Näherungsformeln bei unterjähriger Zahlung

Autor(en): **Gerber, Hans U. / Jones, Donald A.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **79 (1979)**

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-967127

Näherungsformeln bei unterjähriger Zahlung

von Hans U. Gerber und Donald A. Jones

1. Einleitung

Die von vielen Autoren ([1], [2], [3]) empfohlene Formel

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m} \tag{1}$$

kann hergeleitet werden unter der Annahme, dass die Diskontierte Zahl der Lebenden stückweise linear sei. Bei grossen Zinssätzen ist diese Annahme unrealistisch, und die Näherungsformel (1) ist dementsprechend schlecht.
In dieser Notiz soll für die Formel

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{d}{d^{(m)}} \ddot{a}_x - \frac{s_{\overline{1|}}^{(m)} - 1}{d^{(m)}} A_x \tag{2}$$

geworben werden, welche anhand von $s_{\overline{1|}}^{(m)} = i/i^{(m)}$ und der Identität $A_x = 1 - d\ddot{a}_x$ umgeschrieben werden kann als

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{d}{d^{(m)}} \frac{i}{i^{(m)}} \ddot{a}_x - \frac{i-i^{(m)}}{i^{(m)}\, d^{(m)}}. \tag{3}$$

Diese Formeln kann man von der Annahme herleiten, dass die Zahl der Lebenden stückweise linear sei ([2], Seiten 34 und 35), und ihre Qualität hängt nicht von der Höhe des Zinssatzes ab.
Formel (2) hat übrigens eine ansprechende Interpretation:
$\ddot{a}_x^{(m)}$ ist kleiner als $\ddot{a}_x$ aus zweierlei Gründen: Erstens besteht ein Zinsverlust (der sich im Faktor $d/d^{(m)}$ äussert), und zweitens wird weniger ausbezahlt im Todesjahr, was den negativen Ausdruck auf der rechten Seite von (2) erklärt.
Die entsprechende Formel für kontinuierliche Zahlungen ist

$$\bar{a}_x = \frac{d}{\delta} \ddot{a}_x - \frac{\bar{s}_{\overline{1|}} - 1}{\delta} A_x. \tag{4}$$

Man erhält sie aus (2) im Grenzübergang $m \to \infty$.
In methodischer Hinsicht soll im folgenden exemplifiziert werden wie probabilistische Methoden Herleitungen von Formeln in der Lebensversicherungsmathematik wesentlich erleichtern können.

2. Die stückweise Linearität der Zahl der Lebenden im Lichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Für einen x-Jährigen definieren wir die Zufallsvariablen T, K, U, U_m wie folgt: T ist die restliche Lebenszeit, also $Pr(T>t) = {}_tp_x$, $t>0$. $K = [T]$ ist die restliche Lebenszeit, abgerundet auf ganze Jahre, also $Pr(K = k) = {}_kp_x\, q_{x+k}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, und $U = T-K$ ist der Bruchteil eines Jahres, der im Todesjahr verlebt wird. Ferner nimmt U_m die Werte $^1/m$, $^2/m$, ..., 1 an, gemäss der Regel

$$U_m = \frac{j+1}{m}, \quad \text{falls} \quad \frac{j}{m} \leqq U < \frac{j+1}{m}. \tag{5}$$

Sinngemäss $U_1 = 1$ und $U_\infty = U$.

Anhand dieser Zufallsvariablen können Barwerte als Erwartungswerte ausgedrückt werden. Beispielsweise,

$$\ddot{a}_x = E\left[\ddot{a}_{\overline{K+1}|}\right] = E\left[\frac{1-v^{K+1}}{d}\right] \tag{6}$$

$$\ddot{a}_x^{(m)} = E\left[\ddot{a}^{(m)}_{\overline{K+U_m}|}\right] = E\left[\frac{1-v^{K+U_m}}{d^{(m)}}\right] \tag{7}$$

$$A_x = E\left[v^{K+1}\right] \tag{8}$$

$$\overline{A}_x = E\left[v^T\right] \tag{9}$$

Im folgenden nehmen wir an, dass

$$l_{x+t} = l_x - t \cdot d_x, \qquad 0 \leqq t \leqq 1, \text{ (x ganze Zahl)}, \tag{10}$$

oder, gleichbedeutend, dass

$${}_tq_x = t \cdot q_x, \qquad 0 \leqq t \leqq 1, \qquad \text{(x ganze Zahl)}. \tag{11}$$

