

# Deckungskapital-Rekursion und Erwartungsbarwert

Autor(en): **Romer, B.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer  
Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaire  
Suisse = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **79 (1979)**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-967118>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# B.

## Wissenschaftliche Mitteilungen

### Deckungskapital-Rekursion und Erwartungsbarwert

Von B. Romer, Basel

#### Einleitung

Dieser Aufsatz soll den finanztechnischen Ausdruck «Barwert» einbetten in den allgemeineren versicherungsmathematischen Begriff «Erwartungsbarwert», der Barwert und Erwartungswert vereinigt, und helfen, sich zu lösen von der Darstellung des rechnungsmässigen Verlaufes einer Versicherung (gemäss einer starren Ausscheideordnung). Betrachtet wird vornehmlich das Einzeldeckungskapital eines Versicherten im Bestand einer Pensionskasse, weil da die allgemeinen Fragen besonders deutlich werden.

#### Bezeichnungen und Ausgangsbeziehungen

$j = 1, 2, \dots, N$  seien die Nummern der Versicherten im Bestand einer Pensionskasse;

$t = 0, 1, 2, \dots$  bezeichne je nachdem die bisherige Versicherungszeit bzw. das Versicherungsjahr von  $t$  (ganzzahlig) bis  $t + 1$ .

Auf den Bestand wirken  $k$  verschiedenartige Ereignisse ein. Sie treten für den Versicherten  $j$  im Jahre  $t$  mit der (sog. abhängigen, nichtbereinigten) Wahrscheinlichkeit  ${}_tW_j^{(\lambda)}$  ein,  $\lambda = 1, 2, \dots, k$ .

Wir setzen die Verbleibswahrscheinlichkeit

$${}_tW_j = 1 - \sum_{\lambda=1}^k {}_tW_j^{(\lambda)}.$$

Der von einem solchen Ereignis betroffene Versicherte verlässt (endgültig) den betrachteten Bestand; ausserdem wird dabei am Ende des gleichen Jahres  $t$  eine Leistung fällig, bzw. beginnt zu laufen. Ihr bereitzustellender, zusammengefasster Betrag (Kapitalwert in einem noch festzulegenden Sinn) sei

$${}_tL_j^{(\lambda)}.$$

Am Beginn des Jahres  $t$  gehe man aus von einem vorhandenen oder benötigten Kapitalbetrag  ${}_tV_j$ . Es ver falle da auch gerade die Jahresprämie  ${}_tP_j$  zugunsten der Pensionskasse.

### Die Nachbarwerte des Deckungskapitals und deren Verkettung

Wir stützen uns auf die einleuchtende Rekursion «aus Verzinsung und Vererbung»

$$({}_tV_j + {}_tP_j)(1 + i) - \sum_{\lambda=1}^k {}_tW_j^{(\lambda)} {}_tL_j^{(\lambda)} = (1 - \sum_{\lambda=1}^k {}_tW_j^{(\lambda)}) {}_{t+1}V_j. \quad (1)$$

Gelegentlich werden wir den Ausdruck  $\sum_{\lambda} {}_tW_j^{(\lambda)} {}_tL_j^{(\lambda)}$  mit  ${}_tK_j$  abkürzen.

Aus (1) erhalten wir zwei verschiedene Zerlegungen der Jahresprämie. Die erste wird

$${}_tP_j = (v {}_{t+1}V_j - {}_tV_j) + v \sum_{\lambda} {}_tW_j^{(\lambda)} [{}_tL_j^{(\lambda)} - {}_{t+1}V_j]. \quad (2)$$

Die beiden Bestandteile heissen bekanntlich Sparprämie und Risikoprämie, letztere für alle «Ereignisfälle» zusammen; man hat als Summand darin die Risikoprämie für das Ereignis  $\lambda$ .

Die zweite wird

$${}_tP_j = {}_tW_j [v {}_{t+1}V_j - {}_tV_j] + \sum_{\lambda} {}_tW_j^{(\lambda)} [v {}_tL_j^{(\lambda)} - {}_tV_j]. \quad (3)$$

Wir nennen die beiden Bestandteile, aus denen sich die Prämie nun zusammensetzt, Verbleibsprämie und Ausscheideprämie. Letztere ist selbst nochmals additiv aus den einzelnen Teil-Ausscheideprämien zusammengesetzt, ähnlich wie die Risikoprämie in (2).

