Pc) - \log_e \frac{rp}{q(c-r)} \right] \cdot \frac{1}{cS}. \quad (2)$$

Le maximum de E^2 a lieu pour les valeurs de k_1 et k_2 satisfaisant à (1) et (2), pourvu que le couple (k_1, k_2) soit dans le carré unitaire.

De ces deux relations, nous déduisons que

$$\frac{Pc}{1+c} = \frac{2r}{1+r}; \quad \eta = \frac{2r(1+c) - 2cq(1+r)}{c(1+r)}. \quad (3)$$

k_2 est indéterminé; k_1 est unique.

Discussion

$$1) \quad \frac{Pc}{1+c} = \frac{2r}{1+r} \quad 0 \leq k_1 \leq 1.$$

Pour toute valeur de k_2 telle que $0 \leq k_2 \leq 1$, nous aurons :

$$0 \leq \left[k_1(2+2c-Pc) - \log_e \frac{rp}{q(c-r)} \right] \cdot \frac{1}{cS} \leq 1$$

$$\frac{\log_e \frac{rp}{q(c-r)}}{2+2c-Pc} \leq k_1 \leq \frac{cS + \log_e \frac{rp}{q(c-r)}}{2+2c-Pc}$$

$$2) \quad \frac{Pc}{1+c} \neq \frac{2r}{1+r}.$$

a) Nous considérons la valeur k_1 du traité de réassurance et rendons maximum par rapport à k_2 .

$$k_2 = \left[k_1(2+2c-Pc) - \log_e \frac{rp}{q(c-r)} \right] \cdot \frac{1}{cS}.$$

Pour que k_2 soit compris entre 0 et 1, nous devons avoir :

$$\frac{\log_e \frac{rp}{q(c-r)}}{2+2c-Pc} \leq k_1 \leq \frac{cS + \log_e \frac{rp}{q(c-r)}}{2+2c-Pc}.$$

b) Nous considérons la valeur k_1 du traité de réassurance et prenons $k_2 = 1$ si nous avons la relation

$$k_1 > \frac{cS + \log_e \frac{rp}{q(c-r)}}{2+2c-Pc}.$$

Dans ce cas :

$$\text{Max } E^2 = 1 - e^{-[S+k_1P]} \cdot (p + qe^{k_1(2+2c-Pc)} - cS).$$

$$3.2.3. \quad F(x) = 1 - e^{-x}$$

L'utilité moyenne de la réserve de risque est égale à

$$E^3 = 1 - e^{-[-k_2 rS + (1+r)S + k_1 P]} \cdot \left[\frac{e^{-(1-k_1)K} \cdot ck_1 + 1 - k_1 - ck_1}{(1-k_1)(1-k_1-ck_1)} \right] \quad K = \frac{k_2 S + k_1 P}{k_1}$$

$$(k_1 \neq 1; k_1(1+c) \neq 1).$$

Etude du maximum de E^3

Soit une valeur fixée de k_2 .

La dérivée première de E^3 par rapport à k_1 est :

$$\frac{\delta E^3}{\delta k_1} = -e^{-[-k_2 rS + (1+r)S + k_1 P]} \cdot \left\{ ce^{-(1-k_1)K} \cdot [(1-k_1)(1-k_1-ck_1)(K - Pk_1) + 1 - k_1^2(1+c)] \right. \\ \left. + (1-k_1-ck_1)^2 \cdot (1-P + Pk_1) \right\} \cdot \frac{1}{(1-k_1)^2 \cdot (1-k_1-ck_1)^2}.$$

Si $1 - P + Pk_1 \geq 0$ ($k_1 \geq \frac{P-1}{P}$), la dérivée est constamment négative, ce qui implique que E^3 est décroissante.

Nous prenons $k_1 = \frac{P-1}{P}$ pour avoir la plus grande valeur possible de E^3 .

Soit une valeur fixée de k_1 .

La dérivée première de E^3 par rapport à k_2 est :

$$\frac{\partial E^3}{\partial k_2} = - \frac{e^{-[-k_2 r S + (1+r) S + k_1 P]}}{(1-k_1) \cdot (1-k_1 - ck_1)} \cdot \left[e^{-(1-k_1)K} \cdot cS \cdot (rk_1 + 1) + rS (1-k_1 - ck_1) \right].$$

Si $1 - k_1 - ck_1 > 0$ ($k_1 < \frac{1}{1+c}$), la dérivée est toujours négative et E^3 est décroissante. Nous prenons $k_2 = 0$.

Le maximum de E^3 a lieu pour $k_1 = \frac{P-1}{P}$ et $k_2 = 0$.

Nous avons la condition

$$k_1 < \frac{1}{1+c},$$

donc aussi

$$\frac{P-1}{P} < \frac{1}{1+c}.$$

Cette inégalité se ramène à

$$\eta < \frac{1}{c} \quad \text{toujours réalisé.}$$

$$\begin{aligned} \text{Max } E^3 &= 1 - e^{-[(1+r)S + P-1]} \cdot \frac{ce^{-1}(P-1) + (1-c-cP) \cdot P}{1+c-cP} \\ &= 1 - e^{-[(1+r)S + \eta]} \cdot \frac{ce^{-1} \cdot \eta + 1 - c\eta}{1-c\eta} \cdot (1+\eta) \end{aligned}$$

4. Remarques

4.1. Nous pouvons également envisager des modèles faisant intervenir plusieurs taux d'intérêt des investissements et différents coûts de liquidation.

4.2. Le modèle considéré est un modèle statique, relatif à une seule période d'activité de la compagnie. Il serait intéressant de considérer des modèles dynamiques, qui font intervenir plusieurs périodes d'activité.

5. Références

- Beard R. E., Pentikäinen T., Pesonen E.* (1969); Risk theory, Methuen's Monographs on applied probability and statistics.
- Bohman H.* (1971): A mathematical model of insurance business designed to control equity, solvency and profitability in the business, Wisconsin Actuarial Conference 1971.
- Borch K. H.* (1964): The optimal management policy of an insurance company, Proc. Casualty. Actu. Soc., 51, 182–197.
- (1968): The optimal portfolio of assets in an insurance company, Trans. XVIIIth Intern. Cong. Actu., Munich, 3, 21–31.
- (1972): Risk management and company objectives, Trans. XIXth Intern. Cong. Actu., Oslo, 4, 613–619.
- Finetti B. de* (1957): Su un'impostazione alternativa della teoria collettiva del rischio, Trans. XVth Intern. Cong. Actu., New York, 2, 433–443.
- Seal H. L.* (1969): Stochastic Theory of a Risk Business, Yale University-Wiley; XIII, 210p.

Zusammenfassung

Die Entscheidungen einer Versicherungsgesellschaft basieren auf gewissen Wahrscheinlichkeiten, welches das Risiko charakterisieren, und auf den Nutzen, welcher der Risikosituation entspricht. Es wird hier der Einfluss der Risikoreserve auf die Nutzenbewertung untersucht.

Summary

The decisions of an insurance company are based on certain probabilities, which describe the risk and on the utility which corresponds to the risk situation. In this article the author discusses the influence of the risk reserve on the utility valuation.

Résumé

Les décisions d'une compagnie d'assurances se basent d'une part sur certaines probabilités qui caractérisent le risque et d'autre part sur utilité de la situation du risque. On examine l'influence de la réserve de risque sur l'évaluation de l'utilité.

Riassunto

Le decisioni d'una società assicurativa si basano da una parte su certe probabilità che caratterizzano il rischio, d'altra parte sull'utile della situazione di rischio. Viene studiata l'influenza della riserva di rischio sulla valutazione dell'utile.