Unter dieser Annahme berechnet sich die gemeinsame Verteilung von K und U wie folgt:

$$\begin{aligned} Pr(K = k \quad \text{und} \quad U \leqq u) &= Pr(k < T \leqq k+u) \\ &= {}_kp_x\, {}_uq_{x+k} = {}_kp_x\, q_{x+k} \cdot u = Pr(K = k)\, Pr(U \leqq u). \end{aligned} \tag{12}$$

Die Zufallsvariablen K und U sind also unabhängig, und U ist gleichverteilt über dem Einheitsintervall. Es folgt, dass K und U_m ebenfalls unabhängig sind, und dass U_m gleichverteilt ist über den Werten $1/m, 2/m, \ldots, 1$.

3. Herleitung von Formel (2)

Offenbar ist

$$\begin{aligned} \frac{1-v^{K+U_m}}{d^{(m)}} &= \frac{d}{d^{(m)}}\,\frac{1-v^{K+1}}{d} - \frac{v^{K+U_m}-v^{K+1}}{d^{(m)}} \\ &= \frac{d}{d^{(m)}}\,\frac{1-v^{K+1}}{d} - \frac{(1+i)^{1-U_m}-1}{d^{(m)}}\,v^{K+1}. \end{aligned} \tag{13}$$

Daraus erhalten wir (2), indem wir den Erwartungswert nehmen, unter Berücksichtigung von (6), (7), (8) und den oben genannten Eigenschaften von K und U_m.

4. Todesfallversicherung mit Auszahlung beim Tode

Wenn man in der Identität

$$v^T = v^{K+U} = (1+i)^{1-U}\, v^{K+1} \tag{14}$$

den Erwartungswert bildet, erhält man, unter Berücksichtigung von (8), (9) und den oben erwähnten Eigenschaften von K und U die Formel

$$\overline{A}_x = E\left[(1+i)^{1-U}\right] A_x = \frac{i}{\delta} A_x. \tag{15}$$

Literaturverzeichnis

[1] *Jordan, C. W.* (1967): Life Contingencies, Chicago: Society of Actuaries.
[2] *Saxer, W.* (1955): Versicherungsmathematik, Erster Teil, Heidelberg: Springer-Verlag.
[3] *Zwinggi, E.* (1945): Versicherungsmathematik, Basel: Verlag Birkhäuser.

Anhang
Vergleich der Näherungsformeln

i	$\ddot{a}_x$	$\ddot{a}_x^{(12)}$ gemäss (1)	$\ddot{a}_x^{(12)}$ gemäss (2)
.05	21*	20.542	20.538
	14	13.542	13.536
	7	6.542	6.535
	3	2.542	2.534
.10	11*	10.542	10.534
	7	6.542	6.531
	3	2.542	2.528

* Also keine Sterblichkeit

Hans U. Gerber & Donald A. Jones
University of Michigan
Department of Mathematics
Ann Arbor, Michigan 48104
USA

(H. U. Gerber bis Herbst 1980:
Mathematisches Forschungsinstitut
ETH Zürich)

Zusammenfassung

Mit einer probabilistischen Methode ist es sehr einfach, die Näherungsformel (2) herzuleiten. Diese ist realistischer als die übliche Näherungsformel (1), ist aber bis heute wenig verwendet worden.

Résumé

A l'aide d'une méthode stochastique, il est aisé de déduire la formule d'approximation (2). Celle-ci est plus proche de la réalité que la formule habituelle (1). Elle n'a été cependant que peu utilisée jusqu'à ce jour.

Riassunto

Con un metodo probabilistico è molto facile derivare una formula d'approssimazione (2), che è più realistica della ben conosciuta formula (1) ma che malgrado è stata meno utilizzata.

Summary

With a probabilistic argument it is very easy to derive approximation (2). This formula is more realistic than the usual approximation (1), but has not found yet the recognition it deserves.