Üblich ist (2). Diese Zerlegung befriedigt aber nicht voll, aus mehreren Gründen:

- Mit der Sparprämie tut man dergleichen, als ob wesentlich ein Bankgeschäft vorliege, das über das nebensächliche Versicherungsgeschäft mit seiner Risikoprämie dominiere und jenes an den Rand drängt. Dabei könnte kein Bankmann oder Kaufmann die Sparprämie angeben, denn sie ist, als Zwischenergebnis, bestimmt durch ein langfristiges Versicherungsgeschäft.
- Die Sparprämie nimmt zur Zeit  $t$  etwas als gewiss voraus, das jedenfalls erst in  $(t + 1)$  und dann auch nur mit Wahrscheinlichkeit massgebend ist, nämlich  ${}_{t+1}V_j$ , dessen Gültigkeit das Verbleiben im Bestand voraussetzt. Das Abzugsglied  ${}_{t+1}V_j$  bei den versicherten Leistungen bezieht sich nicht auf etwas Vorhandenes bzw. Verfügbares, sondern auf etwas, was dann anstelle der Leistung da sein sollte, sofern das Ereignis eben nicht passiert.
- Am wichtigsten ist der Einwand, dass mit der Zerlegung gemäss (2) nicht das Wahrscheinlichkeitsfeld bzw. die Wahrscheinlichkeitsverteilung wiedergege-

ben wird, welche im Jahre  $t$  das Geschehen beherrschen: für die  $k + 1$  einander ausschliessenden «versicherten» Ereignisse (das Ausscheiden und das Verbleiben) sollten die Wahrscheinlichkeiten, die zugeordneten Zufallsvariablen und der Erwartungswert zum Ausdruck kommen. Die Wahrscheinlichkeiten müssen sich zu Eins summieren. Das alles geschieht nur bei Darstellung (3) für die Prämie als eines Erwartungswertes für zinsabhängige Zeitwerte. Man beachte dabei die zugeordneten Differenzen von Geldbeträgen «diskontierte Leistung im Ereignisfall abzüglich Anfangsdeckungskapital»; das Deckungskapital am Jahresende gilt als Verbleibsleistung bei Nichteintreten der eigentlichen versicherten Ereignisse im engeren Sinn.

Fügt man zwei Jahre aneinander, beginnend mit  ${}_tV_j$ , so lassen sich beide Rekursionen über das Bindeglied  ${}_{t+1}V_j$  verketten. Man erhält

$${}_tV_j = v {}_tK_j + v^2 {}_tW_j {}_{t+1}K_j + v^2 {}_tW_j {}_{t+1}W_j {}_{t+2}V_j - {}_tP_j - v {}_tW_j {}_{t+1}P_j. \quad (4)$$

Die Fortsetzbarkeit über  ${}_{t+2}V_j$  leuchtet ein. Wir gehen bis zum Zeitpunkt  $t = n$  für das letzte Deckungskapital (als Verbleibsleistung am Schluss). Hört die Zahlung von Prämien schon vor  $n - 1$  auf, denken wir uns die Prämien eben

Null gesetzt. Wir legen noch dem formalen Produkt  $\prod_{\tau=t}^{h-1} {}_{\tau}W_j$  für  $h = t$  den Wert Eins bei. Man hat

$$\begin{aligned} {}_tV_j &= v \sum_{h=t}^{n-1} v^{h-t} {}_hK_j \left( \prod_{\tau=t}^{h-1} {}_{\tau}W_j \right) + \\ &+ v^{n-t} {}_nV_j \left( \prod_{\tau=t}^{n-1} {}_{\tau}W_j \right) - \sum_{h=t}^{n-1} v^{h-t} {}_hP_j \left( \prod_{\tau=t}^{h-1} {}_{\tau}W_j \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Das ist die übliche Formel für das Deckungskapital. Die Herleitung aus der Rekursion führt dazu, dass Summen von bedingten (wahrscheinlichkeitsbehafteten) Barwerten gebildet werden, die mit  $t$  fortschreiten. Aber Erwartungsbarwerte sind sie nicht.

Die Äquivalenzgleichung bildet einen Sonderfall davon, indem für  $t = 0$  die Zuflussgrössen (Anfangsdeckungskapital und Prämien) den Abflussgrössen (Ausscheideleistungen und Schluss-Verbleibsleistung) einander gegenübergestellt und im «Wert» einander gleichgesetzt werden; «Wert» = wahrscheinlichkeitsbehafteter Zeitwert.

(5) zeigt, wie die Zeitwerte von Leistungen und Gegenleistungen an Wahrscheinlichkeiten gebunden sind. Die Produkte der  ${}_{\tau}W_j$ , ggf. verbunden mit den  ${}_hW_j^{(\lambda)}$ , machen die Bedingtheit der Ereignisse klar.

Nicht erkennbar jedoch ist aus (5), wie erwähnt, dass  ${}_tV_j$  ein Erwartungsbarwert ist. Indessen können wir das feststellen, indem wir die Ereignisse folgendermassen in einander ausschliessende gliedern, und zwar von  $t$  an:

Das Ausscheiden im Jahre  $t$  hat die Wahrscheinlichkeit  $1 - {}_tW_j$ .

Das Ausscheiden im Jahre  $t + 1$  hat die Wahrscheinlichkeit  ${}_tW_j(1 - {}_{t+1}W_j)$ .

·  
·  
·

Das Ausscheiden im Jahre  $n - 1$  hat die Wahrscheinlichkeit

$$(1 - {}_{n-1}W_j) \prod_{\tau=t}^{n-2} {}_{\tau}W_j.$$

Der Verbleib bis zur Zeit  $t = n$  hat die Wahrscheinlichkeit  $\prod_{\tau=t}^{n-1} {}_{\tau}W_j$ .

Summiert man von hinten her die Wahrscheinlichkeiten, sieht man, dass die Summe Eins ist. Stellt man daraufhin die zu gleichen Zwischenprodukten der Verbleibswahrscheinlichkeiten gehörigen Werte in (5) zusammen, indem man für die  ${}_tK_j$  zurückgreift auf ihre Definition und von  $t$  an schrittweise vorrückt bis  $n$  und ausserdem das Ausscheiden aufspaltet in die verschiedenen versicherten Ereignisse, so gewinnt man den zinsabhängigen Erwartungsbarwert

$$\begin{aligned} {}_tV_j = & \sum_{h=t}^{n-1} v^{h-t} \left\{ \sum_{\lambda} {}_hW_j^{(\lambda)} \left[ v {}_hL_j^{(\lambda)} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \sum_{\tau=1}^h v^{\tau-h} {}_{\tau}P_j \right] \prod_{\tau=t}^{h-1} {}_{\tau}W_j \right\} + \\ & + v^{n-t-1} \left[ v {}_nV_j - \sum_{\tau=t}^{n-1} v^{\tau-n+1} {}_{\tau}P_j \right] \prod_{\tau=t}^{n-1} {}_{\tau}W_j. \end{aligned} \quad (6)$$

Um das Deckungskapital als Erwartungsbarwert darzustellen, muss man also die Ausscheidewahrscheinlichkeiten und die Schluss-Verbleibswahrscheinlichkeit mit den zugehörigen Aufwandüberschüssen des Versicherungsträgers zu einem Wahrscheinlichkeitsfeld verbinden; «Aufwandüberschuss» = ausgelöste Leistung vermindert um die bis dahin bezahlten und aufgezinnten Prämien.

Bereits die Ausgangsgleichung (1) zeigt das, wenn man anstatt die Prämie das Anfangsdeckungskapital als Erwartungswert formuliert:

$${}_tV_j = \sum_{\lambda} {}_tW_j^{(\lambda)} \left[ v {}_tL_j - {}_tP_j \right] + {}_tW_j (v {}_{t+1}V_j - {}_tP_j). \quad (7)$$

Man kann also wechselweise das Anfangsdeckungskapital oder die Prämie als Erwartungswert bezüglich des Folgejahres darstellen. Auch aus (7) lässt sich allgemein (6) ableiten, indem  ${}_{t+1}V_j$  wiederum einer entsprechenden Beziehung (7) genügt usw.; dabei verliert  ${}_tV_j$  die Eigenschaft, Erwartungswert zu sein, dadurch, dass  ${}_{t+1}V_j$  wiederum durch Rekursion nach (7) ersetzt wird, in keiner Weise. Es zeigt sich bloss, dass  ${}_{t+1}V_j$  ein bedingter Erwartungswert ist. Nach (3) und (7) sind  ${}_tP_j$  und  ${}_tV_j$  vertauschbar; das ist später wichtig in (8), (9) und (13)<sup>1</sup>.

### Die ausgelösten versicherten Leistungen

Falls die  ${}_tL_j$  zum Teil selbst wieder Zahlungen sind, welche sich über eine gewisse Zeit erstrecken (Renten), solange die Empfänger gewisse Bedingungen erfüllen, tauchen ganz ähnliche Fragen zum Wahrscheinlichkeitsfeld auf, das solchen Leistungen zuzuordnen wäre. Es kann sogar die Leistungsdauer selbst unbestimmt sein. Bei Pensionskassen handelt es sich zum Teil um Leistungen, deren zusammengefasster Wert sich im gleichen Sinn wie das Deckungskapital in (5) oder (6) schreiben lässt; es fehlen nur die Prämien. Oder, zum andern Teil, handelt es sich um Leistungen, deren Kapitalwert sich nach (5) bzw. (6) schreiben lässt, indem man die fälligen Rentenbeträge als negative Prämien behandelt und die  ${}_tL_j$  Null setzt.

Letzten Endes geht es dabei also auch um Erwartungsbarwerte. Unter Umständen sind sie zu versehen mit einer Anfangswahrscheinlichkeit; beispielsweise dann, wenn gewisse Anfangsbedingungen beim Auslösen der Leistung nur mit Wahrscheinlichkeit erfüllt sind (z. B. Verheiratetsein eines auf Witwenrenten versicherten Mannes im Falle seines Todes); zur Darstellung als Erwartungsbarwert gehört es dann, das Komplementärereignis «Nichterfülltsein der Anfangsbedingung» mit der Leistung Null zu belegen. Zudem kann es bedingte Erwartungsbarwerte von Funktionen mehrerer Zufallsvariablen geben (Alter der Ehefrau beim Tod des Mannes einerseits, Rentenbezugsdauer andererseits usw.).

### Die quadratische Streuung beim einzelnen Versicherten

Zum Erwartungswert treten quadratische Streuung und andere Potenzmomente um den Erwartungswert. Die entsprechenden Überlegungen sind schon von

<sup>1</sup> (1) definiert eigentlich  $({}_tV_j + {}_tP_j)$  als Erwartungsbarwert; daher die Vertauschbarkeit.

manchen Autoren angestellt worden, wenn auch meistens gekleidet in Begriffe der Ausscheideordnungen.

Wir beschränken uns auf das Versicherungsjahr  $t$  und stützen uns auf Formel (3). Geht man also von der Prämie als Erwartungswert für das Wahrscheinlichkeitsgeschehen im Folgejahr aus und betrachtet die Leistungen als feste Grössen, hat man als quadratische Streuung

$${}_tD_j = {}_tW_j (v {}_{t+1}V - {}_tV_j)^2 + \sum_{\lambda} {}_tW_j^{(\lambda)} (v {}_tL_j^{(\lambda)} - {}_tV_j)^2 - {}_tP_j^2. \quad (8)$$

${}_tD_j$  ändert sich nicht, wenn man alle Einzelwerte und damit auch den Erwartungswert um denselben Wert  ${}_tV_j$  vergrössert. Daher ist

$${}_tD_j = {}_tW_j v^2 {}_{t+1}V_j^2 + \sum_{\lambda} {}_tW_j^{(\lambda)} v^2 ({}_tL_j^{(\lambda)})^2 - ({}_tP_j + {}_tV_j)^2. \quad (9)$$

${}_tD_j$  erweist sich damit als gleich gross wie die Streuung um den Erwartungswert  ${}_tV_j$ , dank der Vertauschbarkeit von  ${}_tP_j$  und  ${}_tV_j$ .

Für  $k = 1$ , also im Falle einer einzigen betrachteten Ausscheideursache mit der Wahrscheinlichkeit  ${}_tW_j$  und der fälligen Leistung  ${}_tL_j$ , vereinfacht sich (9) auf

$${}_tD_j = {}_tW_j (1 - {}_tW_j) v^2 ({}_tL_j - {}_{t+1}V_j)^2. \quad (10)$$

Die Jahresprämie nach (2) als Summe von Spar- und Risikoprämie bietet keine solche Darstellung, weil  ${}_tP_j$  dort eben nicht einjähriger Erwartungswert ist. Man müsste in (2) die rechte Seite durch ein Zusatzglied künstlich ergänzen, ohne den Wert zu verändern, und dann die beiden letzten Terme als Erwartungswert interpretieren:

$${}_tP_j = (v {}_{t+1}V_j - {}_tV_j) + v \sum_{\lambda} {}_tW_j^{(\lambda)} ({}_tL_j^{(\lambda)} - {}_{t+1}V_j) + {}_tW_j \cdot 0. \quad (11)$$

Die zugehörige quadratische Streuung  ${}_tD_j^*$  wird schliesslich

$$\begin{aligned} {}_tD_j^* &= v^2 \sum_{\lambda} {}_tW_j^{(\lambda)} ({}_tL_j^{(\lambda)})^2 + v^2 {}_tW_j {}_{t+1}V_j^2 - \\ &\quad - v^2 \left( \sum_{\lambda} {}_tW_j^{(\lambda)} {}_tL_j^{(\lambda)} + {}_tW_j {}_{t+1}V_j \right)^2. \end{aligned} \quad (12)$$

${}_tD_j$  und  ${}_tD_j^*$  stimmen wegen (1) überein. Die beiden Wahrscheinlichkeitsverteilungen sind bezüglich der Werte ihrer Zufallsveränderlichen bloss um eine Konstante verschieden und die entsprechenden Potenzmomente um den Erwartungswert sind daher gleich gross.

### Die Streuung bei Erwartungswerten als Leistungen

In den bisherigen Streuungsformeln werden die ausgelösten Leistungen als Festwerte behandelt und nicht als Erwartungswerte. Die Formeln wären somit für den letzteren Fall zu verallgemeinern, indem dann eben die ausgelösten Leistungen selbst eine Streuung gemäss einer Wahrscheinlichkeitsverteilung besitzen. Bezeichnen wir mit  $D({}_tL_j^{(\lambda)})$  die Streuung von  ${}_tL_j^{(\lambda)}$  usw. und verwenden wir weiterhin  ${}_tD_j$  gemäss (8) bzw. (9), so erhalten wir, nach bekannten Sätzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung für Funktionen aus verbundenen Verteilungen, als Streuungswert  $D_G$  für das Gesamtgeschäft im Jahr  $t$  beim einzelnen Versicherten  $j$

$$D_G = {}_tD_j + v^2 \sum_{\lambda} {}_tW_j^{(\lambda)} D({}_tL_j^{(\lambda)}) + v^2 {}_tW_j D({}_{t+1}V_j). \quad (13)$$

$D_G$  ist aber als Streuung um  ${}_tP_j$  wegen der Vertauschbarkeit nichts anderes als  $D({}_tV_j)$ . Damit ist (13) als Rekursion der  $D({}_tV_j)$  verwendbar.

### Die Anzahl Ausscheidender als Zufallsgrösse

Wir lösen uns in diesem Abschnitt von der Pensionskasse.

Wir denken uns einen Bestand von Personen mit unter sich für die betrachteten Wahrscheinlichkeitsvorgänge gleichen Eigenschaften. Die Wahrscheinlichkeit, im nächsten Jahr wegen des Ereignisses  $\lambda$ ,  $\lambda = 1, 2, \dots, k$ , auszuscheiden, richtet sich auch wesentlich nach dem erreichten Alter der Personen. Wir bezeichnen diese Wahrscheinlichkeit mit  ${}_0w_x^{(\lambda)}$  für das Ereignis  $\lambda$  und für die Versicherten, welche im Alter  $x$  die Mitgliedschaft beginnen;  ${}_1w_{x+1}^{(\lambda)}$  sei die entsprechende Ausscheidewahrscheinlichkeit für  $(x+1)$ -jährige Versicherte, welche bereits ein Jahr lang dazugehören usw. bis schliesslich  ${}_{n-1}w_{x+n-1}^{(\lambda)}$  bei erreichtem Alter  $(x+n-1)$  und Mitgliedschaftsdauer  $(n-1)$ .

Aus ursprünglich  $l_x$  Versicherten können im ersten Jahr durch die verschiedenen, einander ausschliessenden Ereignisse  $d_x^{(1)}, d_x^{(2)}, \dots, d_x^{(k)}$  ausscheiden, also zusammen

$$\sum_{\lambda} d_x^{(\lambda)} = d_x.$$

Entsprechend können im zweiten Jahr ausscheiden  $d_{x+1}^{(1)}, d_{x+1}^{(2)}, \dots, d_{x+1}^{(k)}$ , zusammen also  $\sum_{\lambda} d_{x+1}^{(\lambda)} = d_{x+1}$  usw.

$d_x$  kann zwischen 0 und  $l_x$ ,  $d_{x+1}$  kann zwischen 0 und der vom ersten Jahr her verbliebenen Restmenge liegen. Das setzt sich entsprechend fort.

Betrachten wir die beiden ersten Jahre. Bedeutungsvoll ist die Abhängigkeit der Ergebnisse im zweiten vom Ausgang des ersten. Durch Verkettung mit den folgenden Jahren lässt sich der Befund dann verallgemeinern.

Als Wahrscheinlichkeitsverteilung der verbundenen einzelnen Werte  $d_x^{(\lambda)}$ ,  $d_{x+1}^{(\lambda)}$ ,  $\lambda = 1, 2, \dots, k$ , haben wir das Produkt zweier Polynomialverteilungen

$$W(d_x^{(\lambda)}, d_{x+1}^{(\lambda)}) = \frac{l_x!}{(l_x - d_x)! \prod_{\lambda} d_x^{(\lambda)}!} \prod_{\lambda} ({}_0w_x^{(\lambda)})^{d_x^{(\lambda)}} \frac{(l_x - d_x)!}{(l_x - d_x - d_{x+1})! \prod_{\lambda} d_{x+1}^{(\lambda)}!} \prod_{\lambda} ({}_1w_{x+1}^{(\lambda)})^{d_{x+1}^{(\lambda)}}. \quad (14)$$

Die  $d_x^{(\lambda)}$  bzw. die  $d_{x+1}^{(\lambda)}$  können nur ganzzahlige, nichtnegative Werte annehmen und deshalb einzeln höchstens  $l_x$  bzw.  $(l_x - d_x)$  erreichen.  $l_x$  ist fest vorgegeben,  $(l_x - d_x)$  aber zufallsbedingt veränderlich über  $d_x$ . Wir unterstellen, dass die  $d_{x+1}^{(\lambda)}$  nur davon abhängen, wie gross  $(l_x - d_x)$  ist, nicht aber davon, welche Personen noch da sind (Austauschbarkeit). Betrachten wir für das zweite Jahr zunächst auch  $(l_x - d_x)$  als gegeben und fragen nach dem Erwartungswert der dann infolge des Ereignisses  $\lambda$  im zweiten Jahr ausscheidenden Anzahl Personen. In (14) multiplizieren wir also mit  $d_{x+1}^{(\lambda)}$  und summieren über  $d_{x+1}^{(\lambda)} = 0, 1, 2, \dots, (l_x - d_x)$ , verbunden mit der jeweils zulässigen gesamten Vielfalt der übrigen  $d_{x+1}^{(\lambda)}$ , gemäss ihren Wahrscheinlichkeiten.

Der ganze Faktor in (14), welcher sich allein auf das erste Jahr bezieht, bleibt dabei jeweilen unverändert. Beim zweiten darf der Fall mit  $d_{x+1}^{(\lambda)} = 0$  weggelassen werden, weil das Produkt verschwindet. Dann kann man einen Teil vorausnehmen, nachdem man den Faktor  $d_{x+1}^{(\lambda)}$  mit Hilfe von  $d_{x+1}^{(\lambda)}!$  weggekürzt hat.

Der vorausgenommene Teil ist

$$(l_x - d_x) {}_1w_{x+1}^{(\lambda)}.$$

Der verbleibende zweite Faktor ist danach derselbe wie vorher, mit der Ausnahme, dass er sich nun auf  $(l_x - d_x - 1)$  bezieht.  $(d_{x+1}^{(\lambda)} - 1)$  nimmt dabei die Werte  $0, 1, \dots, l_x - d_x - 1$  an. Summiert man dies über alle zulässigen Fälle, gibt die Summe also wiederum Eins.

Für die andern  $d_{x+1}^{(\lambda)}$  gilt Entsprechendes und darum auch für ihre Summe; deren Erwartungswert ist also

$$(l_x - d_x) \sum_{\lambda} {}_1w_{x+1}^{(\lambda)}, \quad (15)$$

hängt folglich vom Ausgang des ersten Jahres in der Weise ab, dass die erwartete Anzahl ausscheidender Personen im zweiten Jahr proportional ist zur ver-

bliebenen Restgesamtheit aus dem ersten Jahr. In diesem Sinn handelt es sich um einen bedingten Erwartungswert.

Mit dem gleichen Gedankengang wird der Erwartungswert der Anzahl Ausscheidender im ersten Jahr

$$l_x \sum_{\lambda} {}_0w_x^{(\lambda)}$$

und deshalb der Erwartungswert der Anzahl verbleibender Personen

$$l_x (1 - \sum_{\lambda} {}_0w_x^{(\lambda)}). \quad (16)$$

Wir setzen voraus, dass die  ${}_1w_{x+1}^{(\lambda)}$  in keiner Weise beeinflusst sind von den  ${}_0w_x^{(\lambda)}$ . Dann ist in (15)  $\sum_{\lambda} {}_1w_{x+1}^{(\lambda)}$  ein fester Faktor, sobald man den Erwartungswert von  $(l_x - d_x)$  bildet, und kann vorausgenommen werden. Somit ist der Erwartungswert der Anzahl Ausscheidender im zweiten Jahr – und damit auch derjenige der bis an dessen Ende Verbliebenen – darstellbar als Produkt zweier Erwartungswerte. Also:

Insgesamt erwartete Anzahl Ausscheidender im zweiten Jahr, vom Anfang des ersten her betrachtet,

$$l_x (1 - \sum_{\lambda} {}_0w_x^{(\lambda)}) \sum_{\lambda} {}_1w_{x+1}^{(\lambda)}. \quad (17)$$

Erwartete Anzahl Verbleibender bis Ende des zweiten Jahres =

$$l_x (1 - \sum_{\lambda} {}_0w_x^{(\lambda)}) (1 - \sum_{\lambda} {}_1w_{x+1}^{(\lambda)}). \quad (18)$$

Das setzt sich in leicht erkennbarer Weise fort für weitere, angehängte Jahre. Man könnte auch hier Streuungen und weitere Potenzmomente der Verteilung für die verschiedenen Personenzahlen berechnen. Wir wenden uns jedoch der Zusammensetzung von Erwartungswerten und Streuungen in nichthomogenen Beständen zu, indem wir notieren: Die Wahrscheinlichkeiten in (1) und den folgenden Gleichungen sind gemäss (16) bis (18) deutbar als normierte Erwartungswerte, d. h. bezogen auf Einerbestände ( $l_x = 1$ ). Damit sind sie selbst Ergebnisse von Wahrscheinlichkeitsverteilungen, also nicht determiniert.

### **Erwartungswert und Barwert-Streuung in zusammengesetzten Beständen**

Die Formeln (3), (9), (13) beziehen sich auf Einzelpersonen. Die entsprechenden Masszahlen für mehrere Personen ergeben sich bekanntlich bei (3) immer durch einfache Summation, bei (9) und (13) durch einfache Summation dann, wenn

man voraussetzt, dass die auftretenden Wahrscheinlichkeiten für die verschiedenen Personen voneinander nicht abhängen.

Die Summe der Einzelprämien nach (3) und die Summe der Einzelstreuungen nach (9) bzw. (13) über alle  $j = 1, 2, 3, \dots, N$  liefern dann also die entsprechenden kennzeichnenden Angaben für den Gesamtbestand.

### Offene Fragen

Die hier verwendeten Wahrscheinlichkeiten sind so beschaffen, dass sie ein Höchstalter festlegen; die Wahrscheinlichkeit, noch älter zu werden, verschwindet. Darin liegt eine Starrheit, welche der zufallsgesteuerten Unbestimmtheit des erreichbaren Alters widerspricht. Diese Starrheit zu lockern würde gebieten, die verwendeten Wahrscheinlichkeiten selbst nicht als feste Grössen einzuführen, sondern ihre Werte bloss mehr oder weniger wahrscheinlich zu machen. Dazu benötigt man Wahrscheinlichkeitsverteilungen, welche den verwendeten Wahrscheinlichkeitsgrössen wiederum Wahrscheinlichkeiten zuordnen. Man kann an Verallgemeinerungen denken, ähnlich wie sie in der Nichtlebensversicherung eingeführt worden sind, doch müssen sie bei der langfristigen Personenversicherung weiteren Forderungen unterworfen werden: Sollen beispielsweise beliebig hohe Alter als erreichbar, wenn auch als wenig wahrscheinlich gelten; sollen die Wahrscheinlichkeiten, welche zum Jahre  $t$  gehören, völlig unabhängig von den Nachbarjahren «pendeln» können; in welcher Weise bildet man ein vollständiges Wahrscheinlichkeitsfeld für die «doppelt wahrscheinlichen», einander ausschliessenden Ereignisse, um einen zugleich einfachen und wirksamen Ansatz zu haben usw. Und auch: Wie könnte man die Erwartungswerte in (16), (17), (18) geeignet darin einfügen? Hier tun sich fruchtbare Verallgemeinerungen auf.

### Literaturverzeichnis

#### Lehrbücher

*Zwinggi, E.*: Versicherungsmathematik, 2. Auflage, Basel 1958.

*Saxer, W.*: Versicherungsmathematik, Erster Teil, Berlin 1955.

*Reichel, Georg*: Mathematische Grundlagen der Lebensversicherung, Teil 1 und 2, Schriftenreihe Angewandte Versicherungsmathematik, Heft 3 und 5, Karlsruhe 1975 und 1976.

## Abhandlungen

MVSVM = Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker.

BDGVM = Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik.

*Grzempa, Georg*: Erwartungswert, Varianz und Schiefe der Leistungsverteilungsfunktion verschiedener Versicherungsbestände, BDGVM Band XI, Heft 4, Oktober 1974.

*van Delden, Th.*: Stop loss-Versicherung bei kleinen Beständen, BDGVM Band XII, Heft 1, April 1975.

*Zwinggi, E.*: Zur Darstellung des Deckungskapitals in der Lebensversicherung, MVSVM Band 71, Heft 2.

*Consaël R. et Sonnenschein, J.*: Théorie mathématique des assurances de personnes, MVSVM Band 78, Heft 1, 1978.

Prof. Dr. B. Romer  
 Prevoplan  
 Peter-Merian-Strasse 2  
 4002 Basel

## Zusammenfassung

Die Rekursionsformel für das Deckungskapital wird benützt, um die Prämie und das Deckungskapital als «Erwartungsbarwerte» darzustellen. Die zugehörigen Wahrscheinlichkeitsverteilungen gestatten es, für die Streuung auch dann eine Rekursion abzuleiten, wenn die Leistungen wiederum Erwartungsbarwerte sind.

## Résumé

L'auteur utilise la formule de récurrence de la réserve mathématique pour définir la prime et la réserve mathématique comme «valeurs actuelles espérées». Les lois de distribution permettent de définir également une récurrence pour la variance lorsque les prestations sont des valeurs actuelles espérées.

## Summary

The recursion formula for the premium reserve is used to express the premium and the reserve itself as «expected actual values». The concerned distributions permit to find a recursion formula for the variance even when the claims are expected actual values.

## Riassunto

L'autore utilizza la formula di ricursione della riserva matematica per definire il premio e la riserva matematica come «valori attuali aspettati». Le distribuzioni di probabilità permettono anche una ricursione per la varianza nel caso che le prestazioni siano dei valori attuali aspettati.

